MÓDULO 9

Matemática

Cálculo Diferencal, Lógica Matemática, Análise Matemática Probabiidade

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Direitos de autor

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA e Desenvolvimento Humano
Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação

Av. 24 de Julho nº 254 Maputo

Moçambique

Fax: +25821490000 Tel: +25821490000
E-mail: inde@inde.gov.mz
Site da Internet: www.mec.mz

Agradecimentos

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação deseja agradecer os abaixo mencionados pela sua contribuição na elaboração deste módulo através do fornecimento da Template:

COL

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 9

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª classes, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classes. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as resposta no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

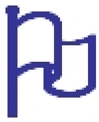
No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas do seu nível.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquirir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Primitiva e Integral Indefinida

Introdução

No capítulo anterior, estudamos o problema seguinte: Dada uma função F(x), achar a sua derivada ou seja $f(x) = F^{`}(x)$. No presente capítulo estudaremos o problema inverso portanto, quando a derivada de uma função é conhecida é possível determinar a função que a originou. Por exemplo, se a taxa de crescimento de uma determinada população é conhecida, pode-se desejar saber qual será o tamanho da população em algum instante no futuro; conhecendo a velocidade de um corpo em movimento, pode-se desejar calcular a sua posição em qualquer momento; conhecendo o índice de inflação, pode-se desejar estimar os preços; etc

O processo de obter uma função a partir da sua derivada é chamado integração indefinida.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *calcular* a função primitiva.
- *calcular* o integral indefinida.

Primitiva e Integral Indefinida

Definição 1

Diz-se que uma função F(x) é uma primitiva de f(x) num intervalo I, se $F^{`}(x) = f(x), \forall x \in I$

Exemplo:

Determine uma primitiva da função $f(x) = x^3$.

Solução:

De acordo com a definição da primitiva, podemos concluir que a primitiva é $F(x) = \frac{x^4}{4}$, pois $\left(\frac{x^4}{4}\right)^` = x^3$.

Facilmente podemos constatar que esta primitiva não é única pois no exemplo anterior podemos apresentar como primitivas as funções:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 5$$
$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 9$$

Ou duma forma geral

$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, onde C é uma constante real

porquanto $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)^` = x^3$

Daqui se pode concluir que se uma função f(x) tem uma primitiva F(x), esta faz parte de um conjunto infinito de primitivas que se exprimem através da expressão F(x) + C, onde C é uma constante real.

Definição 2:

Chama-se <u>integral indefinida</u> da função f(x) e escreve-se $\int f(x)dx$ a toda a expressão da forma F(x) + C, onde F(x) é uma primitiva de f(x), ou seja $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{se } F^`(x) = f(x)$

Nota:

$$\frac{dy}{dx} = y^` \Rightarrow dy = y^` dx$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f^`(x) \Rightarrow df(x) = f^`(x)dx$$

$\int$ é o sinal de integração , f(x) é a função a integrar e

f(x)dx é a expressão sob sinal de integral

O processo de determinação da primitiva de uma função f(x) chama-se **integração** da função f(x).

Exemplo.:1 - Seja f(x) = 2x, então a função F(x) = x² é uma integral indefinida de *f* pois $dF(x) = d\left(x^2\right) = 2x = f(x)$.

Observemos, no entanto, que as funções H(x) = x² + 3; G(x) = x² - 7; M(x) = x² + 2 π são também primitivas da função f(x) = 2x, pois todas satisfazem ao conceito de integral indefinida. Então dizemos que a função f(x) = x² + k, k $\in$ R, é a primitiva geral da função f(x) = 2x.

Pelo que se disse até aqui, podemos concluir que a integração indefinida é a operação inversa da derivação, (ou da diferenciação) a menos de uma constante.

Exemplo.:2 - $\int xdx = \frac{x^2}{2} + k$, pois, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + k\right) = x = f(x)$

Exemplo.:3 - $\int \sqrt{3x-1}\,.\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + k$, pois $d\left(\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3}\right) =$
$= \sqrt{3x-1}$

Fórmulas da integral indefinida:

Para melhor compreensão e facilidade de comparar, cobraremos as fórmulas da diferencial (derivada x ou dx) e da sua inversa, a integral indefinida em correspondência.

Diferencial	Integral
1 - $d(k) = 0 . dx = 0$ 2 - $d(x^m) = m.\ x^{m-1} . dx$	1 - $\int 0.dx = k$ 2 - $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k, m \neq -1$
3 - $d(u^m) = m u^{m-1} du$	3 - $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + k, m \neq 1$
4 - $d(c.f(x)) = c.d(f(x))$	4 - $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$
5 - $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$	5 - $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
6 - $d(sen\ u) = cos\ u\ du$	6 - $\int cosu . du = senu + k$
7 - $d(cos\ u) = sen\ u\ du$ 8 - $d(tan\ u) = sec^2\ u\ du$	7 - $\int senu . du = -cosu + k$ 8 - $\int sec^2 u . du = tanu + k$

Tabela de integrais imediatos

A Tabela a seguir apresentada pode ser facilmente obtida a partir da definição 2 e das regras de derivação vistas no capítulo anterior.

1) $\int dx = x + C$	8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen}\,\frac{x}{a} + C$
2) $\int x^n dx - \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para n ? -1	9) $\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$
3) $\int \frac{dx}{x} - \ln\lvert x\rvert + C$	10) $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$
4) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\,x + C$	11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$
5) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C$	12) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\text{cotg}\,x + C$
6) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	13) $\int e^x dx = e^x + C$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\,x + C$	14) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
	15) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

Aplicação das propriedades

Exemplos:

1. $$\int\left(3x^2 - 7x + 2\right)dx = \int 3x^2dx - \int 7xdx + \int 2dx$$
$$= 3\int x^2dx - 7\int xdx + 2\int dx$$
$$= 3.\frac{x^3}{3} - 7.\frac{x^2}{2} + 2x + C$$
$$= x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + C$$

2. $$\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$
$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Diz-se que uma função F(x) é uma primitiva de f(x) num intervalo I, se $F^{`}(x) = f(x), \forall x \in I$

- Chama-se integral indefinida da função f(x) e escreve-se $\int f(x)dx$ a toda a expressão da forma F(x) + C, onde F(x) é uma primitiva de f(x), ou seja $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad se\ F^{`}(x) = f(x)$

- O processo de determinação da primitiva de uma função f(x) chama-se **integração** da função f(x).

- As propriedades para ocálculo de integrais já estão resumidas em tabela bem como as formulas de integração imediatas, por isso não se esqueça de consultar estas tabelas enquanto estiver a efactuar os cálculos.

Actividades

Actividades

1. Determine as primitivas das seguintes funções:

$$a) f(x) = 7x^{\frac{5}{2}} + 4; \quad b) g(x) = \frac{t^5}{2} - \frac{4}{t^{-3}} + 3t;$$

$$c) f(x) = \frac{x+1}{x^5}; \quad d) u(x) = u^3\left(-2u + u^{-5}\right)$$

Resolução

$$a) \int \left(7x^{\frac{5}{2}} + 4\right) dx = 2x^{\frac{7}{2}} + 4x + c$$

$$b) \int \left(\frac{t^5}{2} - \frac{4}{t^{-3}} + 3t\right) dt = \frac{1}{12t^6} - t^4 + \frac{3}{2}t^2 + c$$

$$c) \int \frac{x+1}{x^5} dx = \int \left(x^{-4} + x^{-5}\right) dx = -\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + c$$

$$d) \int u^3\left(-2u + u^{-5}\right) du = \int \left(-2u^4 + u^{-2}\right) du = -\frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{u} + c$$

2. Determine aplicando as propriedades:

Resolução

$$\int (4\cos x - 5\operatorname{sen} x)\, dx = 4\int \cos x dx - 5\int \operatorname{sen} x dx$$
$$= 4\operatorname{sen} x + 5\cos x + C$$

3. Determine aplicando as regras de integrais imediatos :

Resolução

$$a) \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C$$

$$b) \int \cos(3x+5)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+5) + C$$

Avaliação

Avaliação

1. Determine:

a) $\int 7x^2$

b) $\int (2x+5)^3\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{2}{x^2}dx$

e) $\int e^x dx$

f) $\int e^{kx} dx$

g) $\int \frac{1}{x+3}$

h) $\int \frac{8}{\sqrt{1-x^4}}dx$

2. Determine as primitivas as funções seguintes

a) $\int \left(-2+v^{-2}\right)^2 dv$

b) $\int \left(\frac{x^3+2x-7}{x}\right)dx$

c) $\int \left(\frac{e^x}{2}+x\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int \left(\cos(t)-\sec(t).\tan(t)\right)dt$

Lição 2

Primitiva e Integral Indefinida

Introdução

Nesta lição vamos aplicar no cálculo da primitiva, o método de substituição. Este é um dos métodos mais importantes do cálculo dos integrais indefinidos e consiste na troca de variável no integral indefinido, através duma substituição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *calcular* integral indefinida pelo método de substituição.

Objectivos

Primitiva e Integral Indefinida

Método de substituição

Há casos em que a função integrada se "assemelha" a uma função que se sabe integrar. É o que acontece, por exemplo com o integral $\int \cos 3x dx$ em relação a $\int \cos 3u du$

Então, a substituição da variável x por um a nova variável de integração u, criteriosamente relacionada com x, permite simplificar o cálculo integral.

Assin,n o exemplo considerado, convém fazer u=3x, donde $\frac{du}{dx} = 3$ seja, $3dx = du$. Donde, então segue que $dx = \frac{1}{3}du$ e, assim tem-se:

$$\int \cos3x dx = \int \cos u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + c = \frac{1}{3}\operatorname{sen}3x + c$$

Deste modo p;odemos dizer que o método de integração com recurso à mudança de variável consiste em:

- Definir uma nova variável u = g(x), onde g(x) é escolhida de tal modo que, quando escrita em term os de ***u,*** o integrando é mais simples do que quando escrita em termos de **x.**

- Transformar o integralcom relação a **x** num integral com relação a **u,** através da substituição de g(x) onde quer que seja por **u** e g'(x)*dx* por *du*

- Integrar a função resultante de **u**.

- Reescrever a resposta em termos de **x,** através de substituição de **u** por g(x)

Exemplo

Calcular $I = \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}$

Resolução:

Aqui, a substituição pode ser:

$u = x^3 + 1;\ du = 3x^2 dx$ ou seja, $dx = \dfrac{du}{3x^2}$

e por tanto o integral calcula-se fazendo:

$$I = \int 3x^2 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

que passando à variável **x** fica, $I = \dfrac{2}{3}\left(x^3 + 1\right)^{3/2} + C$

Este é um dos métodos mais importantes do cálculo dos integrais indefinidas e consiste na troca de variável na integral indefinida,

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

O método de integração com recurso à mudança de variável ou seja método de substituição consiste em:

- Definir uma nova variável $u = g(x)$, onde $g(x)$ é escolhida de tal modo que, quando escrita em term os de ***u,*** o integrando é mais simples do que quando escrita em termos de **x.**

- Transformar o integralcom relação a **x** num integral com relação a **u,** através da substituição de g(x) onde quer que seja por **u** e g’(x)*dx* por *du*

- Integrar a função resultante de **u**.

- Reescrever a resposta em termos de **x,** através de substituição de **u** por g(x)

Actividades

Actividades

Calculemos os seguintes integrais recorrendo ao método de substituição:

1) $\int 2\sqrt{2-3x}dx$

Seja u= 2-3x ‘logo du=-3dx, assim,

$$\int 2\sqrt{2-3x}dx = -\frac{2}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{4}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$$

2) $\int 3x\sqrt{2x^2-4}dx$

Seja u= 2 x^2 - 4 , logo du=-2xdx, assim,

$$\int 3x\sqrt{2x^2-4}dx = \frac{3}{2}\int (2u)^{\frac{1}{2}} du = \frac{3\sqrt{2}.2}{2.3}u^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{2}\left(x^2-2\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

Seja u= 1+x logo du= dx, assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{u-1}{u^{1/2}} du = \int \left(\frac{u}{u^{1/2}} - \frac{1}{u^{1/2}}\right)du = \int u^{\frac{1}{2}} du - \int u^{-\frac{1}{2}}du =$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + c = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x)^{1/2} + c$$

4) $\int \frac{(x+1)}{x^2-4x+8}dx$

Resolução:

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2-4x+8} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4+2}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8} + \frac{1}{2}\int \frac{6dx}{x^2-4x+8}$$

Fazendo substituição, no 1º integral temos
$x^2-4x+8=t \Rightarrow (2x-4)dx=dt.$

No segundo integral transformemos o denominador numa soma de quadrados

$$x^2-4x+8=x^2-4x+4-4+8=(x-2)^2+4$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+3\int\frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$$

5) Calcule $\int\frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$

Resolução

Fazendo a substituição $x+6=t \Rightarrow dx=dt,$ logo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8^2-(x+6)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{8^2-t^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{t}{8}+C=\operatorname{arcsen}\frac{x+6}{8}+C$$

6) $\int e^{\operatorname{sen}x}.\cos x dx;\ |\text{seja}\quad t=\operatorname{sen}x \Rightarrow dt=\cos x dx$, então

$$\int e^t dt=e^t+C=e^{\operatorname{sen}x}+C$$

7) $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx;\Big|\text{seja}\quad t=\sqrt{x^3+5}\Rightarrow t^2=x^3+5$

$$\Rightarrow 2tdt=3x^2dx \Leftrightarrow \frac{2}{3}tdt=x^2dx;\ \text{então}$$

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int\sqrt{x^3+5}x^2dx=\int t\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{3}\int t^2dt=\frac{2}{9}t^3+C$$

$$=\frac{2}{9}\left(x^3+5\right)\sqrt{x^3+5}+C$$

Avaliação

Avaliação

Calcule recorrendo ao método de substituição

1) $\int \text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)dx$; 2) $\int 3t\cos\left(3t^2\right)dt$; 3) $\int \cos^2 t dt$; 4) $\int \frac{1}{1+9x^2} dx$

Lição 3

Integração por partes

Introdução

O método de integração por partes é usado geralmente em integrais cuja expressão é um produto entre duas funções de natureza diferente, por exemplo, potencial e trigonométrica ou potencial e exponencial ou logarítmica.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *efectuar* a integração por partes.

Objectivos

Integração por partes

Integração por partes

Se f e g são funções diferenciáveis do produto,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

Intagrando ambos os memb ros obtemos

$$\int\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx=\int f(x)g'(x)dx+\int f'(x)g(x)dx \text{ ou}$$

$$f(x)g(x)+C=\int f(x)g'(x)dx+\int g(x)f'(x)dx \text{ ou ainda}$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx+C$$

Uma vez que a integral à direita irá produzir uma outra constante de integração, não há a necessidade de manter C nesta última equação; assim sendo obtemos:

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

A qual é chamada de **fórmula de integração por partes.** Usando esta fórmula, às vezes podemos tornar um problema de integração mais simples.

Na prática é usual reescrever (1) fazendo:

$$u=f(x) \Rightarrow du=f'(x)dx; \quad v=g(x) \Rightarrow dv=g'(x)dx \qquad (2)$$

Isso dá lugar à seguinte forma alternativa para (1):

$$\int udv = uv-\int vdu$$

Exemplo:

Calcule: $\int xe^x dx$

Solução: Para aplicar (2), precisamos escrever a integral na forma $\int udv$

Uma maneira de fazer isso é colocar $u = v$ e $dv = e^x dx$ para que, du = dx e v = $v=\int e^x dx=e^x$

Deste modo, a partir de (2)

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$$

De um modo geral:

1. A parte escolhida como dv tem de ser facilmente integrável.
2. $\int vdu$ não pode ser mais complicada

Integração contendo trinómio quadrado

Considere o integral $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Transformando o denominador numa soma ou diferença de quadrados podemos encontrar integrais de tabela.

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$. Se consideraremos $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k$ podemos ter

$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}$. Fazendo substituição

$x+\frac{b}{2a}=t \Rightarrow dx=dt;$ logo

$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$, que é integral da tabela.

Exemplo: Calcule $\int\frac{dx}{3x^2+12x+30}$

Resolução:

$$\int\frac{dx}{3x^2+12x+30}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4x+2^2-2^2+10}=$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6},$$

Fazendo substituição $x+2=t \Rightarrow dx=dt$, logo

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{3\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f^{'}(x)dx$$

A qual é chamada de **fórmula de integração por partes.** Usando esta fórmula, às vezes podemos tornar um problema de integração mais simples.

Na prática é usual reescrever esta expressão fazendo:

$$u = f(x) \Rightarrow du = f^{'}(x)dx; \quad v = g(x) \Rightarrow dv = g^{'}(x)dx$$

Isso dá lugar à seguinte forma simplificada e prática, fácil de memorizar:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Em resumo é importante reter que:

1. A parte escolhida como *dv* tem de ser facilmente integrável.
2. $\int vdu$ não pode ser mais complicada que a integral que nos foi dada a calcular.

Actividades

Actividades

Encontre o integral indefinido para cada uma das seguintes funções:

$$1)\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\text{seja } u = x \text{ e } dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx,\ du = dx \text{ e } v = 2\sqrt{x+1},\text{ assim}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int udv = uv - \int vdu = 2x\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}dx =$$

$$= 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + c$$

2) $\int \text{arcsenx}dx$

Se ja u =arcsenx, dv=du, logo $du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $v = u$ assim:

$$\int \text{arcsenx}dx = \int udv = uv - \int vdu = \text{xarcsenx} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Fazendo agora t=1- x^2, temos que dt=-2x,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ portanto:

$$\int \text{arcsenx}dx = \text{xarcsenx} + \sqrt{1-x^2} + c$$

3) $\int (2x+1)\text{senx}dx$

Seja 2x+1 e dv=sendx logo du=2dv , v=-cosx assim,

$$\int (2x+1)\text{senx}dx = -(2x+1)\cos x + \int 2\cos xdx = 2(\text{senx} - x\cos x) - \cos x + c =$$

4) $\int x^3\text{senx}dx$

Seja $u = x^3$ e $dv = \text{senx}dx,\ \text{log o}\, du = 3x^2dx \text{ e } v = -\cos x$

Fazendo: $\int x\operatorname{sen}x dx = \operatorname{sen}x - x\cos x + c$ pode ver o exercício anterior número 3 ,então

: $\int x^3 \operatorname{sen}x dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x dx \quad (1)$

Analisando a integral $\int x^2 \cos dx$, observamos que podemos calculá-la também por partes, fazendo agora $u = x^2 e dv = \cos x dx$, logo du=2xdx e v=senx, assim,

$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen}x - 2\int x\operatorname{sen}x dx$ e pela observação acima concluímos que:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen}x - 2(\operatorname{sen}x - x\cos x) \quad (2)$$

Substituíndo (2) e (1) teremos:

$$\int x^3 \operatorname{sen}x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen}x + 6x\operatorname{cox} - 6\operatorname{sen}x + c$$

Avaliação

Avaliação

1) $\int e^{2x} x^3$ 2) $\int \cos\sec^2 x \cot g x dx$ 3) $\int \operatorname{sex}\sec^2 x dx$

Como viu, você deve estar sempre preparado pois, são sempre cobrado os conhecimentos sobre a matéria tratada nos módulos anteriores. A resolução dos exercícios tornou-se muito fácil porque você já dominava os polinómios e suas propriedades, as razões trigométricas e as relações entre elas, as funções , suas derivadas e as fórmulas para a derivação das funções,

Lição 4

Integração de Fracções Racionais

Introdução

Algumas funções são bastante complexas o que torna o processo de determinação das suas primitivas também complexo. É o caso de funções com fracções racionais. Mas a matemática é o caminho certo para a resolução dos problemas do dia a dia, por isso existem algorítmos para facilitar a resolução desses problemas.Você vai determinar integrais com fracções racionais sem sobressaltos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Calcular* Integrais de fracções racionais usando o Método dos coeficientes indeterminados

Integração de Fracções Racionais

O método dos coeficientes indeterminados é o método mais apropriado para a resolução deste tipo de integrais.

Consideremos o integral $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Fazendo transformações algébricas e mudança de variável reduzimos este integral a:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ou seja

1) $$\int \frac{(Ax-B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$$ para $a > 0$

2) $$\int \frac{(Ax-B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 \pm t^2}}$$ para $a < 0$ Que

são integrais de tabela.

Método dos coeficientes indeterminados

Uma função $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde *f(x)* e *g(x)* são polinómios, é chamada uma fracção racional. Se o grau de *f(x)* é menor que o grau de *g(x)*, F(x) é chamada própria; caso contrário F(x) é chamada imprória.

Por exemplo: $\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = x - \dfrac{x-1}{x^2+1}$

Toda a fração racional própria pode ser expressa como uma soma de fracções mais simples (fracções parciais) cujos denominadores são da forma $(ax+b)^n$ e $(ax^2+bx+c)^n$ sendo *n* um número inteiro positivo.Vamos apenas estudar os seguintes casos, dependendo da natureza dos factores do denominador:

Factores lineares distintos

A cada factor linear *ax+b* ocorrendo uma vez no den ominador de uma fracção racional própria, corresponde uma única fracção parcial da forma $\dfrac{A}{ax+b}$, onde A é uma constante a ser determinada.

Factores lineares distintos repetidos

A cada factor *ax+b* ocorrendo *n* vezes no denominador de uma fracção racional própria, corresponde uma soma de n fracções parciais da forma

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$, onde os A_1, A_2,...A_n são constantes a serem determinadas.

$$\int\frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$$

Factores quadráticos distintos

A cada factor quadrático irredutível ax^2+bx+c ocorrendo uma vez no denominador de uma fracção racional própria; corresponde uma única fracção parcial da forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, onde A e B são constantes a serem determinadas.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Uma função $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde *f(x)* e *g(x)* são polinómios, é chamada uma fracção racional. Se o grau de *f(x)* é menor que o grau de *g(x)*, F(x) é chamada própria; caso contrário F(x) é chamada imprória.

Toda a fração racional própria pode ser expressa como uma soma de fracções mais simples (fracções parciais) cujos denominadores são da forma $(ax+b)^n$ e $(ax^2+bx+c)^n$ sendo n um número inteiro positivo.Vamos apenas estudar os seguintes casos, dependendo da natureza dos factores do denominador:

1. Factores lineares distintos

A cada factor linear $ax+b$ ocorrendo uma vez no den ominador de uma fracção racional própria, corresponde uma única fracção parcial da forma $\dfrac{A}{ax+b}$, onde A é uma constante a ser determinada

2. Factores lineares distintos repetidos

A cada factor $ax+b$ ocorrendo n vezes no denominador de uma fracção racional própria, corresponde uma soma de n fracções parciais da forma

$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\text{-----}+\dfrac{A_n}{(ax+b)^n}$, onde os A_1, A_2,...A_n são constantes a serem determinadas.

3. Factores quadráticos distintos

A cada factor quadrático irredutível ax2+bx+c ocorrendo uma vez no denominador de uma fracção racional própria; corresponde uma única fracção parcial da forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, onde A e B são constantes a serem determinados.

Actividades

Actividades

1. Calcule $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$

Considere a fracção própria

$$\frac{x+1}{x^3-x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$ fazendo m.m.c teremos:

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$
$$x+1=(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A$$

O método geral, consiste na resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=1 \\ -6A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{6} \\ B=\frac{3}{10} \\ C=-\frac{2}{15} \end{cases}$$

2. Calcule $\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

Consideremos a fracção própria

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$, Então:

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

$$\text{para } x=-1 \Rightarrow -3+5=A(-1-1)^2+B(-1+1)(-1-1)+C(-1+1) \Rightarrow A$$

$$\text{para } x=1 \quad \Rightarrow \quad 3+5=A(1-1)^2+B(1+1)(1-1)+C(1+1) \Rightarrow C=4$$

Para determinar a outra constante usamos qualquer outro valor de x, por exemplo *x=0*

$$x=0 \Rightarrow 0+5 = A(0\text{-}1)^2 + B(0+1)(0+1) + C(0+1) \Rightarrow A\text{-}B+C$$ Logo:

$$\frac{1}{2} - B + 4 = 5 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Avaliação

Avaliação

1. Calcule $\int \frac{(x^3+x^2+x+3)dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$

Resolução

Consideremos fracção própria $\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

Portanto: $x^3+x^2+x+3 = (Ax+B)(x^2+3) + (Cx+D)(x^2+1)$, ou seja:

$$x^3+x^2+x+3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (3A+C)x + 3B + D,$$

Então: $\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+C=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} B+D=1 \\ 3B+D=3 \end{cases}$ Logo A=0, C=1, B=1 e D=0.

$$\int \frac{(x^3+x^2+x+3)dx}{(x^2+1)(x^2+3)} =$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+3} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{x^2+3} = \text{arctg}x + \ln\sqrt{x^2+3} + C$$

Caro estudante, agora vai entrar numa outra área bastante interessante a lógica Bivalente

Lição 5

Noções básicas da Lógica Bivalente

Introdução

O Cálculo Proposicional, capítulo da Lógica Formal moderna, é uma Ciência que trata das proposições tomadas como um todo e consideradas independentemente dos seus conteúdos/matéria.

Cada proposição é, por isso e para efeitos de cálculo, simbolizada convencionalmente por uma letra minúscula (**p, q, r, s**, etc.), embora ao nível do nosso trabalho pessoal seja conveniente utilizarmos uma letra que nos remeta directamente para o seu conteúdo. Estes símbolos denominam-se variáveis proposicionais, porque podem simbolizar um qualquer conteúdo, por concretizar. Isto significa que, por exemplo, querendo simbolizar a proposição 'O João está a estudar,' escolhendo uma variável que me remeta para o conteúdo da proposição, posso simbolizá-la por **j** (j: O João está a estudar.) ou, então, por uma letra qualquer.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Definir* o que é um termo , designação e proposições.
- *Simplificar* expressoes e calcular o valor logico de uma expressao.

Objectivos

Noções básicas da Lógica Bivalente

Designações e proposições

Vamos considerer a seguinte situação:

Dadas as expressões :

- 2000

- Maputo
- Cidade de Maputo e capital de Moçambique
- Cuba e um pais africano

Podemos afirmar que a terceira e verdadeira e a quarta e falsa . Acerca das duas primeiras não faz sentido pronunciarmo-nos se são verdadeiras ou falsas por isso são chamadas **designações,** as outras duas são chamadas **proposições.**

portanto:

1. **Designações, termos** ou **nomes** são expressões que representam os seres existentes

2. **Proposições** são expressões acerca das quais faz sentido afirmar se são verdadeiras ou falsas.

Uma proposição verdadeira tem o valor lógico **verdade** que em matemática simboliza-se por **V** ou **1(um)**.Uma proposição falsa tem o valor lógico **falsidade** que se simboliza por **F** ou 0 (zero).

Observe que em algumas ocasiões podemos encontrar frases que não são proposições.

As frases "O verde é uma cor bonita " ou " Maputo é uma cidade grande", não são consideradas proposições .

Para que sejam proposições devem satisfazer os seguintes princípios:

- **Principio da não contradição** uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa

- **Principio do terceiro excluído** uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Equivalência de designações e de proposições

Definição

Designações equivalentes ou sinónimas são aquelas que designam o

mesmo ser.

Exemplo

1. 2+1 e 5-2
2. A Cidade de Maputo é Capital de Moçambique

Ou seja 2+1=3 e 5-2=3 por outro lado cidade de Maputo=Capital de Moc.

Definição:

Proposições equivalentes são as que tem o mesmo valor lógico.

Exemplos de proposições equivalente:

2>3 e 1+1=5 (ambas falsas)

2 <3 e 1+1=2 (ambas verdadeiras)

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- **Designações, termos** ou **nomes** são expressões que representam os seres existentes
- **Proposições** são expressões acerca das quais faz sentido afirmar se são verdadeiras ou falsas.
- **Principio da não contradição** uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa
- **Principio do terceiro excluído** uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.
- **Designações equivalentes ou sinónimas** são aquelas que designam o mesmo ser.
- **Proposições equivalentes** são aquelas que têm o mesmo valor lógico.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Classifique cada uma das expressões seguintes em designação ou proposição e , no caso das proposições , indique o seu valor:

Michael Jacckson é **uma designação**

The Beatles era um grupo musical Escocês **é uma proposição falsa**

Musica clássica é **uma designação**

Michael Jckson é um cantor americano_**é uma proposição verdadeira**

Beethoven compôs musica clássica; americano_**é uma proposição verdadeira**

Fanny Pfumo foi cantor rock;_**é uma proposição falsa**

Fado de Coimbra **é uma designação**

2. Indique , justificando ,o valor lógico de cada uma das proposições :

a) Se 1kg de carne custa 120mts, 1,5kg de carne custa 180mts **é uma proposição falsa**

b) Se 10 litros de gasolina super custam 250mts , cada litro custa 25mts; **é uma proposição verdadeira**

c) Se na compra de umas com o preço de 770mts me fizeram um desconto de 10%, então eu paguei pelas calcas 700mts; **é uma proposição verdadeira**

d) definir uma proposição verdadeira através da relação "=";

4=6-2

e) Uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa **é uma proposição falsa (contradição com o princípio do terceiro excluído)**

;

f) Uma proposição pode ser verdadeira para uns e falsa para outros;

é uma proposição verdadeira

3. Distinga nas eguintes expressões, designações das proposições:

   a) 6 + 24 **é <u>uma designação</u>**

   b) 6 + 24 = 30 **<u>é uma proposição verdadeira</u>**

   c) $\sqrt{7} > 7$ **<u>é uma proposição falsa</u>**

   d) 6 + 24 = 30 **<u>é uma proposição verdadeira</u>**

   e) $\{1,2,3\}$ **é uma designação**

   f) $4 \notin \{1,2,3\}$ **é uma proposição verdadeira**

4. São verdadeiras ou falsas as seguintes proposições?

   a) 3 + 2 = 2 + 3 **é uma proposição verdadeira**

   b) $4 \neq \frac{8}{2}$ **é uma proposição falsa**

   c) $\sqrt{7} < 7$ **é uma proposição verdadeira**

Avaliação

Avaliação

1. Escreva uma designação ou proposição equivalente para cada uma das expressões dadas

   a) 11+7

   b) -11+7

   c) -11-7

   d) (-2)4

   e) 3 + 2 = 2 + 3

2. Qual é o valor lógico das seguintes proposições

   a) Uma designação pode ser verdadeira ou falsa;

   b) Duas proposições equivalentes são ambas verdadeiras ou ambas falsas;

   c) A partir de duas designações numéricas equivalentes podemos definir uma proposição verdadeira através da relação “=”;

   d) Uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa;

   e) Uma proposição pode ser verdadeira para uns e falsa

   f) $4 \neq \frac{8}{2}$

   c) $\sqrt{7} < 7$

Agora compare as suas resoluções com as constantes no fim do módulo ou dirija-se ao centro de recursos para assistência. Sucessos!

Lição 6

Operações Lógicas

Introdução

Segundo o princípio do terceiro excluído toda a proposição simples pé verdade ou falsa isto é, 'tem o valor lógico v(verdade) ou valor lógico f(falso). Numa proposição composta, a determinação do seu valor lógico é feito segundo o princípio "o valor lógico de qualquer proposiçào composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes" ficando por eles unicamente determinados.

Para aplicar este princípio na prática, recorre-se ao uso de um em função do dispositivo denominado **tabela de verdade,** que apresenta todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondentes a todos a todas possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples correspondentes.

O número de linhas da tabela de verdade de uma proposição composta está em função do número de proposições simples que a compoem.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Fazer* as operações de Negação, conjunção, disjunção, mplicação e equivalência com proposições.
- *Construir* tabela de verdade.

Intrdução a Lógica Bivalente

Operações lógicas

Negação (~)

p: Paulina Chiziane escreveu "O Sétimo Juramento".

A negação desta proposição é uma nova proposição que se representa por "~ **p**" e se lê: não é verdade que p ou simplesmente: não p.

Assim:

~ p : não é verdadeque Paulina Chiziane escreveu " O Sétimo Juramento".

EM linguagem corrente também se diz:

~ p : Paulina Chiziane não escreveu "O Sétimo Juramento".

Definição – A negação de uma proposição é uma nova proposição ~p, que se obtem da anterior antepondo-lhe as palavras "não é verdae que" e que é verdadeira se p é falsa e falsa se p é verdadeira.

Exemplo 1:

q : Eu estudo Matemática.

~ q : Não é verdade que eu estudo Matemática.

Exemplo 2:

p : 5 + 5x3 = 30.

~p : Não é verdade que 5 + 5x3 = 30 ou ~ p: 5 + 5x3 $\neq$ 30.

Quando p e q são simultâneamente verdadeiras e é falsa nos outros casos

Para determinar o valor lógico da negação de uma proposição a partir do valor lógico desta, pode-se utilizar uma tabela que se chama tabela de verdade:

p	~ p
V	F
F	V

Assim, ~ V = F e ~ F = V

Conjunção ($\wedge$)

Consideremos as proposições que se segum:

p : A Iris veste calças azúis.

q : A Iris veste blusa azul.

A conjunção destas proposições é a proposição "p e q", que simbolicamente se representa por "p $\wedge$ q".

$p \wedge q$: A Iris veste calças azúzis e a Iris veste blusa azul.

Definição – *A conjunção de duas proposições p e q, é uma nova proposição que resulta da ligação de p e q pelo símbolo $\wedge$ (lê – se : e).*

Esta nova proposição ($p \wedge q$) é verdadeira quando p e q são simultâneamente verdadeiras e é falsa nos outros casos.

Exemplo 1:

$p : 3 + 2 = 5$, $q : 6 + 2 > 6$

$p \wedge q : 3 + 2 = 5 \wedge$ $q : 6 + 2 > 6$

Como p e q são proposições verdadeiras também $p \wedge q$ também é uma proposição verdadeira.

Exemplo 2:

s : 3 é um número primo (V)

t : 3 é um número par (F)

$s \wedge t$: 3 é um número primo $\wedge$ 3 é um número par

Com t é falsa, também $s \wedge t$ é falsa.

Pode-se definir a conjunção entre valores lógicos por uma tabela de verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção ($\vee$)

Definição - *A disjunção de duas proposições p e q, é uma nova proposição que resulta de ligar p e q pelo símbolo "$\vee$" (lê – se: ou com sentido inclusivo).*

Esta nova proposição que resulta de ligar p e q pelosímbolo ($p \vee q$) é verdadeira em todos os casos excepto quando p e q são simultâneamente falsas.

Exemplo 1:

p : vou comprar um casaco

q : vou comprar um blusão

$p \vee q$: vou comprar um casaco ou vou comprar um blusão (ou as duas coisas)

Exmplo 2:

$p : 2 + 1 = 3$ (V)

$q : 4 + 1 = 5$ (V)

$p \vee q : 2 + 1 = 3 \vee 4 + 1 = 5$

A disjunção pode ser definida por uma tabela de verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação ($\Rightarrow$)

Consideremos duas proposições:

p : Lúcia é maior de 18 anos

q : Lúcia tem direito a voto

Ligando estas duas proposições pelas palavras "se ... então ..." , obtemos uma proposição se p então q e que se representa por "$p \Rightarrow q$" (lê-se: p implica q).

À proposição p chama-se antecedente e à proposição q consequente.

Definição – Dadas as proposições p e q chama – se implicação de p e q a uma nova proposição que resulta de ligar as duas proposições pelo símbolo $\Rightarrow$ (lê – se: implica ou se p então q) e que só é falsa se p é verdadeira e q falsa.

A implicação pode definir-se por uma tabela de verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Equivalência ($\Leftrightarrow$)

Definição – A equivalência de duas proposições p e q é uma nova proposição que resulta de ligar p e q pelo símbolo $\Leftrightarrow$ (que se lê: se e só se ou é equivalente a).

Esta nova proposição "p $\Leftrightarrow$ q" é verdadeira se p e q têm o mesmo valor lógico e falsa se têm valores lógicos diferentes.

Exemplo 1:

p : 2 + 3 x 5 = 25 (F)

q : 3 x 5 = 15 (V)

p $\Leftrightarrow$ q : 2 + 3 x 5 = 25 $\Leftrightarrow$ 3 x 5 = 15 (F)

Como p é falsa e q é verdadeira, p $\Leftrightarrow$ q é falsa.

Exemplo 2:

s : 4 + (2 + 3) = 10 (F)

t : 2 + 3 = 6 (F)

$p \Leftrightarrow q$: 4 + (2 + 3) = 10 $\Leftrightarrow$ 2 + 3 = 6 (V)

Apesar de s e t serem falsas, $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

A equivalência pode definir – se por uma tabela de verdade.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Que passos a seguir para construir uma Tabela de Verdade?

1º. Abstraímos de todas as qualidades das proposições menos a propriedade de serem **verdadeiras ou falsas**.

2º. Averiguamos o número de proposições atómicas em que se decompõe o enunciado molecular.

3º. Calculamos o número de linhas que vão ser necessárias para elaborar uma Tabela de Verdade.

Para fazer este cálculo realiza-se a seguinte operação: na base coloca-se o nº de valores lógicos possíveis: como aqui estamos a estudar a lógica bivalente, temos apenas dois valores lógicos: Falsidade e Verdade; e como expoente desse número coloca-se o número de proposições consideradas isoladamente, isto é, sem contar as respectivas repetições. Assim, se a proposição tiver dois átomos, temos 22 = 4 linhas.

A quantidade de valores lógicos elevado ao número de proposições atómicas (2^n) estabelece o número de linhas que possuirá cada uma das colunas da Tabela de Verdade.

Exemplo:

$p \wedge q$ é um enunciado com dois átomos: as proposições atómicas **p** e **q**. Logo 2^2 = 4 linhas em cada uma das colunas seguintes: a coluna do enunciado atómico **p**; a coluna do enunciado atómico **q;** e a coluna da proposição total.

Exemplo:

$(p \wedge q) \vee r$ é um enunciado molecular com três átomos: **p, q, r.**
Logo 2^3 = **8 linhas** em cada uma das colunas da respectiva Tabela de Verdade

4º Apesar de ser usual outro processo, de carácter analítico, nós preferimos um outro de carácter sintético.
Suponhamos que o nosso enunciado tem apenas dois átomos:

E como ordenar os valores lógicos na situação coluna-linha? A melhor maneira de ordenar os valores **Fe V** em cada linha por coluna, cobrindo todas as hipóteses, é, com simplicidade e eficácia, a seguinte:
Se houver dois enunciados atómicos ($2^2 = 4$):

V V
V F
F V
F F

Repare-se que a sequência de V e F é a seguinte: na primeira coluna dois a dois e na segunda coluna um a um.

Assim, no nosso exemplo, elaboramos a seguinte Tabela:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Agora, calculamos o resultado das operações lógicas em jogo, neste caso aplicamos a definição da conjunção.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

E se a expressão lógica fosse mais complexa como, por exemplo, esta?

$\sim(p\wedge\sim q)\wedge(r\wedge p)$

Como ordenar os valores lógicos na situação coluna-linha? A melhor maneira de ordenar os valores **F** e **V** em cada linha por coluna, cobrindo todas as hipóteses para três enunciados atómicos o **que significa ($2^3 = 8$),** é com simplicidade eficácia, é a seguinte:

V V V
V V F
V F V
V F F
F V V
F V F
F F V
F F F

Repare-se que a sequência de V e F é a seguinte: na primeira coluna quatro a quatro, na segunda dois a dois e na terceira um a um. **Se houvesse quatro enunciados atómicos (2^4= 1**6), teríamos na primeira coluna oito a oito, na segunda quatro a quatro, na terceira dois a dois e na quarta um a um.

... e assim sucessivamente.

Elaboremos a Tabela e, para o efeito, considera-se o seguinte*:*

1. preencher a tabela cobrindo todas as hipóteses para três enunciados atómicos o que significa (23 = 8) e a seguir ira proceder conforme a ordem de prioridade dos conectores

p	q	r	$\sim q$	$p\Lambda\sim q$	$\sim(p\Lambda\sim q)$	$(r\wedge p)$	$\sim(p\Lambda\sim q)\Lambda(r\Lambda p)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	F

2. **Resolvem-se** as proposições negadas caso existam. No nosso caso, temos **~ q**

3. **Se houver parêntesis** - parêntesis curvos, rectos (ou duplos curvos), etc. - **temos que começar pela resolução de cada um dos parêntesis curvos**, um por um, e só depois é que resolvemos os parêntesis rectos (ou duplo curvos). No nosso exemplo, temos dois parêntesis curvos a resolver:

4. **Se houver parêntesis** negados, deve fazer-se a respectiva operação lógica. A negação do parêntesis é o resultado final desse parêntesis.No nosso exemplo, o primeiro parêntesis está negado:

5. **Temos que descobrir o conectivo principal**, pois é sobre ele que irá recair a última operação lógica. No nosso caso, o conectivo principal é o conectivo que liga os parêntesis.

$$\sim(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge p)$$

(Neste caso o conectivo principal está entre os parênteses é a conjunção).

Como o conectivo principal é aquele que, depois de resolvido todo o género de parêntesis, 'sobra', é necessário:

a) Combinar o resultado obtido no parêntesis curvo com a outra parte do enunciado se não houver mais nenhum parêntesis a resolver

b) Combinar o resultado obtido no parêntesis com o resultado do outro parêntesis, se fôr o caso. No nosso exemplo, a solução está na combinação da coluna da negação do primeiro parêntesis com a solução presente no segundo parêntesis. Nota: Resolvem-se todos os parêntesis curvos, parêntesis rectos e outros, em sequência igual à da matemática.

A solução, combinando neste exemplo a a sexta coluna com a sétima, está na oitava coluna.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A **negação** de uma proposição **p** é um proposição **~p** , que se obtêm da anterior antepondo –lhe as palavras não é verdade que e que é falsa se p é verdadeira e verdadeira se p é falsa

- A conjunção de proposições p e q, é uma nova proposição que resulta da ligação p e q pelo símbolo $\wedge$ (lê-se "e") e que só é verdadeira quando p e q forem verdadeiras

- Implicação de proposições p e q, é uma nova proposição que resulta da ligação p e q pelo símbolo $\Rightarrow$ e que só é falsa se p for verdadeira e q falsa.

- Equivalência deduas proposições p e q, é uma nova proposição que resulta da ligação p e q pelo símbolo $\Leftrightarrow$ e que só é verdadeira quando ambas proposiçoes tiverem o mesmo valor lógico

- seguir para construir uma Tabela de Verdade

1º. Abstraímos de todas as qualidades das proposições menos a propriedade de serem **verdadeiras ou falsas**.

2º. Averiguamos o número de proposições atómicas em que se decompõe o enunciado molecular.

3º. Calculamos o número de linhas que vão ser necessárias para elaborar uma Tabela de Verdade.

- A quantidade de valores lógicos elevado ao número de proposições atómicas (2^n) estabelece o número de linhas que possuirá cada uma das colunas da Tabela de Verdade.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Escreva em linguagem corrente cada uma das proposições seguintes e indique o seu valor lógico:

   a) $\sim p$; **não p**

   b) $p \wedge q$ **conjunção entre p e q**

   c) $\sim p \wedge q$ **conjunção não p e q**

   d) $p \Leftrightarrow q$ **equivalência de p e q**

   e) $\sim p \Rightarrow q$ **não p implica q**

   f) $p \Rightarrow q$ **p implica q**

   g) $p \Leftrightarrow \sim q$ **equivalência de p e não q**

2. Indique o valor lógico e escreva a negação de cada uma das proposições:

a) $10 \div 0{,}1 = 100$	**falsa;**	$\sim (10 \div 0{,}1) = 100$
b) $-4 < -3$	**verdade;**	$\sim (-4 < -3)$
c) $7 < -1$	**falsa;**	$\sim (7 < -1)$
d) $100 \times 0{,}1 \neq 10$;	**falsa ;**	$\sim (100 \times 0{,}1 \neq 10)$
e) $-3 \leq 0$	**falsa;**	$\sim (-3 \leq 0)$
f) $5 \geq 0$	**verdade;**	$\sim (5 \geq 0)$

3. Considere as proposições seguintes:

   P: o Bernardino foi ao futebol;

   Q: a Mariamo foi ao cinema ;

   R : o Dino foi ao cinema .

   Traduza em linguagem corrente:

   a) $\sim p$ não é verdade que Bernardino foi ao futebol
   b) $p \wedge q$ O Bernardino e a Mariamo foram ao cinema e ao cinema
   c) $p \wedge r$ o Bernardino e o Dino foram ao futebol e ao cinema
   d) $q \wedge r$ o Bernardino e o Dino foram ao futebol e ao cinema
   e) $\sim p \wedge q$ não é verdade que o Bernardino ao futebol e a Mariamo foi ao cinema
   f) $\sim p \wedge \sim r$ o Bernardino e o Dino não foram ao futebol nem ao cinema
   g) $\sim q \wedge \sim r$ O Dino e a Mariamo não foram ao cinema

4. Sejam p,q e r as proposições seguintes:

   P: o Filipe estuda Arquitectura;

   Q: o Filipe estuda Economia;

   R : o Filipe estuda o Matematica

   Traduza em linguagem simbólica

   a) o Filipe não estuda Matematica ; $\boldsymbol{\sim r}$
   b) não e verdade que o Filipe estuda Economia $\boldsymbol{\sim q}$
   c) o Filipe estuda Arquitectura e Economia; $\mathbf{p \wedge q}$
   d) o Filipe estuda Economia mas não estuda Matematica $\mathbf{q \wedge \sim r}$
   e) o Filipe não estuda Matematica nem Economia $\boldsymbol{\sim r \wedge \sim q}$

5 . Considere as proposições :

$$a : \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$$
$$b : \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

Indique o valor lógico de cada uma das proposições:

a) a ; verdadeira

b) ~b verdadeira

c) a ∧ b falsa

d) ~a ∧ b falsa

e) a ∧ ~b verdade

f) ~a ∧ ~b falsa

Use tabelas de verdade para demonstrar que são verdadeiras a proposições seguintes, em que “p” e “q” designam qualquer dos valores lógicos V, F.

a) p ∨ q = q ∨ p=p

P	q	p ∧q	q ∧ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

b) p ∧ q = q ∧ p

P	q	q ∨ p	p∨q
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Avaliação

Avaliação

1. Sendo p uma proposição falsa , indique o valor de:

   a) $p \wedge q$ b) $\sim(F \wedge p)$ c) $\sim F \wedge \sim p$ d) $p \vee q$

   em que q é uma proposição qualquer.

2. A Sr.Otilia foi ao supermercado onde comprou 2,5 kg de carne ao preço de 130mts o kg e 18 ovos ao preço de 300mts a dúzia .

Indique o valor lógico da proposição : “A Sr. Otilia gastou mais do que 3000 mts na compra de carne e menos do que 400mts na compra dos ovos.”

3. Indique o valor lógico de cada uma das proposições :

$$a)\ 2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

$$b)\ \frac{3}{2} < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} > 1$$

$$c)\ \frac{3}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} > 1$$

$$d)\ 3 > 2 \Rightarrow -3 > -2$$

$$e)\ \left(\frac{4}{3} > 1 \wedge \frac{2}{3} > 1\right) \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3} > 1$$

$$f)\ \square\left(\frac{2}{3} > 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} > 1 \vee \frac{3}{2} > 1\right)$$

4. Sejam p,q,r as proposições seguintes:

   p: o João tem mais do que 18 anos ;

   q : o João tem carta de condução;

   r: o João e eleitor

Escreva em linguagem simbólica cada uma das afirmações :

Agora compare as suas resoluções com as constantes no fim do módulo ou dirija-se ao centro

Lição 7

Propriedade das operações lógicas

Introdução

Quando realizamos operações lógicas precisamos de ter em conta as propriedades que regem esssas operações.Nesta lição vamo-nos deter a identifica-las bem como a aplica-las.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Identificar* as propriedaes das operações.
- *Aplicar* as propridades das operações lógicas na resolução de exercicios.

Propriedades das operações lógicas

Propriedades da Conjunção e da Disjunção

Supondo que p, q e r designam qualquer dos valores lógicos V e F, é posssível concluir directamente da definição as seguintes propriedades:

Propriedades	Conjunção	Disjunção
Comutativa	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
Existência de elemento neutro	$p \wedge v = v \wedge p = p$ "v" é o elemento neutro	$p \vee f = f \vee p = p$ "f" é o elemento neutro
Existência de elemento absorvente	$p \wedge f = f \wedge p = p$ "f" é o elemento absorvente	$p \vee v = v \vee p = v$ "v" é o elemento absorvente

Por exemplo: preencha a tabela

p	q	p ∧ q	q ∧ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Para facilitar o processo de determinação do valor lógico de proposições existem propriedades das operações lógicas que podem ser deduzidas mas, nesta lição vamos

apenas aplicar essas propriedades nas operações lógicas que serão o nosso prato forte. a saber:

1ª) propriedade

Negação da negação

$$\sim(\sim p) = p$$

2ª)propriedade

leis de Morgan

1ª Lei de Morgan	$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
2ª Lei de Morgan	$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

3ª)propriedade

Negação de equivalência

$$\sim(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

4ª)propriedade

Implicação

$$\boxed{p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

Resumindo numa tabela para facilitar a fixação

Propriedades	Implicação	Negação	Equivalência
Dupla negação		$\sim\sim p = p$	
1ª Lei de Morgan		$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$	
2ª Lei de Morgan		$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$	
Negação de equivalência			$\sim(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
Implicaçã	$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$		

Existe uma relação entre conjuntos e condições na lógica bivalente. O factor importante de ligação é a validade das propriedades para as operações. Senão vejamos:

Expressões designatorias e condições

Expressão designatoria é uma expressão com variáveis que se transforma numa designação quando as variáveis são substituídas por constante.

Expressão proposicional ou condição é uma expressão com variáveis que se transforma numa proposição quando as variáveis são substituídas por constante.

Dadas as expressões

$2x$ e $2x=5$

Para $x=3$ teremos:

$2x \to x=3 \to 6$ (designação) $2x=5 \to x=3 \to 6=5$ (proposição)

↓ ↓

(exp.designatoria) (condição)

Como se pode ver a primeira expressão é uma designacao pois para $x=3$ designa um numero.A segunda é uma proposicao porque para $x=3$ a expressão tansforma- se numa condição falsa.

Classificações das condições num dado universo

$$\textbf{condições} \Rightarrow \begin{cases} possiveis\ (2x=6) & \begin{cases} nao\,universais\,(2x=6) \\ universais\,(x^2 \geq 0) \end{cases} \\ \\ impossiveis\,(x^2 < 0) \end{cases}$$

- **Universal** quando qualquer concretização das variáveis a transforma numa proposição verdadeira
- **Impossível** quando qualquer concretização das variáveis a transforma numa proposição falsa.
- **Possível** quando não e impossível

Conjunto definido por uma condição

- A condição x+1=4 define em R, o conjunto { 4 }
- A condição x = 9 define , em R o conjunto {-3,3 }
- A condição x>3 define , em R, o conjunto $]3,+\infty[$

O conjunto definido pela condição p(x) é o conjunto dos valores do universo que são solução da condição.

- A condição $x^2 \geq 0$ define o conjunto □
- A condição $x^2 < 0$ define o conjunto $\varnothing$

Operações com condições e a sua tradução em termos de conjuntos

No universo U ,dos alunos de uma Escola , considerem-se as condições :

$p(x)$: x estuda estatística

$q(x)$: x estuda inglês

Seja p o conjunto dos alunos que verificam $p(x)$ e Q o conjunto dos alunos que verificam $q(x)$

Conjunção de condições e interseccao de conjunto

Condições	$p(x)$	$\wedge$	$q(x)$
Conjuntos	P	$\cap$	Q

A conjunção de condições e reunião de conjuntos

Condições	$p(x)$	$\vee$	$q(x)$
Conjuntos	**P**	$\cup$	**q**

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Para efectuar as operações lógicas basta ser capaz de construir as tabelas de verdade, aplicar as propriedades das proposições, bem como as das operações lógicas acima resumidas nas tabelas que estão resumidas em tabelas para facilitar a fixação. Desde já fica sabendo que as leis de Morgan serão muito utilizadas na simplificação das expressões na lógica bivalente:

1) **Comutativa** $p \wedge q = q \wedge p$ e $p \vee q = q \vee p$

2) **Associativa** $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

   i. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

3) **Existência de elemento neutron**

   $p \wedge v = v \wedge p = p$ "v" é o elemento neutro

   $p \vee f = f \vee p = p$ "f" é o elemento neutro

4) **Existência de elemento absorvente**

   $p \wedge f = f \wedge p = p$ "f" é o elemento absorvente

   $p \vee v = v \vee p = v$ "v" é o elemento absorvente

5) **leis de Morgan**

Propriedades	Implicação	Negação	Equivalência
Dupla negação		$\sim\sim p = p$	
1ª Lei de Morgan		$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$	
2ª Lei de Morgan		$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$	
Negação de equivalência			$\sim(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
Implicaçã	$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$		

Conjunção de condições e interseccao de conjunto

Condições	$p(x)$	$\wedge$	$q(x)$
Conjuntos	P	$\cap$	Q

A conjunção de condições e reunião de conjuntos

Condições	$p(x)$	$\vee$	$q(x)$
Conjuntos	**P**	$\cup$	**q**

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Use tabelas de verdade para demonstrar que são verdadeiras a proposições seguintes, em que "p" e "q" designam qualquer dos valores lógicos V, F.

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

resolução

p	q	~ p	~ q	(p ∧ q)	~ (p ∧ q)	(~ p ∨ ~ q)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Muito simples, você acertou pois:

1º. aplicou o princípio de não excluído para preencher as primeiras duas colunas e como tem 2 proposições então tem 4 linhas porque

"A quantidade de valores lógicos elevado ao número de proposições atómicas (2^n) estabelece o número de linhas que possuirá cada uma das colunas da Tabela de Verdade".

2º. **preencheu** as proposições negadas ~ p e ~ q.

3º. **resolveu os parêntesis curvos**, um por um

4º. **resolveu** a negação do parêntesis

5º. **comparando** as duas últimas concluiu que elas têm o mesmo resultado, o que significa está demonstrada a equivalência pois o conectivo principal é ⇔,

2. Sendo p,q,r três proposições , identifique a propriedade ou propriedades que foram utilizadas:

$a)\ p \wedge q = q \wedge p$

$b)\ p \vee V = V$

$c)\ q \wedge V = q$

$d)\ (q \vee r) \vee p = q \vee (r \vee p)$

$e)\ p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$f)\ (p \wedge q) \wedge F = p \wedge (q \wedge F) = p \wedge F = F$

Resolução

$a)\ p \wedge q = q \wedge p$	comutatividade
$b)\ p \vee V = V$	elemento absorvente da disjuncao
$c)\ q \wedge V = q$	elemento neutro da conjuncao
$d)\ (q \vee r) \vee p = q \vee (r \vee p)$	associatividade
$e)\ p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distribuitividade da disjuncao em relacao a conjuncao
$f)\ (p \wedge q) \wedge F = p \wedge (q \wedge F) = p \wedge F = F$	associatividade e elemento absorvente

Avaliação

Avaliação

1. Use tabelas de verdade para demonstrar que são verdadeiras a proposições seguintes, em que "p" e "q" designam qualquer dos valores lógicos V, F.

   a) $p \vee q = q \vee p = p$ **b)** $p \wedge v = v \wedge p = p$ **c)** $\sim (a \vee b) \Leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b)$

2. Demosntre que a disjunção é distributiva em relação a conjunção por meio de uma tabela de verdade.

3. Determine o valor lógico de p , sabendo que :

   a) $\sim p \Rightarrow p = V$
   b) $(p \wedge F) \Leftrightarrow p = V$
   c) $(p \vee F) \Rightarrow \sim p = F$
   d) $(\sim p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee F) = V$
   e) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim q = F$

4. O Sr. Langa , que reside no B. da Liberdade ,tomava todos os dias o chapa com destino a cidade de Maputo,onde iniciava o trabalho as 9 horas . Para tal, apanhava o chapa das 8h com chegada a cidade de Maputo prevista para 8hors e 50mn.Depois de sair do chapa o Sr. Langa não demora mais do que 10mn a chegar ao serviço.

Verifique se e verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações ;

   a) se o chapa chega na cidade as 9 o, o Sr. langa chega atrasado ao serviço;

   b) se o Sr.ª Langa e pontual no serviço, o chapa chegou depois das 9h.

5. Mostre , utilizando tabelas de verdade , que:

   $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q) = p\ q$

Caro estudante, agora vai entrar numa outra área bastante interessante mas vai exigir de si cada vez mais responsabilidade. Você terá que treinar muito a sua mente para maior capacidade de abstração. Vamos falar da análise combinatória.

Lição 8

Análise Combinatória

Introdução

A necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos ou técnicas de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Mais tarde por franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).
A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indirecta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Objectivos

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Resolver* problemas aplicando o cálculo do factorial de um número natural **n**
- *Calcular* o factorial de um número natural
- *Calcular* a permutação de n elementos

Análise Combinatória

Factorial de um número natural n

Para melhor compreender o conceito, vamos considerar o seguinte problema

Problema

Numa prova de 100 metros onde participam cinco concorrentes. De quantas maneiras diferentes pode ficar a classificação destes sem que haja empate.

Você é muito inteligente, pode ver com facilidade que precisaria de muito tempo para chegar a solução, pois a contagem não seria fácil neste caso.

Portanto, e necessário ter alguma técnica especial

Qual será?

Fácil, como temos cinco concorrentes, existem 5 possibilidades para os concorrentes ocuparem o primeiro lugar, 4 para o segundo lugar, 3 para o terceiro lugar , duas para o segundo e para o quinto lugar já não há escolha.

Para obter o numero total de possibilidades de realizar a classificação, será o produto das p possibilidades de realizar a classificação sem que haja empate.

Portanto 5.4.3.2.1= 60

Estamos perante um produto de factores sucessivos desde o numero cinco até a lição.

A este produto chama -se factorial de 5 ou 5 factorial e designa se por 5!

Em geral definimos n! Como:

Definição

Seja <u>n</u> um número inteiro não negativo. Definimos o factorial de <u>**n**</u> (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots .4.3.2.1$ para $n \geq 2$

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) observe que 6! = 6.5.4!
d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
e) 10! = 10.9.8.7.6.5!
f) 10! = 10.9.8!

para resolver o problema proposto acima temos que encontrar todas as formas possíveis de ordenar os 5 elementos ou contar o número total de sequências que se podem formar com 5 elementos trocando-se ou permutando-se entre si. A este tipo de sequência chama-se **permutação de 5 elementos** e representa-se por:

P_5 - número de permutações de 5

Logo pode se concluir que $\boxed{P_5 = 5!}$

generalizando:

Teremos na análise combinatório o Princípio fundamental da contagem – PFC que mostra que:

Se um determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por: $T = k_1 . k_2 . k_3 . \dots . k_n$

o que nos permite definir a permutação de n elementos:

Definição

O produto de n factores inteiros sucessivos desde um certo número até a lição chama-se factorial de n e designa se por n! Ou permutação de n elementos e designa-se por p_n .

E tem-se $p_n = n!$

Note que $\boxed{0! = 1}$ por convenção

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco rectangular de cinco lugares.

P5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120

Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:
REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O produto de n factores inteiros sucessivos desde um certo número até a lição chama- se factorial de n Ou permutação p_n . E tem-se $p_n = n!$
- Seja <u>n</u> um número inteiro não negativo. Definimos o factorial de **<u>n</u>** (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

  $n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1$ para n □ 2.

  Para n = 0 , teremos : 0! = 1

  Para n = 1 , teremos : 1! = 1.

- **Se** um determinado acontecimento ocorre em <u>n</u> etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:
  $T = k_1 . k_2 . k_3 . ... . k_n$
- O produto de n factores inteiros sucessivos desde um certo número até a lição chama-se factorial de n e designa se por n! Ou permutação de n elementos e designa-se por p_n .
- $p_n = n!$ e $0! = 1$ por convenção

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Calcule o valor de:

   a) 7!

Claro, que você vai achar os produtos sem qualquer duvida

7.6.5.4.3.2.1= 5040

b) $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

$$c)\ 7!\ .\frac{3!}{5!}$$

$$7!\ .\frac{3!}{5!} = \frac{7!.3!}{5!} = \frac{7.6.5!3!}{5!} = 7.6.6 = 252$$

Isso mesmo, acertou pois, procurou desenvolver os factoriais por forma a obter factoriais iguais para depois fazer a simplificação

$$d)\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56 \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 56 \Leftrightarrow (n+1)n = 56 \Leftrightarrow n^2 + n - 5$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 225$$

$$\Leftrightarrow n_1 = 7 \vee n_2 = -8$$

neste caso, primeiro simplificamos factoriais iguais, o que nos conduziu à equação do segundo grau e, você já domina a resolução deste tipo de equações aplicando a fórmula resolvente.

A equação tem duas soluções, mas só é válida a solução positiva n = 7 porque é número natural segundo a definição de n factorial.

Avaliação

Avaliação

1. calcule o valor de:

   a) $\dfrac{3!+6!}{3!}$

   b) $\dfrac{16!}{2!.15!}$

   c) $p_5 - 3!$

2. compare as expressões (use <,> ou =)

   a) 3!---- 6

   b) 5! + 4! ---- 9!

3. Simplifique as seguintes expressões:

   a) $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

   b) $\dfrac{p_{n+1} - p_n}{n!}$

4. resolva a equação

   $$\frac{n!}{(n-2)!} = 110$$

5. De quantas maneiras podem-se ordenar 5 livros de matemática e 3 de biologia numa prateleira sem qualquer ordem especia

Agora compare as suas resoluções com as constantes no fim do módulo ou dirija-se ao centro de recursos para assistência. Sucessos!

Lição 9

Arranjos simples e Combinações simples

Introdução

Caro estudante, o conceito **n** factorial que viu na lição anterior, será o nosso prato mais forte para este capitulo, daqui para frente iremos nos basear neste conceito para definir os arranjos e combinações.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Calcular* o valor de arranjo simples.
- *Calcular* o valor de combinações simples.
- *Resolver* problemas aplicando arranjo simples
- *Resolver* problemas aplicando combinações simples

Arranjos simples e combinações simples

I. Arranjos simples ou arranjos sem repetição

Consideremos o problema

Problema

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Quantos grupos podem se formar com os elementos do conjunto dado, todos distintos, que diferem pela ordem e pela natureza.

Vamos desta vez, formar subconjuntos especiais com um elemento com dois e com três, portanto já não se trata de permutação de todos elementos duma só vez.

Para tal vamos aplicar os arranjos e escrevemos da seguinte forma:

- Primeiro tomando um a um elemento $\left| A_1^3 \right.$
- Segundo tomando dois a dois $\left| A_2^3 \right.$
- Terceiro três a três $\left| A_3^3 \right.$

Dizemos que temos arranjos de três elementos tomados um a um, arranjos de três elementos tomados dois a dois e por último arranjos de três elementos tomados três a três:

Calculando:

$$\left| \begin{array}{l} A_1^3 \\ A_2^3 = 3.2 = A_1^3.2 \\ A_3^3 = 3.3 = A_2^3..2 \end{array} \right.$$

Relacionando os três arranjos

$$\left| \begin{array}{l} A_1^3 \\ A_2^3 = 3.2 = A_1^3.2 \\ A_3^3 = 3.3 = A_2^3..2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1^3 \\ A_2^3 = A_1^3.(3-1) \\ A_3^3 = A_2^3(3-2) \end{array} \right.$$

Considerando um conjunto de n elementos vamos definir o arranjo de n elementos tomados p a p.

<u>**Definição**</u>

Arranjos simples de n elementos agrupados p a p e o número de grupos que se podem formar com P dos n objectos dados diferindo uns dos outros quer pela ordem quer pela natureza. E escreve-se A_p^n ou A_{n-p} e lê-se arranjos simples de n elementos agrupados p a p.

Dado o conjunto $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$

Relacionando os arranjos

Teremos:

$$\begin{array}{|l}
A_1^n \\
A_2^n = A_1^n(n-1) \\
A_3^n = A_2^n(n-2) \\
A_4^n = A_3^n(n-3) \\
--------- \\
A_p^n = A_{p-1}^n(n-p+1)
\end{array}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades

$$A_1^n.A_2^n A_3^n....A_p^n = n.A_1^n(n-1).A_2^n(n-2).A_3^n(n-3).....A_{(p-1)}^n(n-p+1)$$

Simplificando

$$A_p^n = n(n-1).(n-2).(n-3).....(n-p+1)$$

Portanto o numero de grupos que se podem formar com p dos n objectos dados e igual ao produto de p factores inteiros sucessivos desde n ate $(n-p+1)$.

Da definição de n! , temos $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...1$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-p+1)$$

E tendo em conta que $A_p^n = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-p+1)$

Podemos escrever que $A_p^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-p+1)}{(n-p)(n-p-1)}$

Ou seja

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{com } 0 \le p \le n \quad p, n \in N}$$

Note que: $\boxed{p = n \Rightarrow A_p^n = A_n^n = p_n = n!}$

Esta é a fórmula para o cálculo de arranjos simples

Exemplos

1. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

   Solução:

   As sequências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:
   10.9.8 = 720.
   Observe que 720 = A10,3

2. Calcule simplificando os factoriais iguais

   a) $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42$

   b) $\dfrac{5!+6!}{6!} = \dfrac{5!(6+1)}{6.5!} = \dfrac{7}{6}$

   c) $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

3. determine n de modo que (n-1)!n=24

   $n! = n(n-1)!$ por definição

   $24 = 4!$

   então $n! = 4! \Leftrightarrow n = 4$

4. resolva a equação

   $A_2^n = 30$

   $A_2^n = \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = 30$

   $n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0$

   $\Delta = 121$

   $n_1 = -5 \vee n_2 = 6$

Resposta: a solução é 6 pois é número natural segundo a definição

II- Combinações simples

Para definir as combinações simples, vamos nos basear na definição de arranjos em que formamos subconjuntos a partir dos elementos de um dado conjunto, sem ter em consideração a **ordem** mas sim a **natureza** desses elementos.

Consideremos o seguinte problema:

Problema

Numa turma de 20 alunos, pretende-se fazer uma lista de 3 alunos para chefe de turma. Quantas listas diferentes é possível fazer?

Resolução

Note que a lista pode ser feita de várias maneiras diferentes, mas será constituída pelos mesmos alunos, independentemente da ordem que os nomes vão ocupar na lista. Partindo de princípio de que temos vinte nomes diferentes. Deste modo dizemos que estamos perante **combinações simples de 20 alunos tomados 3 a 3. E escreve-se** C_3^{20} ou $^{20}C_3$.

Neste caso, sabe-se que o número de sequências dos três nomes considerando os 20 alunos é A_3^{20} e que cada subconjunto de três nomes dá origem a 3! De sequências diferentes.

Assim podemos escrever que $\boxed{A_3^{20} = C_3^{20}.3! \Leftrightarrow C_3^{20} = \frac{A_3^{20}}{3!}}$

Calculando o valor teremos:

$$C_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20.19.18.17!}{17!3!} = \frac{20.19.18}{3.2.1} = 10.19.6 = 190.6 = 1140$$

Resposta: é possível fazer 1140 listas diferentes

Generalizando teremos:

$$\boxed{C_p^n = A_p^n.p! = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad \text{com } 0 \le p \le n, \quad n, p \in N}$$

ou simplesmente

$$\boxed{C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad \text{com} \quad 0 \le p \le n, \qquad n,\ p \in N}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:
$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

O estudo das combinações rege-se pelas seguintes propriedades:

Propriedades 1

O número de combinações de **n, 0** a **0**, representa o número de subconjuntos com zero elementos escolhidos entre **n**, havendo apenas um conjunto com zero elementos que é o conjunto vazio.

O número de combinações de **n, n** a **n**, representa o número de subconjuntos com **n** elementos escolhidos entre n, havendo apenas um conjunto nessas condições que é o próprio conjunto.

$$\boxed{C_0^n = 1 \quad , \quad C_n^n = 1}$$

Você pode desenvolver as combinações dadas e comparar os resultados segundo a definição, para verificar esta propriedade. veja a seguir:

$$C_0^n = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{e} \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Propriedades 2

O número total de subconjuntos dum conjunto de **n** elementos é 2^n

$$\boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n \qquad , \forall\, n \in N_0}$$

Verificando

Consideremos um conjunto com 5 elementos $A = \{a, l, u, n, o\}$

Subconjunto vazio é 1

O número de subconjunto com 1 elemento é $C_1^5 = 5$

O número de subconjunto com 1 elemento é $C_2^5 = 10$

O número de subconjunto com 1 elemento é $C_3^5 = 10$

O número de subconjunto com 1 elemento é $C_4^5 = 5$

O número de subconjunto com 1 elemento é $C_5^5 = 1$

Adicionando as combinações : $1 + 2 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

Como pode ver 5 é o cardinal do conjunto dado A.

Assim: $C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_5^5 = 2^5$

Propriedades 3

$$\boxed{\text{para } p \leq n \ , \ p \in N_0 \qquad C_p^n = C_{n-p}^n}$$

Verificando:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad e \quad C_{n-p}^n = \frac{n!}{(n-(n-p))!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\text{logo} : C_p^n = C_{n-p}^n$$

$$\boxed{C_p^n = C_{n-p}^n}$$

Exemplo

$$c_3^{15} = c_{12}^{15} \Leftrightarrow \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15!}{(15-12)!12!} \Leftrightarrow \frac{15!}{12!3!} = \frac{15!}{3!12!} \Leftrightarrow \frac{15!}{12!3!} = \frac{15!}{12!3!}$$

pela definição de combinações chegamos a igualdade

Vamos agora resumir a nossa lição

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \text{com } 0 \le p \le n \quad p, n \in N}$$

Note que: $\boxed{p = n \Rightarrow A_p^n = A_n^n = p_n = n!}$

$$\boxed{C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \qquad \text{com } \; 0 \le p \le n, \qquad n, p \in N}$$

Aprendeu ainda as seguintes propriedades:

Propriedades 1

O número de combinações de **n, 0** a **0**, representa o número de subconjuntos com zero elementos escolhidos entre **n**, havendo apenas um conjunto com zero elementos que é o conjunto vazio.

O número de combinações de **n, n** a **n**, representa o número de subconjuntos com **n** elementos escolhidos entre n, havendo apenas um conjunto nessas condições que é o próprio conjunto.

$$\boxed{C_0^n = 1 \quad , \quad C_n^n = 1}$$

Propriedades 2

O número total de subconjuntos dum conjunto de **n** elementos é 2^n

$$\boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n \qquad , \forall\, n \in N_0}$$

Propriedades 3

$$\boxed{\text{para } \; p \le n \;,\; p \in N_0 \qquad C_p^n = C_{n-p}^n}$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. determine:

recorde das definições de arranjos e combinações que acbamos de ver, o resto vai ser pura aritmética

a) $\frac{A_3^5}{3!}$

$$\frac{A_3^5}{3!}=\frac{5!}{(5-3)!.3!}=\frac{5.4.3!}{2!.3!}=\frac{5.4}{2.1}=10$$

b) C_2^7

$$C_2^7=\frac{7!}{(7-2)!2!}=\frac{7.6.5!}{5!2!}=\frac{7.6}{2.1}=21$$

2. resolva

a) $C_2^n = 10$

$$\frac{n!}{(n-2)!\ 2!}=10$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = 10$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 10$$

$$n(n-1) = 20$$

$$n^2-n-20 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -4 \quad \vee \quad n_2 = 5$$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=12$

$$\frac{(n+1)(n+1-1)(n-1)!}{(n-1)!}=12$$

$$n(n+1)=12$$

$$n^2+n-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1=-4 \ \vee n_2=3$$

3. Para acompanhar a selecção nacional no campeonato de Àfrica é preciso formar-se uma equipa médica que integra dois médicos e três massagistas. Sabendo-se que estão disponíveis quatro médicos e

cinco massagistas, de quantas maneiras diferentes pode escolher-se a constituição da equipa médica?

4. A Sofia foi convidada para uma festa de aniversário para a qual quer levar dois presentes. Na loja, pré-seleccionou, como hipótese, quatro brinquedos diferentes e três livros também diferentes.

De quantas maneiras poderá ela fazer a escolha dos dois presentes se quiser levar:

a) Um brinquedo e um livro?

Calcula-se $C_1^4 . C_1^3 = \frac{4!}{3!} . \frac{3!}{2!} = \frac{4.3!}{2} = 2.3! = 2.6 = 12$

b) Dois brinquedos?

Calcula-se $C_2^4 . = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = \frac{12}{2} = 6$

c) Dois livros?

Calcula-se $C_2^3 = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3.2!}{2!} = 3$

d) Dois brinquedos ou dois livros

Calcula-se $C_2^4 + C_2^3 = 6+3=9$

e) Dois presentes quaisquer?

Calcula-se $C_2^7 = 21$

Agora tente resolver sozinho os exercícios que se seguem para melhor avaliar o seu nível de compreensão.

Avaliação

Avaliação

1. Calcule o valor de:

a) $\dfrac{12!}{5!.10!}$ b) $\dfrac{n!}{(n-3)!}$ c) $\dfrac{A_2^5.C_3^7}{5!}$

2. Determine n sabendo que:

a) $A_3^n = 3.A_2^n$

b) $C_2^{n+1} = 21$

c) $(n+2)! = 72.n!$

3. Quantos números de 3 algarismos diferentes se podem escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

4. De quantos modos diferentes se podem colocar dois anéis nos dedos mínimo, anelar e médio de ambas as mãos, não ficando nunca os dois anéis no mesmo dedo?

5. A ementa de um restaurante consta de duas variedades de sopa, quatro pratos diferentes de peixe ou carne e três sobremesas possíveis. Quantas refeições distintas (uma sopa, um segundo prato e uma sobremesa) podem ser servidas?

6. No campeonato Nacional de Futebol participam 16 equipas, devendo cada uma delas jogar com cada uma das restantes duas vezes (uma como visitado e outra como visitante). Qual é o número total de jogos do campeonato?

7. A direcção de uma Associação de Estudantes tem oito membros. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos, entre eles, um presidente, um vice presidente, um secretário e um tesoureiro, sabendo-se que não é permitida a acumulação de cargos?

8. Numa turma liceal há 12 rapazes e 7 raparigas. De quantos modos diferentes se pode organizar uma comissão formada por 3 rapazes e 2 raparigas dessa turma?

Agora compare as suas resoluções com as constantes no fim do módulo ou dirija-se ao centro de recursos para assistência. Sucessos!

Lição 10

Introdução as Probabilidades

Introdução

O cálculo das probabilidades permite-nos estudar os fenómenos aleatórios ou acontecimentos.

Por exemplo: A cura da doença; o aparecimento da face “cara” no lançamento duma moeda ao ar; o aparecimento de 5 no lançamento dum dado.

Estes fenómenos são o objecto de estudo do cálculo das Probabilidades.

Você esta preparado para lidar com esta área de matemática pois, já é capaz de fazer cálculos com arranjos e combinações.

Mesmo assim,como na resolução dos problemas sobre probabilidades que lhe serão colocados irá precisar de aplicar os arranjos e combinações.

Portanto faça uma revisão dos exercícios das liçoes anteriores sobre arranjos e combinações.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Calcular* a probabilidade de um acontecimento ocorrer dependendo de condições dadas.

Objectivos

Introdução as Probabilidades

Para o estudo de probabilidades você precisa de dominar a linguagem e os conceitos que são frequentemente usados tais como:

1. **Fenómenos Aleatórios ou Acontecimentos** São acontecimentos cujo aparecimento depende inteiramente do acaso

Exemplo: o aparecimento da face “cara” no lançamento duma moeda ao ar

2. **Espaço dos Acontecimentos,** Espaço Amostral ou Universo dos resultados o conjunto de todos os casos possíveis relativos a uma prova.

Exemplo:1) No lançamento duma moeda ao ar os casos possíveis são "cara" ou "coroa" e o espaço de acontecimentos é

A = { cara, coroa}

Exemplo:2) No lançamento do dado

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

3. Acontecimento União Acontecimento união dos acontecimentos A e B consiste em se realizar pelo menos um dos acontecimentos A e B. Representa-se por $A \cup B$ ou A+B.

Exemplo: No lançamento de um dado "Sair ponto ímpar" é o acontecimento união de "sair ponto 1", "sair ponto 3", "sair ponto 5".

$\{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$

4. **Acontecimento Intersecção** Acontecimento intersecção dos acontecimentos A e B consiste em que A e B se realizem mutuamente. representa-se por $A \cap B$ ou A.B

Exemplo: A = {sair número par}

B = {sair número primo}

$C = A \cap B$ ou $C = A.B = \{2\}$

5. **Acontecimento Certo** É aquele que se verifica sempre que se realiza a prova. (Corresponde-lhe o conjunto universo)

Exemplos:

1) No lançamento dum dado numerado de 1 a 6, "sair um número inferior a 7"

2) No lançamento duma moeda "sair cara ou coroa".

6. **Acontecimento Impossível** É aquele que nunca ocorre quando se realiza a prova. (Corresponde-lhe o conjunto vazio)

Exemplos:

1) No lançamento de um dado " sair o número 7"

2) No lançamento duma moeda "sair cara e coroa"

7. **Acontecimento Contrário** Acontecimento contrário de um acontecimento A é aquele que consiste em não se realizar A. Representa-se $\overline{A}$ ou C_A (Complementar de A em relação ao universo)

Exemplos:

1) No lançamento duma moeda: Acontecimento A "sair coroa". Então "sair cara" será o acontecimento contrário de A e exprime-se por $\overline{A}$.

2) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6.: "sair ponto par" é o acontecimento contrário de "sair ponto ímpar".

8. **Acontecimentos Disjuntos (Incompatíveis)-** Dois acontecimentos relativos a uma dada prova são disjuntos quando a sua intersecção é um acontecimento impossível.

Exemplo: Sair ponto 5 e sair ponto par simultaneamente é impossível pois $\{5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$. Então diz-se que os acontecimentos {5} e {2, 4, 6} são disjuntos ou incompatíveis

Nota: Acontecimentos contrários são sempre disjuntos, mas acontecimentos disjuntos nem sempre são contrários.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Voce pode concluir que existem vários termos que não são novos e que tem usado para se comunicar com as outras pessoas. Mas agora, esses termos têm um significado na linguagem matemática. Portanto representam uma variável baste importante na linguagem de probabilidades.

São os seguintes:

1. Fenómenos Aleatórios ou Acontecimentos
2. Espaço dos Acontecimentos, Espaço Amostral ou Universo dos resultados
3. Acontecimento União
4. Acontecimento Intersecção
5. Acontecimento Certo
6. Acontecimento Impossível
7. Acontecimento Contrário
8. Acontecimentos Disjuntos (Incompatíveis)

Para calcular as as probalidades recorde-se das fórmulas para o cálculo dos Arranjos e das combinações bem como das propriedades das combinações:

Arranjos

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{com } 0 \le p \le n \;\; p, n \in N \quad ; \quad \text{se } p = n \Rightarrow A_p^n = A_n^n = n!$$

Combinações

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad \text{com} \quad 0 \le p \le n, \qquad n, p \in N$$

propriedades das combinações

$$C_0^n = 1 \quad , \quad C_n^n = 1$$

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n \qquad , \forall n \in N_0$$

$$\text{para } p \leq n \ , \ p \in N_0 \qquad C_p^n = C_{n-p}^n$$

Actividades

Actividades

1. Uma moeda é viciada, de forma que as caras são três vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Determine a probabilidade de num lançamento sair coroa.

Solução:

Seja k a probabilidade de sair coroa. Pelo enunciado, a probabilidade de sair cara é igual a 3k.
A soma destas probabilidades tem de ser igual a 1.
Logo, k + 3k = 1 ∴ k = 1/4.
Portanto, a resposta é 1/4 = 0,25 = 25%.

2. Um dado é viciado, de modo que cada número par tem duas vezes mais chances de aparecer num lançamento, que qualquer número ímpar. Determine a probabilidade de num lançamento aparecer um número primo.

Solução:

Pelo enunciado, podemos escrever:
p(2) = p(4) = p(6) = 2.p(1) = 2.p(3) = 2.p(5).
Seja p(2) = k. Poderemos escrever:
p(2) + p(4) + p(6) + p(1) + p(3) + p(5) = 1, ou seja: a soma das probabilidades dos eventos elementares é igual a 1.

Então, substituindo, vem:
k + k + k + k/2 + k/2 + k/2 = 1 ∴ k = 2/9.

Assim, temos:

p(2) = p(4) = p(6) = 2/9
p(1) = p(3) = p(5) = 2/18 = 1/9.

O evento sair número primo corresponde a sair o 2, ou o 3 ou o 5. Logo, p(2) + p(3) + p(5) = 2/9 + 1/9 + 1/9 = 4/9.

3. Use o mesmo enunciado anterior e determine a probabilidade de

numa única retirada, sair um cartão com um número divisível por 5.

Resposta: 1/5.

4. Das 10 alunas de uma classe, 3 tem olhos azuis. Se duas delas são escolhidas ao acaso, qual é a probabilidade de ambas terem os olhos azuis?

Solução:

Existem $C_{10,2}$ possibilidades de se escolher duas pessoas entre 10 e, existem $C_{3,2}$ possibilidades de escolher duas alunas de olhos azuis entre as três. Logo, a probabilidade procurada será igual a:

$P = C_{3,2} / C_{10,2} = (3.2/2.1)/(10.9/2.1) = 6/90 = 3/45 = 1/15.$

Comentários sobre o cálculo de $C_{n,p}$.

Como já sabemos da Análise Combinatória,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Esta é a forma tradicional de se calcular $C_{n,p}$.

5. Na prática, entretanto, podemos recorrer ao seguinte expediente: Cn,p possui sempre p fatores no numerador a partir de n, decrescendo uma unidade a cada fator e p fatores no denominador a partir de p, decrescendo uma unidade a cada fator.

Exemplos:

$C_{10,4} = (10.9.8.7)/(4.3.2.1) = 210.$

$C_{8,3} = (8.7.6)/(3.2.1) = 56.$

$C_{16,3} = (16.15.14)/(3.2.1) = 560.$

$C_{12,4} = (12.11.10.9)/(4.3.2.1) = 495.$

$C_{10,5} = (10.9.8.7.6)/(5.4.3.2.1) = 252.$

Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja maior do que o da primeira é:

a) 8/9
b) 5/9
c) 7/9
d) 4/9
e) 1/3

Solução:

Suponha que em duas retiradas com reposição obtenhamos a primeira bola com número **a** e a segunda bola com
número **b**. O problema quer saber a probabilidade da segunda bola possuir número maior do que a primeira,
ou seja, b > a .

Observe que no sorteio de duas bolas, obteremos pares ordenados da forma (a, b) onde a é o número da primeira bola sorteada e b o número da segunda.

Vamos utilizar um raciocínio bem simples para a solução deste exercício. Inicialmente, vamos construir a tabela de dupla entrada a seguir, (onde a primeira coluna indica a primeira bola sorteada e a primeira linha indica a segunda bola sorteada). Isto ajuda a visualizar todos os pares ordenados da forma (a,b) possíveis.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**
2			**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**
3				**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**
4					**x**	**x**	**x**	**x**	**x**
5						**x**	**x**	**x**	**x**
6							**x**	**x**	**x**
7								**x**	**x**
8									**x**
9									

Verificamos que são 9.9 = 81 pares ordenados do tipo (a, b) e **36** deles (marcados em vermelho na tabela acima) satisfazem a **b > a** .
Verifique que **36** = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 (soma dos 8 primeiros termos de uma PA decrescente de primeiro termo 8 e último termo 1).

Observe que nenhum par do tipo (9, b) satisfaz ao enunciado pois neste caso, se a primeira bola sorteada for a 9, a segunda não poderá ter número maior, já que só existem bolas numeradas de 1 a 9.

Temos então, 36 possibilidades favoráveis ao evento "o número da segunda bola sorteada é maior do que o número da primeira bola" em 81 resultados possíveis, o que indica que a probabilidade procurada é igual a **36/81**, que simplificada fica **4/9**, o que nos leva à alternativa D.

Avaliação

Avaliação

1. Considere o mesmo enunciado da questão anterior e calcule a probabilidade de na escolha de duas alunas, nenhuma ter olhos azuis.

2. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 99. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas.
A probabilidade de que o número da segunda bola seja maior do que o da primeira é:

   a) 49/99
   b) 39/99
   c) 69/99
   d) 59/99
   e) 27/99

3. uma urna contém bolas numeradas de 1 a n. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas.
A probabilidade de que o número da segunda bola seja maior do que o da primeira é:

a) n/2
b) (n – 1)/2n
c) (n – 1)/3n
d) (n+1)/n
e) n/(n+1)

Resolução

solução 1

Podemos proceder da seguinte forma: como nenhuma das alunas deve ter olhos azuis, restam 10 – 3 = 7 alunas. Portanto, ...

Resposta: 7/15.

Solução:2

Raciocinando analogamente ao exercício anterior, veremos facilmente que existirão

98 + 97 + 96 + ... + 1 possibilidades favoráveis, de um total de 99.99.
Logo, a probabilidade procurada será igual ao quociente (98 + 97 + 96 + ... + 1) / 99.99
A soma dos termos do numerador da fração acima, pode ser obtida facilmente observando que trata-se de uma PA de 98 termos, primeiro termo 98 e último termo 1 . Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA: $S_n = [(a_1 + a_n).n] / 2$, fica:

98 + 97 + 96 + ... + 1 = [(98 + 1).98] / 2 = 99.49.

A probabilidade procurada será igual então a 99.49 / 99.99 = 49/99 , o que nos leva à alternativa A .

Lição 11

Probabildade Frequencista

Introdução

A teoria frenquecista afirma que a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num determinado valor.

Ao número a volta do qual estabiliza a frequência relativa de um acontecimento, quando o número de repetições da experiência cresce consideravelmente, chama-se probabilidade do acontecimento.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Cacular* a probabilidade frequncista.

Frequência Absoluta e Frequência Relativa de um acontecimento

Exemplo: Realizemos uma experiência que consiste em lançar 20 vezes uma moeda ao ar e suponhamos que os resultados obtidos são os seguintes:

- 5 vezes “saiu cara”
- 15 vezes “saiu coroa”.

Diremos então, que:

A frequência absoluta do acontecimento “sair cara” é 5

A frequência relativa do acontecimento “sair cara” é 5/20 que é ¼

A frequência absoluta do acontecimento “sair coroa” é 15.

A frequência relativa do acontecimento “sair coroa” é 15/20 que é ¾.

Definição Frequência (Lei dos grandes números)

Ao número à volta do qual estabiliza a frequência relativa de um acontecimento, quando o número de repetições da experiência, cresce consideravelmente, chama-se probabilidade do acontecimento.

Propriedades:

1) A frequência relativa de um acontecimento A é um número compreendido entre 0 e 1.

$$0 \leq f_r \leq 1$$

2) A frequência relativa de um acontecimento certo é 1.

$$f = n \Rightarrow f_r = f/n = 1$$

3) A frequência relativa de um acontecimento impossível é 0.

$$f = 0 \Rightarrow f_r = f/n = 0$$

4) Seja $\overline{A}$ (não A) o acontecimento contrário do acontecimento A. Então

$$f_r(\overline{A}) = 1 - f_r(A)$$

5) A frequência relativa de dois acontecimentos A e B incompatíveis é igual à soma das suas frequências relativas, i é,

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu definir:

- Frequência Absoluta de um acontecimento.
- Frequência Relativa de um acontecimento.
- Definição Frequência (Lei dos grandes números).

Probabilidade do acontecimento- Como sendo o número à volta do qual estabiliza a frequência relativa de um acontecimento, quando o número de repetições da experiência, cresce consideravelmente.

Aprendeu ainda as seguintes propriedades:

1) A frequência relativa de um acontecimento A é um número compreendido entre 0 e 1.

$$0 \le f_r \le 1$$

2) A frequência relativa de um acontecimento certo é 1.

$$f = n \Rightarrow f_r = f/n = 1$$

3) A frequência relativa de um acontecimento impossível é 0.

$$f = 0 \Rightarrow f_r = f/n = 0$$

4) Seja $\overline{A}$ (não A) o acontecimento contrário do acontecimento A. Então:

$$f_r(\overline{A}) = 1 - f_r(A)$$

5) A frequência relativa de dois acontecimentos A e B incompatíveis é igual à soma das suas frequências relativas, i é,

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

Actividades

Actividades

1. Numa cidade com 56 800 habitantes, 23 200 deles são homens e os restantes são mulheres.

   a) Qual é a frequência absoluta de homens? E de mulheres?

   b) Qual é a frequência relativa dos homens? E das mulheres?

   c) Qual é a frequência relativa dos homens, em percentagem? E a das mulheres?

Sol: a) 23 200; 33 600;   b)0.408; 0.591;   c) 40.8%; 59.1%

Resolução

2. um estudo sobre a durabilidade, em meses, de 204 lâmpadas, duma certa marca, forneceu os seguintes dados:

Duração em meses	]0, 2]	]2, 4]	]4, 6]	]6, 8]	]8, 10]	]10, 12]
f	2	10	80	60	50	2

   a) Determine a frequência relativa de cada uma das observações.

   b) Determine a frequência relativa do acontecimento “ a duração de uma lâmpada é de menos de meio ano”.

   c) Se, ao acaso, comprar uma destas lâmpadas, qual é a probabilidade de a mesma durar entre 6 e 8 meses?

Resolução:

a)

Duração em meses	]0, 2]	]2, 4]	]4, 6]	]6, 8]	]8, 10]	]10, 12]
f	2	10	80	60	50	2
f_r (≈)	0.01	0.05	0.39	0.29	0.25	0.01

b) $f_r = 0.01 + 0.05 + 0.39 = 0.45$

c) $P = f_r = 0.29$

Avaliação

Avaliação

1. Num teste de Matemática, dado a uma turma de 20 alunos, 85% tiveram nota positiva, 10% tiveram nota medíocre e 5% nota de mau.

   a) Quais as respectivas frequências absolutas para as notas positiva, de medíocre e de mau?

   b) Quais as respectivas frequências relativas?

2. Uma dada prova P foi executada n vezes, o acontecimento A, relativo a P, ocorreu x vezes e o acontecimento B, também relativo a P, ocorreu y vezes.

   a) Determine a frequência relativa, respectivamente, de A e de B.

   b) Qual é a frequência relativa do acontecimento contrário ao acontecimento A?

   c) Sendo os acontecimentos x e y incompatíveis, determine f_r (A+B)

3. Num lançamento de uma moeda ao ar indique:

   a) Um acontecimento certo.

   b) Um acontecimento impossível.

   c) A frequência relativa de um acontecimento certo

   d) A frequência relativa de um acontecimento impossível.

   e) A frequência relativa do acontecimento “sair cara”.

   f) A probabilidade de “sair coroa”.

Lição 12

Axiomas

Introdução

As vezes não é fácil demonstrar todas as afirmações verdadeiras em relação a determinados assuntos temáticos na matemática mas tais afirmações ou conclusões são aplicados na resolução de problemas matemáticos sem demonstração e permitem fazer deduções de certas propriedades. Tais afirmações são chamadas axiomas.

E vão permitir-nos resolver vários problemas sobre probabilidades

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Calcular* as probabilidades aplicando os axiomas.

Objectivos

Axiomas

Axiomas de probabilidades

Axioma 1-A probabilidade de um acontecimento A do espaço de acontecimentos E ‘e um número real compreendido entre 0 e 1

$$0 \leq P(A) \leq 1,\ A \subseteq E$$

Axioma 2- A probabilidade de um acontecimento certo é 1

$$P(E) = 1,\ E \text{ é um acontecimento certo}$$

Axioma 3- A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis (disjuntos) é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ \text{se } A \cap B = \varnothing$$

Destes axiomas podemos deduzir as seguintes propriedades

Propriedades:

1) A probabilidade de um acontecimento $\overline{A}$ (não A) é igual à diferença entre 1 e a probabilidade de A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2) A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

$$P(\emptyset) = 0$$

3) Se A, B e C são acontecimentos incompatíveis dois a dois, então,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

4) Sendo A e B dois acontecimentos quaisquer, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplos:

1) Numa experiência do lançamento de um dado equilibrado de faces numeradas de 1 a 6, os acontecimentos elementares {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} são equiprováveis, incompatíveis dois a dois e a sua união é o universo E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, então:

$$P\{1\}+ P\{2\}+ P\{3\}+ P\{4\}+ P\{5\}+ P\{6\} = P\{E\} = 1$$

$$P\{1\} = P\{2\} = \ldots = P\{6\} = \frac{1}{6}$$

2) A probabilidade do acontecimento A "sair número inferior a 3", i é, A = { 1, 2} = {1}∪{2} será:

$$P(A) = P\{1\} + P\{2\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se os acontecimentos elementares são equiprováveis e incompatíveis dois a dois, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

Ou seja

$$P(A) = \frac{\text{numero de casos favoraveis ao acontecimento A}}{\text{numero de casos possiveis}}$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A probabilidade de um acontecimento A do espaço de acontecimentos E ‘e um número real compreendido entre 0 e 1

  $0 \leq P(A) \leq 1,\ A \subseteq E$

- A probabilidade de um acontecimento certo é 1

  P(E) = 1, E é um acontecimento certo

- A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis (disjuntos) é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \varnothing$

Destes axiomas podemos deduzir as seguintes propriedades:

1) A probabilidade de um acontecimento $\overline{A}$ (não A) é igual à diferença entre 1 e a probabilidade de A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2) A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

$$P(\varnothing) = 0$$

3) Se A, B e C são acontecimentos incompatíveis dois a dois, então,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

4) Sendo A e B dois acontecimentos quaisquer, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se os acontecimentos elementares são equiprováveis e incompatíveis dois a dois, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis

Actividades

Actividades

1. Lança-se um dado equilibrado, de faces numeradas de 1 a 6. Calcule a probabilidade de se verificar um dos seguintes acontecimentos:

   a) "sair número ímpar".

   b) "sair múltiplo de 3"

   c) "sair número par".

   d) "sair número inferior a 4"

Resolução:

a) A = {sair número ímpar} = {1, 3, 5}

O número de casos favoráveis é 3.

O número de casos possíveis é 6

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) B = { sair múltiplo de 3}= { 3, 6}

O número de casos favoráveis é 2.

O número de casos possíveis é 6

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) C = {sair número par}= {2, 4, 6}

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

d) D = {sair número inferior a 4}= {1, 2, 3}

$$P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Uma urna contém 20 bolas vermelhas e 30 bolas brancas. Extrai-se

uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de que saia:

a) Uma bola vermelha P (V) ?

b) Uma bola branca P (B) ?

c) Uma bola vermelha ou branca P (V ∪ B) ?

Resolução:

a) número de C. P. : 20 + 30 = 50

número de C.F. : 20

$P(V) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

b) $P(B) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

c) $P(V \cup B) = P(V) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, pois V e B são conjuntos disjuntos

3. Uma urna contém 7 bolas pretas e 6 bolas brancas, retirando, ao acaso e simultaneamente, 8 bolas, qual é a probabilidade de se obter 4 e só 4 bolas pretas?

Resolução:

número de C. P: $C_{13}^{8} = 1287$

número de C. F

$C_7^4 \times C_6^4 = 525$

$$P = \frac{C_7^4 \times C_6^4}{C_{13}^{8}} = \frac{525}{1287} \approx 0.4$$

Avaliação

Avaliação

1. No lançamento de dum dado perfeito (em que as seis faces têm possibilidades iguais) considere as situações:

   a) I e II são eventos independentes?;

   b) II e III são eventos independentes?;Obter pelo menos uma cara;

   c) considerando a), calcule a probabilidade de um resultado par e maior que 4

   d) considerando b), calcule a probalibilidade de um resultado par e maior que 4 e múltiplo de 3

2. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso . um amarelo, um vermelho e outro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lnce, o árbitro retira ao acaso, um cartão do bolso e mostra a um jogador. A probabilidade de a face que ele vê ser vermelha e de a outra, mostrada ao jogador ser amarela é:

   a)1/2 b) 2/5 c) 1/5 d)2/3 e) 1/3 qual é a alternativa?

3. Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas sendo retirada uma peça, calcule:

   a) a probabilidade dessa peça ser defeituosa

   b) a probabilidade dessa peça nãoser defeituosa

4. Qual é a probabilidade de sair um Reis quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

5. joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação $x^2+bx+1=0$. Determine:

   a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.

   b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais sabendo que ocorreu um número ímpar.

6. Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Qual é a frequência da face 1.

7. Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. A e B

têm as mesmas chances de vencer e, cada um, tem duas vezes mais chances de vencer do que C. Pede-se calcular a probabilidades de A ou C vencer.

Soluções Módulo 8

Soluções do Modulo 8

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

Lição 1

1. Determine as funções primitivas das funções seguintes:

a) $\int 7x^2 = 7\int x^2 = \frac{7}{3}x^3 + c$

b) $\int (2x+5)^3\,dx = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(2x+5)^4 + c = \frac{1}{8}(2x+5)^4 + c$

c) $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$

d) $\int \frac{2}{x^2}dx = 2\int \frac{1}{x^2}dx = 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 2\left(-x^{-1}\right) + c = -\frac{2}{x} + c$

e) $\int e^x dx = e^x + c$

f) $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$

g) $\int \frac{1}{x+3} = \ln|x+3| + c$

h) $\int \frac{8}{\sqrt{1-x^4}}dx = 8\int \frac{x^2}{1+4x^6} = 8\int \frac{x^2}{1+\left(4x^3\right)^2} = \frac{8}{6}\int \frac{6x^2}{1+\left(2x^3\right)^2} = \frac{4}{3}\arctan\left(2x^3\right) + c$

aplicando os integrais imediatos verifique a tabela acima

2. Determine as primitivas das funções seguintes:

a) $\int \left(-2+v^{-2}\right)^2 dv = \int \left(4-4v^{-2}+v^{-4}\right)dv = \int 4dv - \int 4v^{-2}dv + \int v^{-4}dv =$

$= 4v + \frac{4}{v} - \frac{1}{3v^3}$

Note que para chegar ao segundo passo desenvolvemos o quadrado do binómio (quadrado da diferença de dois termos

a) $\int\left(-2+v^{-2}\right)^{2} dv = \int\left(4-4v^{-2}+v^{-4}\right)dv = \int 4dv - \int 4v^{-2}dv + \int v^{-4}dv =$

$= 4v + \frac{4}{v} - \frac{1}{3v^{3}}$

b) $\int\left(\frac{x^{3}+2x-7}{x}\right)dx = \int\left(x^{2}+2-\frac{7}{x}\right)dx = \frac{x^{3}}{3} - x - 7\ln|x| + c$

c) $\int\left(\frac{e^{x}}{2}+x\sqrt{x}\right)dx = \int\left(\frac{e^{x}}{2}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{e^{x}}{2} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + c$

d) $\int\left(\cos(t) - \sec(t).\tan(t)\right)dt = \operatorname{sen}(t) - \sec(t) + c$

Lição 2

1) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)dx$

Seja u= $\frac{3}{2}x$ logo du=$\frac{3}{2}$ dx, assim,

$\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)dx = \int \frac{2}{3}\operatorname{sen} u du = -\frac{2}{3}\cos u + c = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + c$

2) $\int 3t\cos\left(3t^{2}\right)dt$

Seja u= $t x^{2}$ - 4 , logo du=-6tdt, assim,

$\int 3t\cos\left(3t^{2}\right)dt = \int \frac{1}{2}\cos u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + c = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3t^{2} + c$

3) $\int \cos^{2} t dt$

Seja u= $\cos^{2} t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ assim,

$\int \cos^{2} t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \int \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + c$

4) $\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx$

Seja u= 3u 'logo du=-3dx, assim,

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{3}\arctan u + c = \frac{1}{3}\arctan(3x) + c$$

Licao 3

Resolução

Sendo $v = x^3$ e $du = e^{2x}$, temos que $dv = 3x^2$ e $u = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x}x^3 = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \int \frac{1}{2}e^{2x}x^3 = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{2}\int e^{2x}x^2$$

Seja agora v e du= 2^{2x} :

$$\int e^{2x}x = \frac{1}{2}e^{2x}x - \int \frac{1}{2}e^{2x} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}x - \frac{1}{4}e^{2x}$$

Finalmente:

$$\int e^{2x}x^3 = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{2}\int e^{2x}x^2 = \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int e^{2x}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{4}e^{2x}x^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}x - \frac{1}{4}e^{2x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \frac{3}{4}e^{2x}x^2 + \frac{3}{4}e^{2x}x - \frac{3}{8}e^{2x}$$

2) $\int \cos\sec^2 x \cot gxdx$

Seja u= cossecx e dv= cosecx cotgxdx, logo du = -cossecx cotgxdx e

V = -cos secx e assim:

$$\int \cos\sec^2 x.\cot gxdx = -\cos\sec^2 x - \int(-\cos\sec x)(-\cos\sec x.\cot gx)dx \quad \log o:$$
$$2\int \cos\sec^2 x \cot gxdx = \cos\sec^2 x$$

Portanto, $\int \text{cosec}^2 x \cot gxdx = -\frac{\cos ec^2 x}{2} + c$

3) $\int \text{senx} \sec^2 xdx$

Seja $u = \text{senx}$ e $dv = \sec^2 xdx$, $\log o du = \cos xdx$ e $v = \text{tgx}$ assim:

$$\int \text{senx} \sec^2 xdx = \text{senx.tgx} - \int \text{tg}(\cos xdx) =$$
$$= \text{senxtgx} + \int \text{senxdx} = \text{senxtgx} + \cos x + c$$

Lição 4

1. Consideremos fracção própria $\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

Portanto: $x^3+x^2+x+3 = (Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+1)$, ou seja:

$$x^3+x^2+x+3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (3A+C)x + 3B + D,$$

Então: $\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+C=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} B+D=1 \\ 3B+D=3 \end{cases}$ Logo A=0, C=1, B=1 e D=0.

$$\int \frac{(x^3+x^2+x+3)dx}{(x^2+1)(x^2+3)} =$$
$$\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+3}\right)dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{x^2+3} = \text{arctgx} + \ln\sqrt{x^2+3} + C$$

Lição 5

1. a) 11+7 ⇔ 9+9

   b) -11+7 ⇔ - 4

   c) -11-7 ⇔ -18

d) $(-2)4 \Leftrightarrow 20-4$

e) $3 + 2 = 2 + 3 \Leftrightarrow 5$

2. Qual é o valor lógico das seguintes proposições

a) Uma designação pode ser verdadeira ou falsa; falsa,(pela definição de designação)

b) Duas proposições equivalentes são ambas verdadeiras ou ambas falsas;verdadeira

c) A partir de duas designações numéricas equivalentes podemos definir uma proposição verdadeira através da relação "=";verdadeira

d) Uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa; falsa , (pelo princípio do terceiro excluído)

e) Uma proposição pode ser verdadeira para uns e falsa verdadeira

f) $4 \neq \frac{8}{2}$ falsa (8/2 é igual a 4)

g) $\sqrt{7} < 7$ verdadeira

Lição 6

1. a) $p \wedge q$ **falsa**

b) $\sim(F \wedge p)$ **verdade**

c) $\sim F \wedge \sim p$ **verdade**

d) $p \vee q$ **verdade**

2.

P: A sra Otília gastou 260mts na compra de 2,5kg de carne o contrário não é verdade **, a proposição é falsa**

Q: A sra Otília gastou 450mts mts na compra de 18 ovos o contrário não é verdade, **a proposição é falsa**

3. a) $2<3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ verdade; $(porque \quad F \Rightarrow F)$

b) $\frac{3}{2} < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} > 1$ verdade; $(porque \ F \Rightarrow F)$

c) $\frac{3}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} > 1$ verdade; $(porque \ F \Leftrightarrow F \ \ consulte\ t.\ de\ equivalencia)$

d) $3>2 \Rightarrow -3>-2$ falsa; $(porque \ V \Rightarrow F)$

e) $\left(\frac{4}{3} > 1 \wedge \frac{2}{3} > 1\right) \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3} > 1$ verdade; $(porque \ F \Rightarrow V)$

f) $\square\left(\frac{2}{3} > 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} > 1 \vee \frac{3}{2} > 1\right)$ verdade; $(\ porque \ \square(F) \Leftrightarrow (F \vee V) \ ou\ seja \ \ V \Leftrightarrow V)$

4. Sejam p,q,r as proposições seguintes:

   p: o João tem mais do que 18 anos ;

   q : o João tem carta de condução;

   r: o João e eleitor

Escreva em linguagem simbólica cada uma das afirmações :

Resposta

a) se o João tem carta de condução , então ele tem mais do que 18 anos ; $q \Rightarrow p$

b) o Joãoé eleitor se e só se ele tem mais do que 18 anos; $r \Leftrightarrow p$

c) se o João e eleitor , então não tem mais do que 18 anos; $r \Rightarrow p$

d.) se o João tem carta de condução , então ele tem mais do que 18 anos e é eleitor $q \Rightarrow (p \wedge r)$

e) o João não tem carta de condução ou é eleitor se e só se ele tem mais do que 18 anos. $(\sim q \vee r) \Leftrightarrow p$

Lição 7

1. Use tabelas de verdade para demonstrar que são verdadeiras as proposições seguintes, em que "p" e "q" designam qualquer dos valores lógicos V, F.

a) $p \vee q = q \vee p$=p

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

b)$p \wedge v = v \wedge p = p$

p	V	$p \wedge v$	$v \wedge p$
V	V	V	V
V	V	V	V
F	V	F	F
F	V	F	F

2. a) $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$

a	b	$(a \wedge b)$	$(a \vee b)$	$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

b) $b \Rightarrow (a \Rightarrow b)$

a	b	$(a \Rightarrow b)$	$b \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	F	F

c)~ (a ∨ b) ⇔ (~ a ∧ ~ b)

a	b	~ a	~ b	(a ∨ b)	~ (a ∨ b)	(~ a ∧ ~ b)
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V

d) Demosntre que a disjunção é distributiva em relação a conjunção por meio de uma tabela de verdade.

p	q	r	(q ∧ r)	(p ∨ q)	(p ∨ r)	p ∨ (q ∧ r)	(p ∨ q)∧(p ∨ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

3. Determine o valor lógico de p , sabendo que

a) $\sim p \Rightarrow p$	Verdade
b) $(p \wedge F) \Leftrightarrow p$	falso
c) $(p \vee F) \Rightarrow \sim p$	falsa
d) $(\sim p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee F)$	falsa
e) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim q$	falsa

4. O Sr. Langa , que reside no B. da Liberdade ,tomava todos os dias o chapa com destino a cidade de Maputo,onde iniciava o trabalho as 9

horas . Para tal, apanhava o chapa das 8h com chegada a cidade de Maputo prevista para 8hors e 50mn.Depois de sair do chapa o Sr. Langa não demora mais do que 10mn a chegar ao serviço.

Verifique se e verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações ;

a) se o chapa chega na cidade as 9 o, o Sr. langa chega atrasado ao serviço; **V (verdade)**

b) se o Sr.ª Langa e pontual no serviço, o chapa chegou depois das 9h.

F (falso)

5. Mostre , utilizando tabelas de verdade , que:

$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q) = pq$?????

p	q	~ p	~ q	$(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Lição 8

1. calcule o valor de:

a) $\frac{3!+6!}{3!} = \frac{3!+6.5.4.3!}{3!} = \frac{3!(1+6.5.4)}{3!} = 1+120 = 121$

b) $\frac{16!}{2!.15!} = \frac{16.15!}{2.15!} = \frac{16}{2} = 8$

c) $p_5 - 3! = 3! - 3! = 0$

2. compare as expressões (use <,> ou =)

a) $3! = 6$

b) $5! + 4! < 9!$

3. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

b) $\dfrac{p_{n+1} - p_n}{n!} = \dfrac{(n+1)! - n!}{n!} = \dfrac{(n+1)n! - n!}{n!} = \dfrac{n!(n+1-1)}{n!} = n$

resolva a equação

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 110 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 110 \Leftrightarrow n(n-1) = 110 \Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 441$$
$$\Leftrightarrow n_1 = -10 \vee n_2 = 11$$

De quantas maneiras podem-se ordenar 5 livros de matemática e 3 de biologia numa prateleira sem qualquer ordem especial?

R: $p_8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 56.30.12.2 = 1680.24 = 40320$

Lição 9

1) calcule o valor de:

a) $\dfrac{12!}{5!.\ 10!} = \dfrac{12.11.10!}{5!.10!} = \dfrac{12.11}{5.4.3.2.1} = \dfrac{11}{10}$

b) $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{n.(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n.(n-1)(n-2)$

c) $\dfrac{A_2^5 . C_3^7}{5!} = \dfrac{\dfrac{5!}{(5-2)!} . \dfrac{7!}{(7-3)!3!}}{5!} = \dfrac{5!}{(5-2)!} . \dfrac{7!}{(7-3)!3!} . \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5!.7!}{3!.4!.3!5!} =$

$= \dfrac{7!}{4!.3!.3!} = \dfrac{7.6.5.4!}{4!.3!.3!} = \dfrac{7.6.4.3!}{3!.3!} = \dfrac{7.6.4}{6.6} =$

$= \dfrac{7.4}{6} = \dfrac{28}{6} = \dfrac{14}{3}$

2) Determine n sabendo que:

a) $A_3^n = 3.A_2^n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{3.n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)}!}{\cancel{(n-3)}!} = \dfrac{3.n(n-1)\cancel{(n-2)}!}{\cancel{(n-2)}!} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\cancel{(n-1)}(n-2) = 3.n\cancel{(n-1)} \Leftrightarrow n^2 - 2n = 3n \Leftrightarrow n(n-5) = 0$

Sol: n=5

b) $C_2^{n+1} = 21 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{(n+1-2)!2!} = 21 \Leftrightarrow 21(n-1)!2! = (n+1)!$

$\Leftrightarrow 21.2.\cancel{(n-1)}! = (n+1)(n)\cancel{(n-1)}! \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 42 = n^2 + n \Leftrightarrow -n^2 - n + 42 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

$\Leftrightarrow n = 6$

Sol: n=6

c) $(n+2)! = 72.n! \Leftrightarrow (n+2)(n+1)\cancel{(n)}! = 72\cancel{n}! \Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 = 72 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0$

$\sqrt{\Delta = \sqrt{289}} = 17 \Rightarrow n = 7$

Sol: n=7

3) $A_3^5 = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5.4.3.2!}{2!} = 60$

Resposta: com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5podem ser escritos 60 números de três algarismos

4) $A_2^{6} = \frac{6!}{4!} = \frac{6.5.4!}{4!} = 30$

Resposta: são 30 modos diferentes para colocar dois anéis nos dedos mínimo, anelar e médio sem repetição

5) $A_1^{2}..A_1^{4}..A_1^{3} = \frac{2!4!3!}{1!.3!,2!} = 24$

Resposta: podem ser servidas 24 refeições distintas

6) $A_2^{16} = \frac{16!}{14!} = \frac{16.15.14!}{14!} = 240$

Resposta: são 240 jogos do campeonato

7) $A_4^{8} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!} = 8.7.6.5 = 1680$

Resposta: são 1680 maneiras para escolher um presidente, um vice presidente, um secretário e um tesoureiro

8) Calcula-se $C_3^{12}.C^7{}_2 = 4620 = 60$ Sol: 4620

Lição 10

Solução:3

Trata-se de uma generalização dos problemas anteriores. Vamos novamente recorrer à tabela de dupla entrada para ajudar na visualização e entendimento da questão.

	1	2	3	4	5	6	7	8	...	...	n-1	n
1		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3				X	X	X	X	X	X	X	X	X
4					X	X	X	X	X	X	X	X
5						X	X	X	X	X	X	X
6							X	X	X	X	X	X
7								X	X	X	X	X
8									X	X	X	X
...										X	X	X
...											X	X
n-1												X
n												

A primeira coluna indica a primeira bola sorteada e a primeira linha indica a segunda bola sorteada). Isto ajuda a visualizar todos os pares ordenados da forma (a,b) possíveis.

Verificamos que o número de casos favoráveis ao evento "o número da segunda bola sorteada é maior do que o número da primeira bola" indicados na tabela acima por X, é igual à soma dos $(n-1)$ termos : $(n-1)+(n-2)+(n-3)+ ... + 1$.
Reconhecemos imediatamente tratar-se da soma dos termos de uma PA de primeiro termo $(n-1)$, número de termos $(n-1)$ e último termo igual a 1. Aplicando a conhecida fórmula da soma dos termos de uma PA, vem:
$(n-1)+(n-2)+(n-3)+ ... + 1 = [(n-1)+1](n-1) / 2 = n.(n-1) / 2$

Ora, o total de possibilidades possíveis (total de pares ordenados) é obviamente igual a n^2 .
Logo, a probabilidade procurada será igual ao quociente:
$p = [n.(n-1)/2] / n^2 = (n-1) / 2n$, o que nos leva tranqüilamente à alternativa B.

Uma observação importante relativa a este problema é que, sendo a probabilidade
$p = (n-1) / 2n$, podemos escrevê-la na forma:
$p = n/2n - 1/2n = 1/2 - 1/2n$, sendo n o número de bolas na urna.
Para valores muito grandes de n, o valor $1/(2n)$ vai se aproximar de zero (já que n está no denominador) e p, no limite, será igual a 1/2. Portanto, quanto maior o número de bolas contidas na urna, maior a probabilidade, a qual entretanto, nunca será maior ou igual a 1 /2 = 0,50 = 50%.

Lição 11

1) Sol: a) 17; 2; 1; b) 0.85; 0.10; 0.05.

2) Sol: a) $f_r(A) = x/n$; $f_r(B) = y/n$; b) $f_r(\overline{A}) = 1 - x/n$; c) $f_r(A+B) = (x+y)/n$.

3) Sol: a) sair cara ou coroa; b) sair cara e coroa simultaneamente; c) 1; d) 0; e) 0.5; f) 0.5

Lição 12

1) considere $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ espaço amostral

$I=\{2,4,6\}$ $II=\{5,6\}$ $III=\{3,6\}$ $I\cap II=\{6\}$ $II\cap III=\{6\}$

Teremos as probabilidades

$P(I)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $P(II)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $P(III)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $P(I\cap II)=\frac{1}{6}$ $P(II\cap III)=\frac{1}{6}$

a) Como $P(I\cap II)=P(I)$ então os eventos I e II são independentes entre si.

b) Como $P(II\cap III)\neq P(II).P(III)$ os eventos não são independentes entre si

c) $P(I\cap II)=P(I).P(II)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

d) $P(II\cap III)=P(II).P(III/II)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

2) **a)1/2 b) 2/5 c) 1/5 d)2/3 e) 1/3** qual é a alternativa?

Sejam: A= evento cartão com as duas cores e B= evento face vermelha para o árbitro, tendo ocorrido o cartão de duas cores:

$P(A)=\frac{1}{3}$ e $P(B/A)=\frac{1}{2}$ é a probabilidade condicional (ocorre B se ocorrer A)

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ a alternative solução é e)

3. a) a probabilidade dessa peça ser defeituosa

$$P=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

b) a probabilidade dessa peça nãoser defeituosa

$P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ porque o evento é complementar ao anterior

4) Como há 4 Reis, o número de elementos do evento é 4. Logo

$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

5. a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.

Para que $x^2 + bx + 1 = 0$, com $b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ tenha raízes reais, $\Delta \geq 0$, então os valores possíveis para b são 2,3,4,5,e 6 ou seja existem 5 possibilidades para b. Logo: a probabilidades de essa equação ter ra'zes reais **é 5/6**

a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais sabendo que ocorreu um número ímpar.

Sabendo que ocorreu um número ímpar (1,3,ou 5), a probabilidade será **2/3**

6. $P(1) = x \quad P(I6) = 2x \quad P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1$

$3x = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Logo: $P(1) = \frac{1}{9}$

7.

Sejam p(A), p(B) e p(C), as probabilidades individuais de A, B, C, vencerem. Pelos dados do enunciado, temos:
p(A) = p(B) = 2.p(C).

Seja p(A) = k. Então, p(B) = k e p(C) = k/2.
Temos: p(A) + p(B) + p(C) = 1.

Isto é explicado pelo fato de que a probabilidade de A vencer ou B vencer ou C vencer é igual a 1. (evento certo).

Assim, substituindo, vem:

$k + k + k/2 = 1 \therefore k = 2/5$.
Portanto, $p(A) = k = 2/5$, $p(B) = 2/5$ e $p(C) = 2/10 = 1/5$.

A probabilidade de A ou C vencer será a soma dessas probabilidades, ou seja $2/5 + 1/5 = 3/5$.

Módulo 9 de Matemática

Teste Preparação de Final de Módulo

Introdução

Este teste, querido estudante, seve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

Integrais indefinidas

Determine as primitivas das seguintes funções

1) $\int (2x^3 - 4x^2 + 5x - 1)dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+3}}$

3) $\int x^4 \cos(x^5)dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^3} + x^2 - 5x\right)dx$

5) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

Lógica Bivalente

Utilize a tabela de verdades para mostrar que qualquer que sejam os valores lógicos de “a” e “b” as expressões seguintes são verdadeiras (tautológicas).

a) $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$b) $\sim (a \vee b) \Leftrightarrow (\sim a \wedge \sim b)$

Análise combinatória

1. Calcule o valor de:

a) $\frac{6!}{3!}$

b) $\frac{A_2^5 . A_3^7}{4!}$

c) $A_2^6 . P_3$

1. Resolva as equações:

a) $C_2^n = 10$ b) $A_7^n = 30 . A_5^n$

3.Numa turma de 10 raparigas, quantos grupos de 5 podem-se formar?

4. determine o número de palavras diferentes com ordem e sentido que podem ser escritas com as letras da palavra **combinatória?**

5. numa turma de 10 raparigas e 8 rapazes, quantas comissões diferentes de 5 elementos é possível formar:

a) sem qualquer restrição.
b) se em cada uma figurarem 3 raparigas e 2 rapazes.

Probabilidades

1) Sabendo que a probabilidade do acontecimento A, relativo à prova P, ‘e 0.16 e que a probabilidade do acontecimento B, relativo à mesma prova, é igual 0.24, determine a probabilidade:

a) do acontecimento união dos acontecimentos A e B, sabendo que $A \cap B = \varnothing$

b) do acontecimento contrário ao acontecimento A.

2). Uma moeda é viciada, de maneira que as CARAS são três vezes mais prováveis de aparecer do que as COROAS. Calcule as probabilidades de num lançamento sair COROA.

3) Num lançamento de um dado perfeito ocorre o acontecimento A “sair um ponto ímpar” e o acontecimento B “sair um ponto inferior a 3”. Calcule a probabilidade dos acontecimentos:

a) A

b) B

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

e) $\overline{A} \cap B$

4) Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Tirando uma bola ao acaso, diga qual a probabilidade de sair:

a) bola branca;

b)bola preta;

c) bola branca ou azul;

5) No lançamento de um dado, consideremos o acontecimento A “sair número ímpar” e o acontecimento B “sair número inferior a 3”. Indique:

a) O acontecimento união dos acontecimentos A e B.

b) O acontecimento intersecção dos acontecimentos A e B.

c) O acontecimento contrário ao acontecimento A

d) Dois acontecimentos disjuntos

6) Na prova que consiste em lançar um dado e tomar nota do número da face superior, considere os acontecimentos:

A- sair múltiplo de 3

B- sair número primo

C- sair número par

a) São compatíveis os acontecimentos A e B? E B e C?

b) Indique o acontecimento $\overline{A}$

c) Qual o acontecimento $A \cup B$

d) Caracterize o acontecimento $A \cap \overline{B}$

Soluções do teste de preparação do Módulo 9

Integrais indefinidos

a)

$$\int\left(2x^3-4x^2+5x-1\right)dx=2\int x^3dx-4\int x^2dx+5\int xdx-\int 1dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x+3}}=$

podemos considerar $u=7x+3$ donde $du=7dx \Leftrightarrow \frac{du}{7}=dx$ e substituindo no integral acima

$$=\frac{1}{7}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{7}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{7}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{7}\sqrt{u}+C=\frac{2}{7}\sqrt{7x+3}+C$$

c) $\int x^4\cos\left(x^5\right)dx$

seja $u=x^5 \Rightarrow du=5x^4dx \Rightarrow x^4dx=\frac{du}{5}$

substituindo teremos :

$$\int x^4\cos\left(x^5\right)dx=\int\frac{\cos udu}{5}=\frac{1}{5}\int\cos udu=\frac{1}{5}\int senu+c=\frac{1}{5}\int sen\left(x^5\right)+c$$

d) $\int\left(\frac{1}{x^3}+x^2-5x\right)dx$

Resposta: $\frac{-1}{2x^2}+\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c$

e) $\int\sqrt[3]{x}\,dx$

Resposta: $\frac{3}{4x^{4/3}}+c$

Lógica Bivalente

Utilize a tabela de verdades para mostrar que qualquer que sejam os valores lógicos de "a" e "b" as expressões seguintes são verdadeiras

a) $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$

a	**b**	**$(a \wedge b)$**	**$(a \vee b)$**	**$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

A resposta final está na última coluna

b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	**q**	**$\sim p$**	**$\sim q$**	**$(p \vee q)$**	**$\sim (p \vee q)$**	**$(\sim p \wedge \sim q)$**
v	V	F	F	V	F	F
v	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

RESPOSTA : basta comparar as duas últimas colunas para dar a resposta

Análise combinatória

1. Calcule o valor de:

$$a) \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 30.4 = 120$$

b) $\dfrac{A_2^5.A_3^7}{4!}=\dfrac{5!}{(5-2)!}.\dfrac{7!}{(7-3)!}.\dfrac{1}{4!}=\dfrac{5!.7!}{3!.4!4!}=\dfrac{5.4!7.6.5.4!}{3!4!4!}=5.7.2.5=350$

c) $A_2^6.P_3=\dfrac{6!.3!}{4!}=\dfrac{6.5.4!.3!}{4!}=180$

2.Resolva as equações:

a) $C_2^n=10 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!2!}=10 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}=10 \Leftrightarrow \dfrac{n^2-n}{2}=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ n^2-n-20$

$\Leftrightarrow \Delta=81$

$\Leftrightarrow n_1=-4 \vee n_2=5$

R: $n=5$

b) $A_7^n=30.A_5^n \Leftrightarrow \dfrac{A_7^n}{A_5^n}=30 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-7)!}.\dfrac{(n-5)!}{n!}=30 \Leftrightarrow \dfrac{(n-5)(n-6)(n-7)!}{(n-7)!}=3$

$\Leftrightarrow (n-5)(n-6)=30 \Leftrightarrow n^2-5n-6n+30-30=0 \Leftrightarrow n^2-11n=0$

$\Leftrightarrow n_1=0 \ \vee n_2=11$

R: $n=11$

3.

Resposta : C_5^{10}

4.

Resposta: $p_9=9!$

5. a) sem qualquer restrição.

Resposta: C_5^{18}

b)se em cada uma figurarem 3 raparigas e 2 rapazes.

Resposta: $C_3^{10}.C_2^8$

probabilidades

1)

Sol: a) 0.40; b) 0.84

2).

sol: 1/4

3)

Sol: a) 0.5; b) 1/3; c) 1/6; d) 2/3; e) 1/6

4)

Sol: a) ¼ b) 1/3 c)2/3

5)

Sol: a) {1, 2, 3, 5,}; b) {1} c) sair nº par; d) "sair nº par" e "sair nº 5"

6)

Sol: a) São; b) $\overline{A}$ = {1, 2, 4, 5,}; c) $A \cup B$ = {2, 3, 5, 6,}; d) {6}- sair nº 6

Bibliografia

SAMARY, Matemática, Nível médio 2ºano 1ºV, SETEP, Maputo,1978.

NEVES, Mª A& BRITO, Mª. L.Matemática 12ºano 2ºVol. Porto Editora.

FACULDADE DE MATEMÁTICA,UEM. Matemática 1º Vol.UEM.Maputo,1995.