MÓDULO 6

Matemática

Sucessões

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 6

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos auto instrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classes, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classes. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as resposta no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquirir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem

Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Sucessão de números reais

Introdução

Em matemática podemos encontrar grupos de números organizados de modo a que o seu comportamento nos leve a pensar numa determinada lei. Nesta lição vamos nos deter na análise destes grupos de números que daremos o nome de sucessões e porque as funções também no podem dar grupos de números que repeitem a expressão analítica da função vamos estabelecer a diferença entre susseção e função.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Saber* diferenciar uma sucessão duma função..
- *Identificar* o termo geral duma sucessão.

Objectivos

Sucessão de numeros reais

Nas sucessões usa-se uma terminologia própria; por exemplo:

Em vez de **imagem** fala-se de **termo;**

Em vez de **objecto** fala-se de **ordem** dum termo;

Em vez de **expressão analítica** duma função fala-se de **termo geral** duma sucessão

Sucessões

Sucessão é uma sequência de termos, os quais podem ser obtidos por uma lei ou relação definida.

Exemplos :

(i) 1,3,5,7,9...; 2n-1

(ii) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2 ...; n^2$

(iii) $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4} ... \frac{1}{n(n+1)}$

(iv) $x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, -\frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5} ..., (-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n}$

Termo geral – é a lei ou relação definida para a obtenção de cada termo da sucessão.

O termo geral representa-se por: $a_n; u_{n,}; v_n$; etc

Onde:

- a – é o termo
- n – é a ordem do termo (posição do termo na sucessão), $n \in z$
- a_1 - termo de ordem 1 ou primeiro termo da sucessão
- a_2 - termo de ordem 2 ou segundo termo da sucessão
- . . . . . .
- a_n - termo de ordem n (ou termo geral)

Nota : em certos casos, a_n, representa o último termo da sucessão.

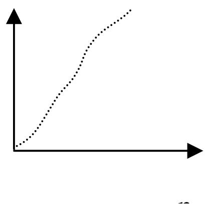
Exemplos de termos gerais:

- Para (i): $a_n = 2n - 1$
- Para (ii): $u_n = n^2$
- Para (iii): $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
- Para (iv): $w_n = (-1)^{n+1} . \dfrac{x^n}{n}$

Monotonia

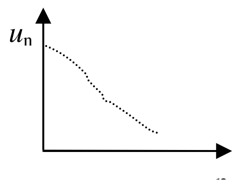
Uma sucessão diz-se monótona crescente, se a diferença entre o n- ésimo primeiro termo (a_{n+1}) e o n-ésimo termo (a_n), for positiva;

Crescente : $u_{n+1} - u_n > 0$



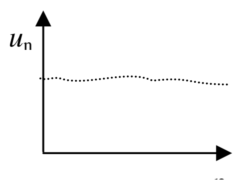
Se a diferença for negativa, a sucessão diz-se monótona decrescente

decrescente : $u_{n+1} - u_n < 0$



caso a diferença seja nula a sucessão é constante

Constante: $u_{n+1} - u_n = 0$



Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- **Sucessão** é uma sequência de termos, os quais podem ser obtidos por uma lei ou relação definida.

- **Termo geral** – é a lei ou relação definida para a obtenção de cada termo da sucessão.

  a_n **- termo de ordem n (ou termo geral)**

- **Monotonia**

  Uma sucessão diz-se monótona crescente, se a diferença entre o n-ésimo primeiro termo (a_{n+1}) e o n-ésimo termo (a_n), for positiva;

  Crescente : $u_{n+1} - u_n > 0$

Se a diferença for negativa, a sucessão diz-se monótona decrescente

decrescente *:* $u_{n+1} - u_n < 0$

a diferença seja nula a sucessão é constante

Constante: $u_{n+1} - u_n = 0$

Actividades

Actividades

1. Seja dada a sucessão $u_n = \dfrac{7n-1}{n+11}$.

   a) Qual é o termo de ordem 5?

   b) Qual é a ordem do termo 10?

Resolução

a) $u_n = \dfrac{7n-1}{n+11} = \dfrac{7.5-1}{5+11} = \dfrac{34}{16} = \dfrac{17}{8}$

b) $u_n = \dfrac{7n-1}{n+11} = \dfrac{7.10-1}{10+11} = \dfrac{69}{21} = \dfrac{23}{7}$

simples, é só substituir o **n** por 5 no primeiro caso e, no segundo caso por 10. porque o número de ordem é e você já sabe qual é o significado de n quando é dado o termo geral da sucessão.

2. Dada a sucessão $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{5}{8}; \dfrac{7}{11}; \dfrac{9}{14}; \ldots\right)$.

   a) Determine o 6º termo da sucessão.

   b) Determine o termo geral da sucessão.

   c) Verifique se $\dfrac{33}{50}$ é termo da sucessão.

Resolução

a) O 6º termo da sucessão é $\dfrac{11}{17}$

b) O termo geral é $\dfrac{2n-1}{3n-1}$; observe que os numeradores dos termos da sucessão são ímpares e os denominadores diferem de 3 unidades. Faça os cálculos para vários números chegará a solução dada

c) vamos continuar a atribuir valores a n no termo geral da sucessão até encontrarmos o valor dado, se isso não acontecer significa que que o valor dado não é termo da sucessão: veja

$$\frac{2.17-1}{3.17-1}=\frac{34-1}{51-1}=\frac{33}{50}$$

Se n for 17 o termo é exactamente $\frac{33}{50}$

3. Vamos estudar a monotonia das seguintes sucessões

a) $a_n=3n-1$ b) $b_n=1-3n$ c) $c_n=(-1)^n+2n$

vamos nos basear nas definições a sucessão **é Crescente** quando**:** $u_{n+1}-u_n>0$; ***decrescente :*** $u_{n+1}-u_n<0$ e ***Constante:*** $u_{n+1}-u_n=0$ para decidir sobre a monotonia das sucessões. A partir do termo geral, podemos escolher diferentes pares de números reais consecutivos e estudemos o comportamento da sucessão:

$a_n=3n-1$ para n=1 e n=2 teremos:

$$a_n=3n-1\Rightarrow\begin{cases}a_1=3.1-1=2\\a_2=3.2-1=5\end{cases}$$

Logo: $a_2-a_1>0\Rightarrow 5-2>0$ significa que a sucessão é **crescente**.

b) $b_n=1-3n$ para n=1 e n=2 teremos:

$$b_n=1-3n\Rightarrow\begin{cases}b_1=1-3.1=-2\\b_2=1-3.2=-5\end{cases}$$

Logo: $b_2-b_1<0\Rightarrow -5-2<0$ significa $<$ que a sucessão é **decrescente.**

c) $c_n = (-1)^n + 2n$ para n=3 e n=4 teremos:

$$c_n = (-1)^n + 2n \Rightarrow \begin{cases} b_3 = (-1)^3 + 2.3 = -1+6=5 \\ b_4 = (-1)^4 - 4.4 = 1-16 = -15 \end{cases}$$

Logo: $b_4 - b_3 < 0 \Rightarrow -15 - 5 < 0$ significa que a sucessão é **decrescente.**

Avaliação

Avaliação

1. Seja dada a sucessão dos números primos

   (2, 3, 5, 7, 11, ...).

   Determine o 2º, 5º e 10º termos dessa sucessão.

2. Seja dada a sucessão (2; 4; 8; 16; 32; ...)

   a) Determine o termo de ordem 2, 4, 6, n.

   b) Qual é a ordem do termo 16, 1024?

3. Dada a sucessão (3; 6; 9; 12; 15; ...)

   a) Determine o termo geral dessa sucessão.

   b) Verifique se 395 é termo da sucessão.

4. Determine o termo geral para cada uma das seguintes sucessões:

   a) 1; -2; 3; -4; 5; ...

   b) 1; 8; 27; 64; 125; ...

   c) 0; 1; 2; 3; 4; ...

   d) 4; 9; 16; 25; 36; ..

   f) $\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; -\frac{7}{8}; \frac{9}{10}; \ldots$

5. Estude a monotonia das seguintes sucessões:

   a) $d_n = -n^2 + n$ b) $e_n = \frac{2n-1}{n}$ c) $f_n = \frac{3}{n^2+1}$

   g) $g_n = (-1)^n$

Lição 2

Convergência e divergência de sucessões

Introdução

O conceito de convergência de sucessões esta relacionado com limite de uma sucessão pois, na linguagem comum “convergir para” significa “aproximar-se a” quando falamos de convergência de sucessões estamos a falar da tendêndia a atingir um determinado valor considerado limite dessa sucessão. No caso contrário a sucessão pode divergir. Mas nesta lição você irá perceber bem o significado disso através da representação gráfica das sucessões:

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Distnguir* a sucessão convergente da divergente.

Convergência e divergência de sucessões

Caro estudante, realizemos em conjunto as actividades que se seguem para melhor entender

Seja $a_n = \dfrac{n-2}{n}$.

a) Determine

$a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; a_{10}; a_{100}; a_{1000}; a_{1000000}$

b) Represente essa sucessão graficamente.

c) Trace a assímptota horizontal do gráfico.

d) A partir de que ordem os termos dessa sucessão são mais próximos de 1 a menos de $0{,}001$?

Sucessões convergentes:

Uma sucessão de termo geral a_n diz-se **convergente** se o valor do limite é constante; ié, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, com $A \in R$; no caso contrário, diz-se que a sucessão é **divergente**.

Sucessões infinitamente pequenas e sucessões infinitamente grandes:

<u>Definição</u>: Uma sucessão x_n diz se **infinitamente pequena** ou que é um **infinitésimo** sse: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exemplos:

São infinitamente pequenas as sucessões:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad b_n = \frac{2}{n}; \quad c_n = \frac{3000}{n^2}$$

<u>Definição</u>: Uma sucessão y_n diz-se infinitamente grande se a partir duma certa ordem os seus termos, em valor absoluto, ultrapassam um número grande qualquer. Escreve-se: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Exemplos:

São infinitamente grandes as sucessões:

$$a_n = 2^n; \quad b_n = n; \quad c_n = \frac{n^2+3}{4000}$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Sucessões convergentes:

Uma sucessão de termo geral a_n diz-se **convergente** se o valor do limite é constante; ié, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, com $A \in R$; no caso contrário, diz-se que a sucessão é **divergente**.

Sucessões infinitamente pequenas e sucessões infinitamente grandes:

Uma sucessão x_n diz se **infinitamente pequena** ou que é um **infinitésimo** sse: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Uma sucessão y_n diz-se **infinitamente grande** se a partir duma certa ordem os seus termos, em valor absoluto, ultrapassam um número grande qualquer. Escreve-se: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Actividades

Actividades

1. Represente, graficamente, as seguintes sucessões e diga se em cada caso se a sucessão é convergente ou divergente:

a) $a_n = 2^n$ b) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $c_n = n^2$ d) $d_n = (-1)^n$

f) $f_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

Avaliação

Avaliação

1. Dadas as sucessões

$$a_n=\frac{1}{n};\quad b_n=n;\quad c_n=(-1)^n;\quad d_n=n^2;\quad e_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Diga quais delas são:

a) Convergentes.

b) Divergentes.

c) Infinitamente pequenas.

d) Infinitamente grandes.

Lição 3

Limite de uma sucessão

Introdução

Depois de definirmos a sucessão e acharmos o seu termo geral, você estudou também as sucessões convergentes e divergentes. Agora iremos avançar estudando como calcular o limite de uma sucessão, você vai aprofundar os seus conhecimentos sobre a sucessão. Quais os princípios básicos para o limite de uma sucessão, as propriedades e teoremas de alguns limites de sucessões específicos bem como as formas de levantar os vários casos de indeterminação que podem ser encontradas ao longo dos cálculos. Porém, você ainda deve-se recordar das propriedades de potenciação e radiciação e das regras das operações com polinómios.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Calcular* limite duma sucessão.
- *Aplicar* as regras para levantar diferentes tipos de indeterminação.

Objectivos

Limite de uma sucessão

No cálculo de limites é importante termos em conta que existem regras pré-estabelecidas. Assim para $a > 0;\ \ b > 0$ temos que:

N°	**Regras**	**Exemplo**

1	$a^{\infty}=\infty$	$2^{\infty}=\infty$
2	$a+\infty=\infty$	$4+\infty=\infty$
3	$-a^{\infty}=-\infty$	$-2^{\infty}=-\infty$
4	$a-\infty=-\infty$	$4-\infty=-\infty$
5	$(-1)^{\infty}$ se o expoente é par: $(-1)^{\infty}$ =1	$(-2)^{\infty}=2^{\infty}.(-1)^{\infty}=+\infty$
	se o expoente for impar: $(-1)^{\infty}$ = -1	$(-2)^{\infty}=2^{\infty}.(-1)^{\infty}=-\infty$
6	$\frac{a}{\infty}=0$	$\frac{5}{\infty}=0$
7	$\frac{0}{a}=0$	$\frac{0}{123}=0$
	$\frac{0}{-a}=0$	$\frac{0}{-123}=0$
8	$\frac{a}{0}=\infty$ ex $\frac{3}{0}=\infty$	$\frac{3}{0}=\infty$
9	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}=0$ se $a<b$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}=0$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty}=\infty$ se $a>b$	$\left(\frac{7}{3}\right)^{\infty}=0$

	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\infty}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\infty}=\infty$ se o expoente for $-\infty$, transforma-se em potência de expoente positivo bastando trocar a posição de a e b.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-\infty}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}=\infty$

Teorema: Seja $y_n = \frac{1}{x_n}$, então:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \ \wedge \ x_n \neq 0, \forall n \in N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

Exemplos:

1) $x_n = n$ é infinitamente grande $\Rightarrow$ $y_n = \frac{1}{n}$ é infinitamente pequena

2) $x_n = \frac{3000}{n^2}$ é infinitamente pequena $\Rightarrow$ $y_n = \frac{n^2}{3000}$ é infinitamente grande.

Teorema: Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões convergentes, então:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n . y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n . \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c . y_n = c . \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, com $y_n \neq 0, \forall n \in N$ e (y_n) não é infinitamente pequena.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ c uma constanre real .

f) $Se\ x_n = a^n$, com $n \in N$, $a \in R$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & se\ |a| > 1 \\ 0, & se\ |a| < 1 \\ 1, & se\ a = 1 \\ \nexists, & se\ a = -1 \end{cases}$$

Exemplos: Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{2n-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}\left(3+\cancel{\dfrac{2}{n}}\right)^{0}}{\cancel{n}\left(2-\cancel{\dfrac{1}{n}}\right)_{0}} = \dfrac{3}{2}$

Levantamento de uma indeterminação

Ao realizar o cálculo com limites podemos chegar a uma indeterminação. A seguir vamos mostrar como se pode levantar os diferentes tipos de indeterminação a saber:

1. Indeterminação do tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

se $\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{(n)}}{P_{(n)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, divide-se $Q_{(n)}$ e $P_{(n)}$ por n^k, onde k é o grau do polinómio $P_{(n)}$,ou seja é amaior potência de n no denominador.

Nota : na prática também se pode dividir $Q_{(n)}$ e $P_{(n)}$ por n^k, onde k é o grau do polinómio de menor grau entre $Q_{(n)}$ e $P_{(n)}$.

2. **Indeterminação do tipo** $\left[\frac{0}{0}\right]$

se $\lim_{n\to 0}\frac{Q_{(n)}}{P_{(n)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$, factorizam-se os polinómios $Q_{(n)}$ e $P_{(n)}$ e simplificam-se as expressões semelhantes .

3. **Indeterminação do tipo** $[0.\infty]$

se $\lim_{n\to a}Q_{(n)}.P_{(n)}=[0.\infty]$ faz-se a transformação para o tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$0.\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\left[\frac{0}{0}\right];\ \text{como}\ \frac{1}{\infty}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a}Q_{(n)}.P_{(n)}=\lim_{n\to a}\frac{Q_{(n)}}{\frac{1}{P_{(n)}}}$$

4. **Indeterminação do tipo** $[\infty-\infty]$

se $\lim_{n\to a}\left[Q_{(n)}-P_{(n)}\right]=[\infty-\infty]$

faz-se a transformação:

$$Q_{(n)} - P_{(n)} = \left(\frac{1}{P_{(n)}} - \frac{1}{Q_{(n)}}\right) : \frac{1}{Q_{(n)}.P_{(n)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a}\left(Q_{(n)} - P_{(n)}\right) = \lim_{n\to a}\left(\frac{1}{P_{(n)}} - \frac{1}{Q_{(n)}}\right) : \frac{1}{Q_{(n)}.P_{(n)}}$$

Nota : se $\lim\limits_{n\to a}\left(\sqrt{Q_{(n)}} - \sqrt{P_{(n)}}\right) = [\infty - \infty]$

Faz-se a transformação :

$$\sqrt{Q_{(n)}} - \sqrt{P_{(n)}} = \frac{\left(\sqrt{Q_{(n)}} - \sqrt{P_{(n)}}\right)\left(\sqrt{Q_{(n)}} + \sqrt{P_{(n)}}\right)}{\left(\sqrt{Q_{(n)}} + \sqrt{P_{(n)}}\right)},$$

ou seja, multiplicação pelo conjugado.

O número de Neper e o limite notável

A sucessão $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é monótona crescente,limitada e converge para o número irracional e ≈ 2,7182811828... também chamado constante de Euler ou número de Neper. Assim: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$

Neste tipo de limites (limite notável) é frequente obter-se indeterminações do tipo $\left(1^{\infty}\right)$. Neste caso para o seu levantamento pode se usar a seguinte fórmula:

<u>Teorema:</u> Sejam a_n e b_n 2 sucessões tais que:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \quad e \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 1)b_n}$$

Exemplo. Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cancel{1}+\frac{3}{n}-\cancel{1}\right)n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}}=e^{3}$$

5. **Indeterminação do tipo** $\left[1^{\infty}\right]$

$$\lim_{n\to a}Q_{(n)}^{\;P_{(n)}}=\left[1^{\infty}\right]$$

Calcula-se primeiro o limite: A= $\lim\limits_{n\to a}\left(Q_{(n)}-1\right).P_{(n)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to a}Q_{(n)}^{\;P_{(n)}}=e^{A}$,

Onde: " e " é o número de Nepper; $e=2{,}71828182818281...$

Nota: se $\lim\limits_{n\to a}Q_{(n)}=0$ e $\lim\limits_{n\to a}P_{(n)}=0$ então $A=\lim\limits_{n\to a}Q_{(n)}.P_{(n)}$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Em geral

✓ $$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p+\ldots+a_2n^2+a_1n+a_0}{b_qn^q+\ldots+b_2n^2+b_1n+b_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}$$

✓ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\infty,\quad se\ \ p>q$$

✓ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=0,\quad se\ \ p<q$$

✓ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\frac{a_p}{b_q},\quad se\ \ p=q$$

Limite duma sucessão exponencial *Se* $x_n=a^n$, com $n\in N$, $a\in R$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}\infty, & se\ |a|>1\\ 0, & se\ |a|<1\\ 1, & se\ a=1\\ \nexists, & se\ a=-1\end{cases}$$

O número de Neper é dado pela expressão **:**

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\underset{n\to\infty}{n}})^n=e$$

Teorema: Sejam an e bn 2 sucessões tais que**:**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \quad e \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1) b_n}$

Tipos de indeterminação

$$\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right];[0.\infty];[\infty-\infty];\left[\infty^0\right];\left[1^\infty\right];\left[0^0\right]$$

Vamos agora realizar em conjunto as actividades que se seguem

Actividades

Actividades

Depois do resumo conseguiu reter quase todos os princípios básicos para os limites, as propriedades e teoremas de alguns limites bem como as formas de levantar as várias indeterminações que podem ser encontradas durante os cálculos. Porém, você ainda deve-

Se se recordar das propriedades de potenciação e radiciação bem como das regras para operações com polinómios.

Prossigamos, vai ser fácil e bonito

1) Calcule os limites**:**

A resolução será baseada na colocação do factor em evidência dos polinómios envolvidos, aplicação de princípio $\frac{a}{\infty} = 0$ de infinitésimos assim como o $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-7}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{7}{n}\right)}{n}=2$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{4-3n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(\frac{4}{n}-3\right)}=-1$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2+3n-5n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^3}-\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$

f) $\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{3n^2+2n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\left(8-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{n.3}=0$

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-3n+4n^2}{5n^2-6n+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^2}+4\right)}{n^2\left(5-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{n.4}{5}=\infty$

h) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{-n^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{n^3}{n^2\left(-1+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{-1}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3-n^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2n^3}{n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}\right)}=2$$

i) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8n-5}{n+10}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n\left(8-\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{10}{n}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8}=2$$

repare que na alínea i) temos uma expressão com radicais que a primeira é assustadora mas, o processo é o mesmo é só considerar os radicandos e efectuar todos os cálculos dentro do radical e por último achar a raíz do resultado que vai obter e prontos.

2) Determine os seguintes limites:

Para estes limites vamos recorrer ao Número de Neper "e" pois este corresponde ao $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

<u>Teorema:</u> Sejam a_n e b_n 2 sucessões tais que: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, então $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$

Para levantar indeterminações do tipo (1^∞). É importante analisar o limite dado antes de mais nada para decidir sobre as transformações a serem feitas. Pois, as vezes só precisamos de usar o $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$; mas também pode ser necessário aplicar o teorema

Por exemplo:

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n}$ pode ser transformado em

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^2=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2=e^2$$

Ou

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.e = e^2$$

Enfim, vamos atacar os exrcícios seguintes:

Agora, não temos como não aplicarmos o teorema para tornar os cálculos muito fáceis. Pois, só precisaremos de saber multiplicar e simplificar polinómios envolvidos no expoente de base "e".

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{\left(1-\frac{2}{n}-1\right)n} = e^{-\frac{2}{n}.n} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

neste caso aplicamos a regra de potência de uma potência,depois simplificamos os termos simétricos portanto 1 e -1 e os termos iguais portanto 2n e n e finalmente aplicamos a definição de potência de expoente negativo.

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+3} = e^{\left(1+\frac{2}{n}-1\right)(n+3)} = e^{\frac{2(n+3)}{n}} = e^{\frac{2n}{n}}.e^{\frac{6}{n}} = e^2.e^0 = e^2.1 = e^2$$

neste caso simplificamos os termos simétricos portanto 1 e -1 e aplicamos a multiplicação de polinómios,depois simplificamos a fracção algébrica no expoente e finalmente, aplicamos a definição de potência de expoente zero que é igual 1.

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} = e^{\left(1+\frac{1}{3n}-1\right)2n} = e^{\frac{2n}{3n}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

repetimos os passos em a) e b) apenas escrevemos a potência de expoente fraccionário na forma de radical, você lembra desta relação quando falou de radiciação na 8ª classe.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2} = e^{\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}-1\right)n^2} = e^{\left(\frac{(n^2+1)-(n^2+5)}{n^2+5}\right)n^2} = e^{\left(\frac{n^2+1-n^2-5}{n^2+5}\right)n^2} = e^{\left(\frac{-4n^2}{n^2+5}\right)} =$

$= e^{\left(\frac{-4n^2}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}\right)} = e^{\left(\frac{-4n^2}{n^2}\right)} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

repetimos os passos da alínea a)

3) recorde-se que:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & se\ |a|>1 \\ 0, & se\ |a|<1 \\ 1, & se\ a=1 \\ \nexists, & se\ a=-1 \end{cases}$$

---

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-5)^n = \infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Na resolução do exercício que se segue, você terá que rever muito bem as propriedades de potênciação,enquanto estiver aplicando as propriedades dos limites que você acaba de estudar

Porque vai trabalhar com limites de potências, preste atenção aos passos que serão dados para o nosso exercicío:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{n+1}-2^n}{3^{n+2}+3^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^n(2-1)}{3^n(3^2+3^{-1})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^n(2-1)}{3^n(9+\frac{1}{3})} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{3}{28} = 0$$

Isso mesmo, já descobriu que é simples?

Primeiro: aplicou a regra do produto de potências com bases iguais para os numerador e denominador, mas sentido contrário "da direita para esquerda", assim para:

$$2^{n+1}=2^n.2^1$$
$$3^{n+1}=3^n.3^1$$
$$3^{n-1}=3^n.3^{-1}=\frac{3^n}{3^1}$$

Segundo : colocou em evidência os factores comuns para o numerador 2^n é para o denominador é 3^n;

Terceiro: simplificou as expressões dentro de parênteses obteve $\frac{3}{28}$ e aplicou a regra da divisão de potências com expoentes iguais obteve $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ como resultado tem o limite de um produto que igual ao produto dos limites dos factores : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{28} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{28}$

Por último calculou os limites dos factores, como já sabe o limite da potência $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0 \text{ para } |a|<1$ neste caso porque a é $\frac{2}{3}$.

Está de parabéns, para este tipo de limite deve proceder exactamente desta maneira.

Agora, resolva sozinho os seguintes exercícios

Avaliação

Avaliação

1. calcule os seguintes limites

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{4-3n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2}{2n^3-3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{n^3+n^2+4}$

2. Calcule os seguintes limites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 5^n + 2\cdot 3^n}{2\cdot 5^n + 4\cdot 3^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 4^{n+2} + 3^{n+1}}{4\cdot 3^{n+2} + 9\cdot 4^{n+1}}$

3. Calcule os seguintes limites irracionais:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+4n}}{5n-7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}}{\sqrt{9n^2-n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^8-2n}-n}{\sqrt{n^4+2n^2}+7n}$

4. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n-2}{5n-3}\right)^{3n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{n}$

Lição 4

Progressão Aritmética

Introdução

Algumas sucessões tem um comportamento especial e por isso mesmo recebem um nome especial conforme o seu comportamento. Na lição que se segue vamos analisar este tipo de sucessões a começar por aquelas que recebem o nome de progressões artiméticas.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Identificar* uma progressão aritmética.
- *Determinar* o termo geral duma PA.

Objectivos

Progressão Aritmética

Vamos nesta aula simplificar cada vez mais o estudo das sucessões, tomando sucessões específicas denominadas progressões. Existem dois tipos de progressões, a saber, progressão aritmética designada por **P.A** e progressão geométrica designada por **P.G**

a) **A progressão aritmética "P.A."**- é uma sucessão cuja diferença entre dois termos consecutivos é constante. Exemplo: 2,6,10,18...

Simbolicamente: $a_{n+1} - a_n = \mathrm{d}$, $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$

o termo geral duma P.A. é: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1).d}$, onde:

a_1 - é o primeiro termo

n - ordem do termo $(n \in N)$

d - diferença entre dois termos consecutivos

Nota: também se usa " r " no lugar de "d"

A soma de n-termos consecutivos " S_n " duma P.A. pode-se determinar pela relação:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$$

Relação entre dois termos quaisquer:

$a_k = \mathrm{a_k} + (n-k)d$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Uma **progressão aritmética** é uma sucessão cuja diferença **d** entre dois termos consecutivos é constante.

Simbolicamente: $a_{n+1} - a_n = \mathrm{d}, \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$

O termo geral de uma PA é : $a_n = \mathrm{a}_1 + (n-1)d$

A expressão que dá a relação entre dois termos quaisquer de uma PA é a seguinte: $a_k = \mathrm{a}_\mathrm{k} + (n-k)d$

A soma de n-termos consecutivos " S_n " duma P.A. pode-se determinar pela relação:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$$

Actividades

Actividades

Caro estudante não se atrapalhe, pois você já conhece as propriedades e fórmulas para os cálculos que iremos pois acaba de ver o resumo

1. Diga, quais das sucessões seguintes são progressões aritméticas:

a) (2; 4; 6; 8; ...)   b) (1; 3; 5; 7; ...)

c) (2; 4; 8; 16; ...)   d) (1; -3; 5; -7; ...)

Resolução

a partir da fórmula para o cáculo do termo geral de uma sucessão $a_n = \mathrm{a}_1 + (n-1)d$ verificamos se os termos da sucessão dada obedecem a condição.

a) $a_2 = 2+(2-1).2 = 4$

$a_3 = 2+(3-1).2 = 6$

$a_4 = 2+(4-1).2 = 8$

Resposta: A progressão é aritmética

b) $a_1 = 1$

$a_2 = 1+(2-1).2 = 3$

$a_3 = 1+(3-1).2 = 5$

$a_4 = 1+(4-1).2 = 7$

Resposta : A progressão é aritmética

c) A diferença entre dois termos consecutivos não é constante o que contraria a definição de PA por isso, não é progressão aritmética

Resposta: A progressão é aritmética

d) A diferença entre dois termos consecutivos não é constante o que contraria a definição de PA por isso, não é progressão aritmética

2. Duma progressão aritmética (an) sabe-se que a1= 5 ;

$a_2 = 9$. Determine d e a_3.

Resolução

Dados: $a_1 = 5 \quad a_2 = 9$

Segundo a definição $d = a_{n-1} - a_n = 9 - 5 = 4$ e apartir de $a_n = a_1 + (n-1)d$ podemos determinar

$$a_3 = a_1 + (3-1)d = 5 + (3-1).4 = 13$$

Simples, você tem cálculos facilitados para os dados do problema

3. calcule S_{25} duma progressão aritmética (a_n), se $a_1 = 29$ e d = -1,5.

Resolução

Dados: $a_1 = 29$ e d = -1,5 agora vamos aplicar a fórmula para a soma de n termos de uma PA.

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}\left[2.29 + (25-1)(-1,5)\right] = 12,5(58-36) = 275$$

Avaliação

Avaliação

1. Diga, quais das sucessões seguintes são progressões aritméticas:

   a) (3; 7; 11; 15; ...)   b) (7; 7; 7; 7; ...)

   c) $\left(\sqrt{1}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \ldots\right)$ d) $\left(1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots\right)$

2. Ache o décimo quarto termo a_{14} e o termo geral an das progressões aritméticas seguintes:

   a) $(a_n) = (5; 9; 13; 17; ...)$ b) $(a_n) = (7; 4; 1; -2; ...)$

3. Determine a diferença d e o primeiro termo a1 duma progressão aritmética, sabendo que o seu nono termo é 2 e o seu décimo terceiro termo é -10.

4. Quantos números ímpares há entre 100 e 10 000?

5. Calcule S_{12} duma progressão aritmética (an), se a1 = -10 e d = 7

Lição 5

Progressão Geométrica

Introdução

Já estudou as primeiras susseção especiais. Mas existem outras sucessões especiais de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão. A seguir iremos nos oucupar no estudo destas sucessões que chamaremos progressões geométricas.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *determinar* a razão e o termo geral de uma progressão geométrica.
- *Resolver* problemas aplicando progressões arimétrica e geométrica.

Objectivos

Progressão Geométrica

Vamos agora definir em conjunto as variáveis importantes bem como tratar das fórmulas para os cálculos

Razão da progressão geométrica é definida como o quociente entre os termos consecutivos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,,\ \forall n \in \mathrm{N}$$

Exemplo: Determine a razão duma progressão geométrica, se: $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_5 = 13\frac{1}{2}$

Resolução

Se o termo geral é $a_n = \mathrm{a}_1.q^{n-1}$ então:

$$a_5 = \mathrm{a}_1.q^{5-1} \Leftrightarrow 13\frac{1}{6} = \frac{1}{6}.q^4$$

$$q^4 = 13\frac{1}{6}.\frac{6}{1} = 13 \Rightarrow \mathrm{q} = \sqrt[4]{13}$$

Relação entre dois termos quaisquer

Para qualque PG a expressão $a_n = \mathrm{a}_\mathrm{k}.q^{n-k}$ estabelece a relação entre dois termos quaisquer. Isto quer dizer conhecendo dois termos quaisquer de uma PG é possível determinar a sua razão e desta forma encontrar os restantes termos da mesma.

Exemplo: Determine a razão duma progressão geométrica, se:

$$a_{29} = 8, \quad a_{32} = \frac{1}{8}$$

Resolução

Se a expressão que relaciona dois quaisquer termos de uma PG é $a_n = \mathrm{a}_\mathrm{k}.q^{n-k}$ então:

$$a_{32} = \mathrm{a}_{29}.q^{32-29} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 8q^3$$

$$q^3 = \frac{1}{8}.\frac{1}{8} = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

Soma de n-termos de uma PG

A soma de n-termos consecutivos “ S_n “ duma P.G. pode-se determinar pela relação:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

Se $-1 < q < 1$, é válida a relação: $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Relação entre dois termos quaisquer:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

A soma de n-termos consecutivos " S_n " duma P.G. pode-se

determinar pela relação: $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$

Se $-1 < q < 1$, é válida a relação: $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}$

Actividades

Actividades

1. Ache o termo geral das seguintes sucessões:

a) (3; -6; 12; -24; 48; ...)

Dados:

$a_1 = 3$

1) q? $q = \frac{-6}{2} = -3$

2) $a_n = a_1 . q^{n-1} = 3.(-3)^{n-1}$

Isso mesmo, acertou calculando em primeiro lugar a razão uma vez que conhece o primeiro termo da progressão, pois o termo geral é expressa em função do primeiro termo e a razão.

2. Determine, indicando a razão no caso afirmativo, se os três números seguintes estão em progressão geométrica:

a) 4; 9; 16 b) 2; -6; 18 c)1; 1+a; 1+2a + a_2

Resolução

a) 4; 9; 16

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \text{ , } 9 = 4.q^{2\text{-}1} \Rightarrow q = \frac{9}{4}$$

Não é uma PG pois sendo $q = \frac{9}{4}$, $16 \neq 9.\frac{9}{4} = 20.25$.

b) 2; -6; 18

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \text{ , } -6 = 2.q^{2\text{-}1} \Rightarrow q = -3$$

É uma PG pois sendo $q = -3,\ 18 = -6.(-3)$.

c)1; 1+a; 1+2a + a_2

$$a_n = a_1.q^{n-1}\ ,\ 1 + a = 1.q^{2-1} \Rightarrow q = 1 + a$$

Não é uma PG pois sendo

$$q = 1 + a,\ a_3 \neq 1 + 2a + a_2 = (1 + a).a_2 = a_2 + a.a_2 = a_2 + a(1 + a) = a_2 + a + a^2$$

Isso mesmo, acertou calculando em primeiro lugar a razão uma vez que conhece o primeiro termo da progressão, pois o termo geral é expressa em função do primeiro termo e a razão.

3. Determine o décimo termo das seguintes progressões geométricas:

a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1; \ldots\right)$

Resolução

$$a_n = a_1.q^{n-1}\ ,\ q = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{2}{1} = \sqrt{2}$$

$$a_{10} = a_1.q^{10-1} = \frac{1}{2}.\left(\sqrt{6}\right)^9 = \frac{6^4\sqrt{6}}{2}$$

b) $\left(3; 2; \frac{4}{3}; \frac{8}{9}; \frac{16}{27}; \ldots\right)$

Dados:

$a_1=3$

1) q ? ; $q=\frac{2}{3}$

2) $a_n = a_1.q^{n-1}=3.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4. Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

Solução:

Sejam (a_1, a_2, a_3, …) a PA de razão **r** e (g_1, g_2, g_3, …) a PG de razão **q**. Temos como condições iniciais:

(1) $a_1 = g_1 = 4$

(2) $a_3 > 0$, $g_3 > 0$ e $a_3 = g_3$

(3) $a_2 = g_2 + 2$

Reescrevendo (2) e (3) utilizando as fórmulas gerais dos termos de uma PA e de uma PG e (1) obtemos o seguinte sistema de equações:

(4) $a_3 = a_1 + 2r$ e $g_3 = g_1.q^2 \Rightarrow 4 + 2r = 4q^2$

(5) $a_2 = a_1 + r$ e $g_2 = g_1.q \Rightarrow 4 + r = 4q + 2$

Expressando, a partir da equação (5), o valor de **r** em função de **q** e substituindo **r** em (4) vem:

(5) $\Rightarrow r = 4q + 2 - 4 \Rightarrow r = 4q - 2$

(4) $\Rightarrow 4 + 2(4q - 2) = 4q^2 \Rightarrow 4 + 8q - 4 = 4q^2 \Rightarrow 4q^2 - 8q = 0$

$\Rightarrow q(4q - 8) = 0 \Rightarrow \mathbf{q = 0}$ ou $4q - 8 = 0 \Rightarrow \mathbf{q = 2}$

Como g3 > 0, **q** não pode ser zero e então **q = 2**. Para obter **r** basta substituir **q** na equação (5):

$r = 4q - 2 \Rightarrow r = 8 - 2 = 6$

Para concluir calculamos a_3 e g_3:

$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 4 + 12 = 16$

$g_3 = g_1.q^2 \Rightarrow g_3 = 4.4 = 16$

5. O sexto termo de uma PG, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e -24, tomados nessa ordem, é:

Solução:

Para determinar os dois meios geométricos da PG cujos extremos são 3 e -24 precisamos calcular, primeiro, sua razão q, com n = 4. Pela fórmula do termo geral temos que:

$a_4 = a_1.q^{4-1} \Rightarrow -24 = 3q^3 \Rightarrow q^3 = -24/3 = -8 \Rightarrow q = -2$

Logo a PG é (3; -6; 12; -24; …) e seu sexto termo é obtido, também, através da fórmula do termo geral:

$a_6 = a_1q^{6-1} \Rightarrow a_6 = 3(-2)^5 = -3.32 = -96$

Avaliação

Avaliação

1. O quarto termo duma progressão geométrica é igual a $\frac{3}{2}$, e o nono termo é igual a 48. Determine:

    a) a razão;

    b) primeiro termo

    c) décimo termo

    d) a soma dos cinco primeiros termos dessa progressão.

2. O valor de n que torna a seqüência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

3. De uma progressão geométrica (an), de termos positivos, sabe-se que

    $a_1 + a_2 = 12$ e $a_3 + a_4 = 48$.

    a) Ache os primeiros quatro termos.

    b) Ache a soma dos primeiros sete termos.

Soluções Módulo 6

Soluções do Modulo 6

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

Lição 1

1. Seja dada a sucessão dos números primos

   (2, 3, 5, 7, 11, ...).

   Determine o 2º, 5º e 10º termos dessa sucessão.

Resolução: a sucessão de números primos tem como fórmula para o termo geral $a_n = 2n - 1$

$a_2 = 2.2 - 1 = 3$; $a_5 = 2.5 - 1 = 9$; $a_{10} = 2.10 - 1 = 19$

2. Seja dada a sucessão (2; 4; 8; 16; 32; ...)

   a) Determine o termo de ordem 2, 4, 6, n

$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_4 = 4^2 = 16$$
$$a_6 = 6^2 = 36$$
$$a_n = n^2$$

b) Qual é a ordem do termo 16, 1024?

Dada a sucessão (3; 6; 9; 12; 15; ...)

Resolução

O termo geral da sucessão dada é 3n, por isso: $a_n = 3n$ para o termo de ordem 16 teremos: $a_{16} = 3.16 = 48$ e $a_{1024} = 3.1024 = 3072$

3. Determine o termo geral para cada uma das seguintes sucessões:

Resolução

a) 1; -2; 3; -4; 5; ...

$a_1 = 1$

1; 8; 27; 64; 125; ...

Resposta $a_n = (n+1)^3$

0; 1; 2; 3; 4; ...

Resposta $a_n = n+1$

4; 9; 16; 25; 36; ..

Resposta $a_n = (n+1)^2$

e) $\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; -\frac{7}{8}; \frac{9}{10}; ...$

Resposta $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

Estude a monotonia das seguintes sucessões:

a) $d_n = -n^2 + n$

$$d_n=(-1)^n+2n \Rightarrow \begin{cases} d_1=-1^2+1=0 \\ d_2=-2^2+2=-4+2=-2 \end{cases}$$

Logo: $d_2\text{-}d_1<0 \Rightarrow -2\text{-}0<0$ significa que a sucessão é **decrescente**

b) $e_n=\dfrac{2n\text{-}1}{n}$

$$e_n=\frac{2n\text{-}1}{n} \Rightarrow \begin{cases} e_1=\dfrac{2n\text{-}1}{n}=\dfrac{2.1-1}{1}=1 \\ e_2=\dfrac{2n\text{-}1}{n}=\dfrac{2.2-1}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Logo: $e_2\text{-}e_1>0 \Rightarrow \dfrac{3}{2}\text{-}1>0$ significa que a sucessão é **crescente**

Lição 2

1. Diga quais delas são:

$a_n=\dfrac{1}{n}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ convergente

$b_n=n$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} n=\infty$ divergente

$c_n=(-1)^n$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}(-1)^n=$

$d_n=n^2$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} n^2=\infty$ divergente

$e_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$ convergente

a) Convergentes. $a_n=\dfrac{1}{n}$; $e_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$

b) Divergentes. $b_n=n$; $c_n=(-1)^n$; $d_n=n^2$;

c) Infinitamente pequenas. $a_n = \frac{1}{n}$; $\quad e_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

d) Infinitamente grandes. $b_n = n;$; $d_n = n^2$

Lição 3

1.calcule os seguintes limites

$$\text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{4-3n} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{5}{n}\right)}{n\left(\frac{4}{n}-3\right)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{c)} \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2}{2n^3-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(2-\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} = \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\text{f)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3+n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}\right)} = 3$$

$$2.a) \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n + 2\cdot 3^n}{2\cdot 5^n + 4\cdot 3^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(2.5^n + 3^n\right)}{2\left(5^n + 2.3^n\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5^n\left(2+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1+2.\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} =$$

$$= \frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+2.\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^{n+2}+3^{n+1}}{4\cdot 3^{n+2}+9\cdot 4^{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3.4^n.4^2+3^n.3}{4.3^n.3^2+3^2.4^n.4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\left(4^n.4^2+3^n\right)}{3^2\left(4.3^n+4^n.4\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4^n\left(4^2+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{3.4^n\left(\frac{3}{4}\right)^n+3.4}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}4^2+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+3\lim\limits_{x\to\infty}4}=\frac{16+0}{3.0+3.4}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

3. Calcule os seguintes limites irracionais:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+4n}}{5n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(3+\frac{4}{n}\right)}}{n\left(5-\frac{7}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{n.5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n}=\frac{1}{5}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}}{\sqrt{9n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^2\left(9-\frac{1}{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3.5}}{\sqrt{n^2.9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.\sqrt[3]{5}}{n.3}=\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8-2n-n}}{\sqrt{n^4+2n^2+7n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8\left(1-\frac{2}{n^7}\right)}-n}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8}-n}{\sqrt{n^4}+7n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2+7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}\right)}=1$$

4. Calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{5n-3}\right)^{3n} = e^{\left(\frac{5n-2}{5n-3}-1\right)3n} = e^{\left(\frac{(5n-2)-(5n-3)}{5n-3}\right)3n} = e^{\left(\frac{5n-2-5n+3}{5n-3}\right)3n} =$$

$$= e^{\frac{3n}{5n-3}} = e^{\frac{3n}{n\left(5-\frac{3}{n}\right)}} = e^{\frac{3}{5}}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}} = e^{\left(1+\frac{1}{2^n}-1\right)2^{n+1}} = e^{\frac{1}{2^n}.2^{n+1}} = e^{\frac{2^n.2^1}{2^n}} = e^2$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n = e^{\left(1+\frac{1}{n+3}-1\right)n} = e^{\frac{n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}} = e^1 = e$$

Lição 4

1. Diga, quais das sucessões seguintes são progressões aritméticas:

   a) (3; 7; 11; 15; ...)

   $d = 4$

Resposta: É progressão aritmética

   b) (7; 7; 7; 7; ...)

Não é progrssão aritmetica porque o termo da sucessão não varia portanto não se pode falar da diferença entre os termos

   c) $\left(\sqrt{1};\sqrt{3};\sqrt{5};\sqrt{7};\ldots\right)$

Resposta: É progressão aritmética a diferença entre os números é constante consequentemente será constante a diiferença entre as suas raízes

d) $(1^2; 2^2; 3^2; 4^2; ...)$

Resposta: É progressão aritmética a diferença entre os números é constante

2. Ache o décimo quarto termo a_{14} e o termo geral an das progressões aritméticas seguintes:

$(a_n) = (5; 9; 13; 17; ...)$

$$\text{Dados}: a_1 = 5$$
$$d = a_{n+1} - a_n = 9 - 5 = 4$$

$$a_{14} = 5 + (14-1).4 = 53$$

$$a_n = a_1 + (n-1).d = 5 + (n-1).4 = 4n+1$$

b) $(a_n) = (7; 4; 1; -2; ...)$

$$\text{Dados}: a_1 = 7$$
$$d = a_{n+1} - a_n = -3$$

$$a_{14} = 7 + (14-1).(-3) = 7 - 39 = -32$$

$$a_n = a_1 + (n-1).d = 7 + (-3n+3).(-3) = 9n-2$$

3. Determine a diferença d e o primeiro termo a1 duma progressão aritmética, sabendo que o seu nono termo é 2 e o seu décimo terceiro termo é -10

$$\text{Dados}: \ a_9 = 2 \quad a_{13} = -10$$

$$d = ?$$

$$d = a_{n+1} - a_n = -3$$

$$a_n = a_k + (n-k).d$$

$$-10 = 2 + (13-9).d$$

$$-10 = 4d \quad \Leftrightarrow d = -3$$

$$\text{Dados}: \ a_9 = 2 \quad a_{13} = -10$$

$$a_1 \ ?$$

$$-10 = a_1 + (13-1)(-3)$$

$$a_1 = 36 - 10 = 26$$

4. Quantos números ímpares há entre 100 e 10 000?

$$\text{Dados}: \ a_1 = 100$$
$$a_n = 10000$$

$$1) \ a_n = a_k + (n-k).d \Leftrightarrow 10000 = 100 + (10000-100).d \Leftrightarrow$$
$$10000 = 100 + 9900d \Leftrightarrow d = \frac{9900}{9900} = 1$$

$$2) \ a_n = a_1 + (n-1).d$$
$$10000 = 100 + (n-1).1 \Leftrightarrow 9900 = n-1 \Leftrightarrow n = 9901$$

Resposta: existem 4950 números ímpares.

5. Calcule S12 duma progressão aritmética (an), se a1 = -10 e d = 7

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]}$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2.(-10)+(12-1).7\right] = 6(-20+77) = 342$$

Lição 5

1. a) a razão;

$$a_4 = a_1.q^{4-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = a_1q^3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2q^3}$$

$$a_9 = a_1q^{9-1} = \frac{3}{2q^3}q^8 = \frac{3}{2}q^5 = 96 \quad \Leftrightarrow \quad 96 = 3q^5 \Rightarrow 32 = q^5 \Leftrightarrow q = 2$$

c) o primeiro termo

$$a_1 = \frac{3}{2q^3} = \frac{3}{2.2^2} = \frac{3}{16}$$

d) o décimo termo

$$a_{10} = .\frac{3}{16}2^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{3}{16}.512 = 96$$

d) a soma dos cinco primeiros termos dessa progressão.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

$$S_5 = \frac{\frac{3}{16}\left(1-2^5\right)}{1-2} = -\frac{3\left(-31\right)}{16} = \frac{93}{16}$$

4. O valor de n que torna a seqüência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

Solução:

Para que a sequência se torne uma PA de razão r é necessário que seus três termos satisfaçam as igualdades (aplicação da definição de PA):

(1) -5n = 2 + 3n + r

(2) 1 – 4n = -5n + r

Determinando o valor de **r** em (1) e substituindo em (2):

(1) => r = -5n – 2 – 3n = -8n – 2

(2) => 1 – 4n = -5n – 8n – 2 => 1 – 4n = -13n – 2

=> 13n – 4n = -2 – 1 => 9n = -3 => n = -3/9 = -1/3

Ou seja, -1 < n < 0 e, portanto, a resposta correta é a b).

Módulo 6 de Matemáica

Teste Preparação de Final de Módulo

Este teste, querido estudante, seve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1. Estude a monotonia

b) $f_n = \dfrac{3}{n^2+1}$

d) $g_n = (-1)^n$

2. calcule os seguintes limites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{4-3n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2}{2n^3-3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{n^3+n^2+4}$

3. Calcule os seguintes limites irracionais:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+4n}}{5n-7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}}{\sqrt{9n^2-n}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^8 - 2n} - n}{\sqrt{n^4 + 2n^2} + 7n}$

4. Calcule os seguintes limites notáveis:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n-2}{5n-3}\right)^{3n}$

5. qual é o décimo quinto termo da PA: (4, 10,......)?

6. Ache o quinto termo da PA (a+b; 3a-2b;....)

7. Numa PA de razão 5, o primeiro termo é 4.qual é a posição do termo igual a 44?

8. Quantos termos tem uma PA finita, de razão 3, sabendo que o primeiro termo é -5

9. A sequência (x+2, x-2, 3x-6,...) é uma PG (6,18,1458).calcule o quarto termo da sequência.

10. Numa PG o quinto termo é igual a 243. Calcule o seu primeiro termo sabendo que ele é igual a razão

Soluções do teste de preparação do Módulo 6

Resolução

1. Estude a monotonia

b) $f_n = \frac{3}{n^2+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{n^2+1} = 0$ infinitamente pequena

d) $g_n = (-1)^n$; $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^n$ divergente

2. Calcule os seguintes limites

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{4-3n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{4}{n}-3\right)} = \frac{3}{-3} = -1$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2}{2n^3-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}{n\cancel{^3}\left(2-\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{n} = \frac{5}{\infty} = 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3+n^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

3. Calcule os seguintes limites irracionais:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+4n}}{5n-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(3+\frac{4}{n}\right)}}{n\left(5-\frac{7}{n}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\sqrt{3}}{n5}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}}{\sqrt{9n^2-n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^2\left(9-\frac{1}{n}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{1}}{n\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8-2n}-n}{\sqrt{n^4+2n^2}+7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^8\left(1-\frac{1}{n^7}\right)}-n}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+7n}=\lim_{x\to n}\frac{n^2-n}{n^2+7n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{7}{n}\right)}=1$$

4. Calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}-1\right)\left(2^{n+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(2^{n+1}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2^{n+1}\right)}{2^n}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{2^n}.2}{\cancel{2^n}}}=e^2$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 1} = e$$

c)

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{5n-3}\right)^{3n} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5n-2}{5n-3}-1\right)3n} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{5n-3}\right)3n} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15n}{5n-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15\cancel{n}}{\cancel{n}\left(5-\frac{3}{n}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15}{5}} = e^{-3} = \frac{1}{e^{3}}$$

5. Qual é o décimo quinto termo da PA: (4, 10,......)?

$$a_n = 4,\quad a_{n+1} = 10 \;\Rightarrow d = 10-4 = 6 \quad \text{se} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{15} = 4 + (15-1).6 = 4 + 84 = 86$$

Resposta: o décimo quinto número é 86

6. Ache o quinto termo da PA (a+b; 3a-2b;....)

$$a_n = a+b,\quad a_{n+1} = 3a-2b \;\Rightarrow d = (3a-2b)-(a+b) = 2a-3b \quad \text{se}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = (a+b)+(5-1)(2a-3b). = (a+b)+4(2a-3b) = 9a-11b$$

Resposta: o quinto número é 9a -11b

7. Numa PA de razão 5, o primeiro termo é 4.qual é a posição do termo igual a 44?

Dados: $d = 5$; $a_1 = 4$ $a_n = 44$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 44 = 4 + (n-1)5 \Leftrightarrow 44 = 4 + 5n - 5 \Leftrightarrow 44 + 1 = 5n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 9$$

Resposta: O número 44 ocupa a nona posição

8. Quantos termos tem uma PA finita, de razão 3, sabendo que o primeiro termo é -5

Dados $a_1 = -5$; $d = 3$ pede−se n

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow n = (-5) + (n-1).3 \Leftrightarrow n = -5 + 3n - 3 \Leftrightarrow$$

$$n - 3n = -5 - 3 \Leftrightarrow -2n = -8 \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: A progressão tem 4 termos

A sequência (x+2, x-2, 3x-6,...) é uma PG (6,18,1458).calcule o quarto termo da sequência.

Dado que: X+2=6, x-2=18, 3x-6=1458 então:

$$x + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 4; \quad x - 2 = 18 \Rightarrow x_2 = 20 \qquad 3x - 6 = 1458 \Rightarrow x_3 = \frac{1464}{3} = 488$$

$$\text{como} \quad q = \frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow q = \frac{20}{4} = 5$$

$$\log o: \quad x_n = a_1.q^{n-1} \quad \Rightarrow x_4 = x_1.q^3 = 4.5^3 = 500$$

Resposta: o quarto termo da sequência é 500

Numa PG o quinto termo é igual a 243. Calcule o seu primeiro termo sabendo que ele é igual a razão

$$a_5 = 243 \;;\quad a_1 = d \quad \text{pede-se } a_1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = a_1 + (n-1)a_1 \Leftrightarrow 243 = a_1 + (5-1)a_1 \Leftrightarrow 243 = a_1 + 4a_1$$

$$\Leftrightarrow 5a_1 = 243 \Leftrightarrow a_1 = \frac{243}{5}$$

Resposta: o primeiro termo é igual a $\frac{243}{5}$