MÓDULO 5

Matemática

Funções e Trigonometria

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 5

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos auto instrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de dois anos inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

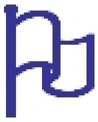
No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que “ ***o livro é o melhor amigo do homem***”. Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Funções

Introdução

Algumas situações ou problemas do nosso quotidiano conduzem ao estudo de variáveis e a relação entre elas. Por exemplo, consideremos as seguintes situações:

1. O preço de venda de um certo ítem de uma loja depende de quanto ele custa.
2. A altura de uma árvore depende da sua idade.
3. O tempo que um carro leva para ir de uma cidade a outra depende da velocidade que ele desenvolve.

Em cada uma destas situações, o valor de uma quantidade depende do valor de uma segunda quantidade. Se as quantidades forem variáveis, então uma delas será dependente do valor da outra. Quando o valor da variável independente (x) é conhecido, o valor da variável dependente (y) pode ser encontrado. Enfim, vamos aprofundar análise deste tipo de situações ao longo desta aula.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Estudar* relações.
- *Indentificar* relações que são funções.

Objectivos

Introdução à funções

Nesta lição importa muito estudar as diferentes relações entre duas variáveis com o objectivo de identificar aquelas relações que são **"Funções"**.

Na introdução nos referimos a três situações como exemplos para mostrar a presença de variáveis, vamos analisar as três situações para decidirmos qual é a variável dependente, qual é a variável independente

Na situação 1

O custo do item (c) é a variável independente e o preço de venda (p) é a variável dependente.

Na situação 2

Variável independente: idade
variável dependente: altura

Na situação 3

Variável independente: velocidade

Variável dependente: tempo

Como vimos, relação é uma correspondência existente entre conjuntos não vazios. A título de exemplo, se tomar-mos dois conjuntos A e B , sendo que o conjunto A é dos objectos ou das variáveis independentes e o B das imagens ou das variáveis dependentes. O conjunto A é denominado conjunto de partida e o conjunto B é denominado conjunto de chegada.

Agora preste atenção! Existem vários tipos de relações e você já sabe muito bem disso. Mas neste caso interessa-nos aquelas relações ou correspondência que associa a um valor do domínio a um único valor do contradomínio. A este tipo de relação dá-se o nome de **função ou aplicação.** Portanto, numa relação funcional, há somente um valor para a variável dependente, y, associada com qualquer valor da variável independente, x.

Quando os objectos ou imagens são números reais então a função é denominada função real.

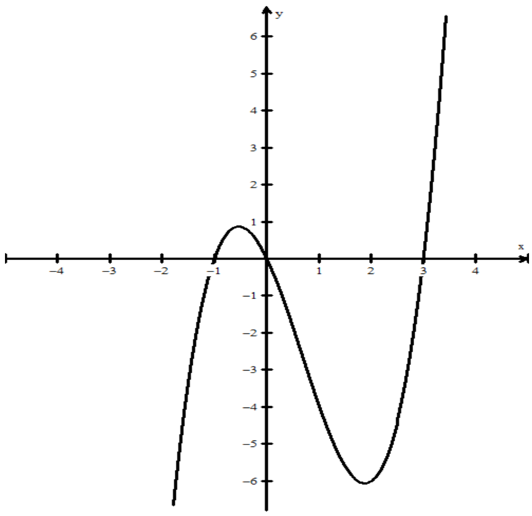
Podem ser distinguidos com base nas diferentes correspondências os seguintes tipos de funções:

<u>Função sobrejectiva</u>

Uma função real de variavel real é **sobrejectiva,** quando o **contradominio coincide com o conjunto de chegada.**

$\forall y \in R\ \exists x \in Df : f(x) = y \Leftrightarrow f$ **é sobrejectiva**

Geometricamente, qualquer recta horizontal corta o grafico de uma funcao **sobrejectiva** pelo menos uma vez

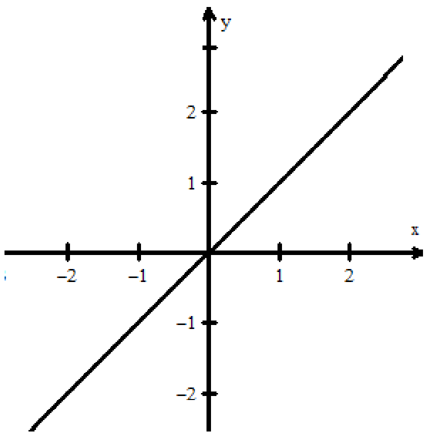


<u>Função e injectiva</u>

Uma função e **injectiva** se e só se quaisquer dois objectos diferentes tem imagens diferentes, ou seja para objectos diferentes correspondem a imagens diferentes.

$$\forall x_1, x_2 \in Df, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f \text{ e } \textbf{injectiva.}$$

Geometricamente, nenhuma recta horizontal intersecta o grafico de uma funcao **injectiva** mais do que uma vez.



<u>Função e bijectiva</u>

Uma função e **bijectiva** se e so se e **injectiva** e **sobrejectiva.**

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu que:

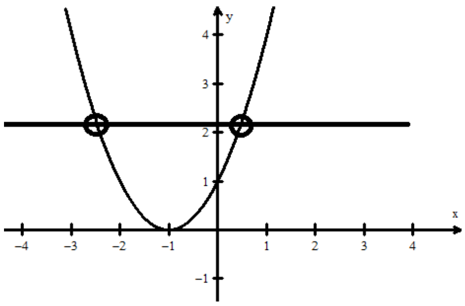
- Diz-se **função** a correspondência que associa a um valor do domínio a um único valor do contradomínio.

Portanto, numa função há somente um valor para a variável dependente y, associada com qualquer valor da variável independente, x.

- Uma função real de variavel real é **sobrejectiva,** quando o **contradominio coincide com o conjunto de chegada.**

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in Df : f(x) = y \Leftrightarrow f$$ **é sobrejectiva**

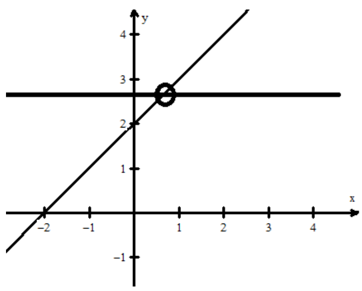
Geometricamente, qualquer recta horizontal corta o grafico de uma função **sobrejectiva** pelo menos uma vez.



- Uma função e **injectiva** se e so se quaisquer dois objectos diferentes tem imagens diferentes, ou seja para objectos diferentes correspondem a imagens diferentes.

$$\forall x_1, x_2 \in Df, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f$$ e **injectiva.**

Geometricamente, nenhuma recta horizontal intersecta o grafico de uma função **injectiva** mais do que uma vez.



- Uma função e **bijectiva** se e so se e **injectiva** e **sobrejectiva.**

Actividades

Actividades

Considere as seguintes situações:

1.A área de um círculo é uma função do seu raio. Para todos os números positivos reais no domínio desta função, somente um valor correspondente é associado a sua área.

a) Explique porquê o domínio são todos os números reais positivos.

Resposta: Um círculo não existe se o seu raio for negativo. Se seu raio for zero, então ele seria um ponto.

b) Qual a sua imagem correspondente?·
Resposta: Todos os números reais positivos.

2. Explique se a área de um quadrado é ou não uma função do tamanho dos seus lados**.**

Resposta: Sendo a área do quadrado determinada pelo tamanho dos seus lados, a área é uma função do tamanho deles. Por exemplo, a área de um quadrado (a função que iremos chamar de Área) quando x vale 4 cm é mostrada abaixo.

$$x = 4$$
$$\text{Area} = x^2$$
$$\text{Area} = 16$$

Substituindo o tamanho dos lados por 5 cm, 2,3 cm e $\frac{3}{4}$ cm na questão acima para determinar a área do quadrado.

Qual é o conjunto de valores independentes da função Área?

Resposta: Todos os números reais positivos.

Qual é a imagem de Área?

Resposta: Todos os números reais positivos.

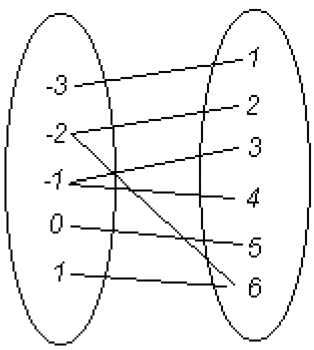
A área de um quadrado pode também ser representada usando tabelas de valores.

x	$y = x^2$
0	0
0.5	0.25
1	1
1.5	2.25
2	4
2.5	6.25
3	9
3.5	12.25
4	16
4.5	20.25
5	25
5.5	30.25
6	36

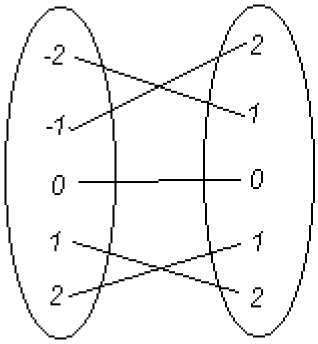
Note que cada valor de x produz somente um valor de y.

Em cada um dos seguintes grupos de números, a primeira coluna representa valores de x e a segunda representa valores de y.

3. Determine se cada um dos grupos representa ou não uma função.

a) 

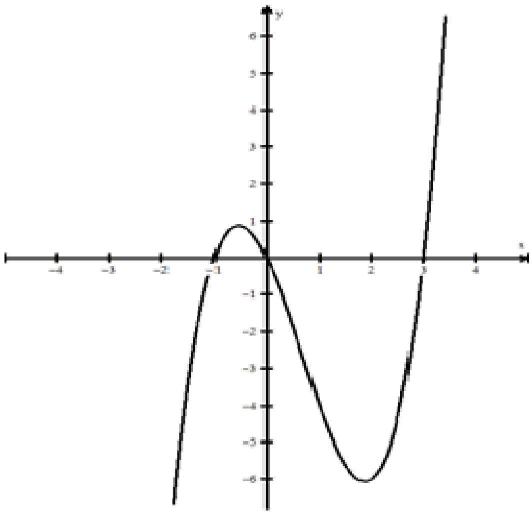
Resposta: Não é uma função, pois há dois valores de y para um valor de x.

b) 

Resposta: é Função

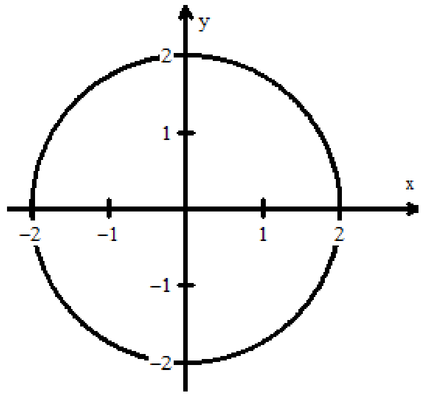
4. Examine os gráficos abaixo.

a) $y_1 = x^3 - 2x^2 - 3x$



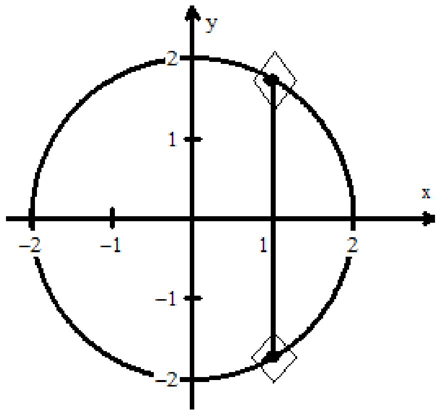
O gráfico de (a) é de uma função, pois cada valor de x é associados com somente um valor de y.

b) $x^2 + y^2 = 4$



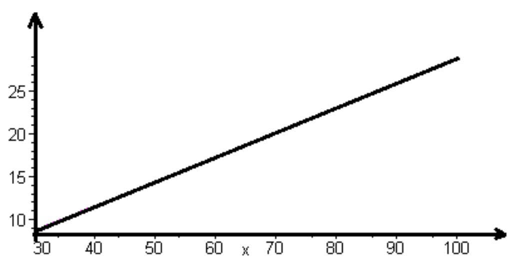
O gráfico de (b) não é uma função, pois há dois valores de y para um valor de x dado.

Facílimo, O teste da reta vertical é uma maneira rápida de dizer se o gráfico é ou não uma função. Se uma reta vertical tem mais de um ponto em comum num gráfico, então ele não representa uma função. Se cada reta vertical possui somente um ponto em comum, então o gráfico representa uma função.



4) O gráfico abaixo representa a distância em metros que um carro percorre em um segundo, quando viaja com velocidades em quilômetros por hora (km/h).

$y_8 = .288\, x$



Qual é a distância aproximada percorrida em um segundo para a velocidade de 70 km / h?

Resposta: 20 km

A base de um retângulo é sua altura (h) subtraída de 3.

Qual equação representa a área deste retângulo?

$\text{Área} = h(h-3)$ ou $\text{Área} = h^2 - 3h$

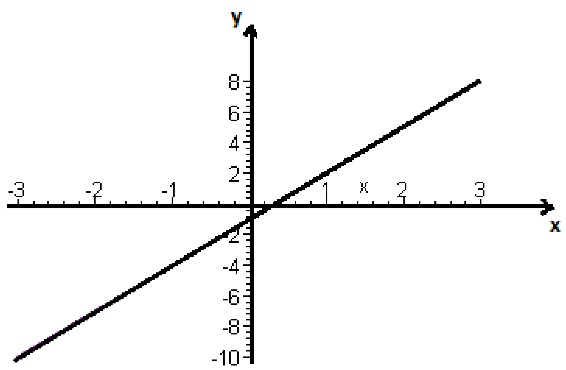
Qual é o domínio da função?

Resposta: Todos os números maiores que 3

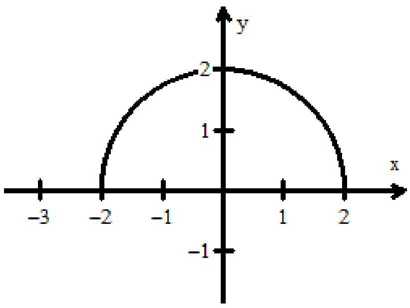
Avaliação

Avaliação

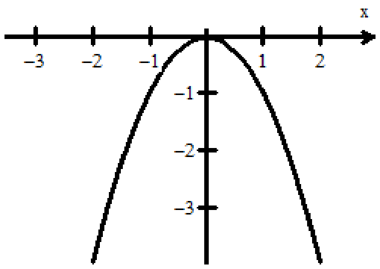
1) Considere o gráfico da função linear $y=3x-1$. Quais são o domínio e a imagem da função?



2) Considere o gráfico da função linear $y=\sqrt{4-x^2}$. Quais são o domínio e o contradomínio da função?



1) **Examine a parabola:** $y = -x^2$

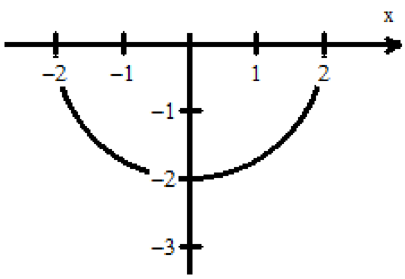


a) Explique se o gráfico é ou não uma função.

b) Qual é o domínio?

c) Qual é a imagem?

4) Examine o gráfico do semi-círculo abaixo. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

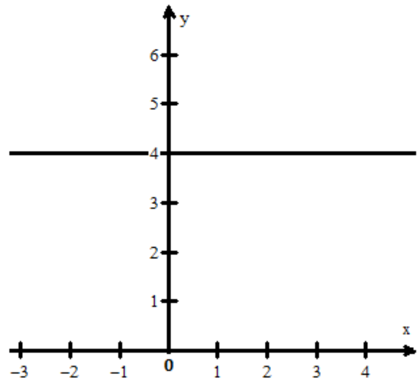


a) Explique se o gráfico é ou não uma função.

b) Qual é o domínio?

c) Qual é a imagem?

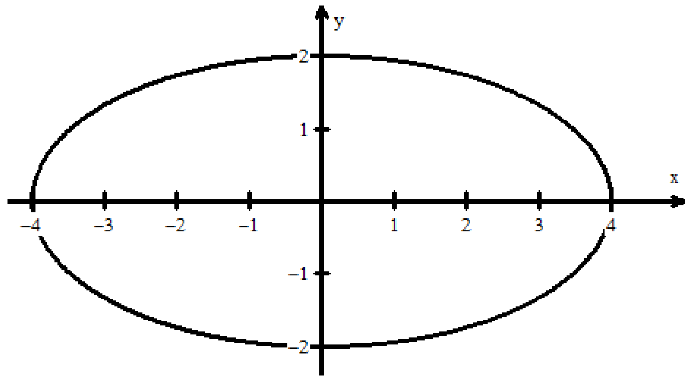
5) Examine o gráfico da reta $y = 4$ abaixo.



a) Explique se o gráfico é ou não uma função.

b) Qual é a imagem intervalo $]-\infty,+\infty[$?

6) Explique se esta elipse é ou não o gráfico de uma função.



1) **Resposta**:

Qualquer recta vertical traçada no gráfico irá intersectar o desenho apenas num ponto. O domínio e o contradomínio desta função são todos números reais.

2) O domínio da função $y=\sqrt{4-x^2}$ é D = [- 2, 2].
Contradomínio da função é I = [0, 2]

3) $y=-x^2$.

a) Essa parábola é uma função, pois a recta vertical intersecta-a num só ponto.

b) [-3, 3]

c) $]-\infty, 0[$

4) $y = -\sqrt{4 - x^2}$

a) Este semi-círculo é uma função, pois a recta vertical intersecta o gráfico uma só vez.

b) [-2, 2]

c) [-2, 0]

5) Examine o gráfico da reta $y = 4$ abaixo.

a) Esta recta é uma função, pois reta vertical intersecta o gráfico uma vez.

b) I = {4}

6) Esta elipse não é uma função, porque a recta vertical intersecta o gráfico duas vezes

Lição 2

Domínio e Contradomino

Introdução

Para o estudo de qualquer função precisamos de conhecer o ”territorio” onde a mesma pode ser construida ou ainda saber para que valores de x (objectos) a função existe.

O domínio duma função consiste nos valores de x para os quais a função existe.

Está recordado da idade de uma árvore, ora bem o conjunto dos anos da árvore será o dominio e o conjunto da variação da altura desta em função dos anos será o conjunto das imagens que se chama contradominio.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

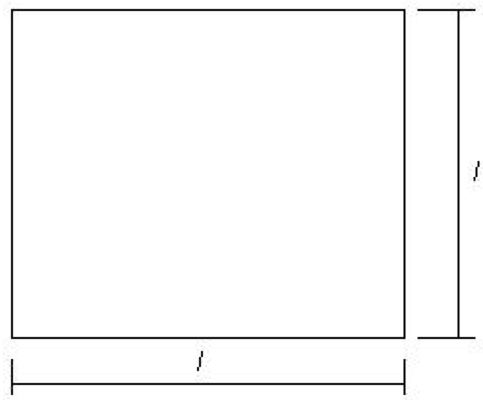
Objectivos

- *Determinar* o dominio uma função real.
- *Determinar* o contradominio fe uma função real.
- *Construir* o gráfico de uma função real

DOMÍNIO, CONTRADOMINIO

Tomemos alguns exemplos para tornar claro o assunto

Exemplo 1



- No quadrado acima, chamaremos a medida do lado de ***l*** e a soma dos seus lados, que é o perímetro, chamaremos de ***p***.

- Dessa forma, a lei que rege a relação dessas duas grandezas matemáticas pode ser escrita como:

$$p = 4.l$$

- **É claro** que a medida do perímetro do quadrado depende do tamanho da medida do lado. Vamos ver. isso ?

Medida do lado (***l***)	Medida do perímetro (***p***)
2	
4	
6	
7	

Trocando os valores de ***l*** na tabela acima, veja o que ocorre.

Atenção! os valores devem ser números positivos, pois não existem medidas de lados negativos, certo ?)

Quais as conclusões que tiramos da tabela : (***Pense um pouquinho***):

- Como você atribuiu valores que desejou para a medida do lado ***l***, podemos afirmar que é uma grandeza variável;
- A medida do perímetro (***p***) também é uma grandeza variável, porém depende do valor do lado;

- Para cada valor que você deu para ***l***, apareceu um único valor para ***p***; Certo

Daí, afirmamos que:

- A medida ***p*** do perímetro de um quadrado é dada em função da medida ***l*** do lado;
- A lei que de associação ou a fórmula matemática da função é dada por: ***p = 4.l*** *(Como já vimos antes)*

Exemplo2: Considere as seguintes situações:

i) O valor de Imposto (IPI, ICMS...) depende do valor do produto.
ii) O número de horas de sol de um dia depende do dia do ano.
iii) A distância que uma gota percorre quando cai da folha de uma árvore grande depende do tempo.

Cada uma das situações acima envolve duas quantidades que são associadas a uma lei. O valor de uma quantidade depende do valor da outra. Se as quantidades são consideradas variáveis, então o valor de uma variável depende do valor da outra. Quando o valor da variável independente (x) é conhecido, o valor da variável dependente (y) pode ser encontrado. **O conjunto de todos os valores possíveis para x é o domínio e o conjunto de todos os valores resultantes para y é a imagem (contradomínio).**

O volume da esfera pode ser representado usando uma tabela de valores

$$V(r)=\frac{4\pi r^3}{3}$$

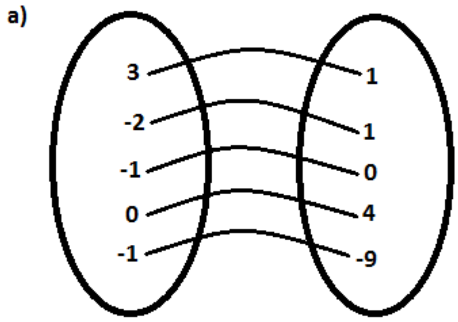
Valor de r	V (r)
0	0
0,5	0,5236
1,0	4,1888
1,5	14,137
2,0	33,51
2,5	65,45
3,0	113,1
3,5	179,59
4,0	268,8
4,5	381,70
5,0	523,60
5,5	696,91
6,0	904,78

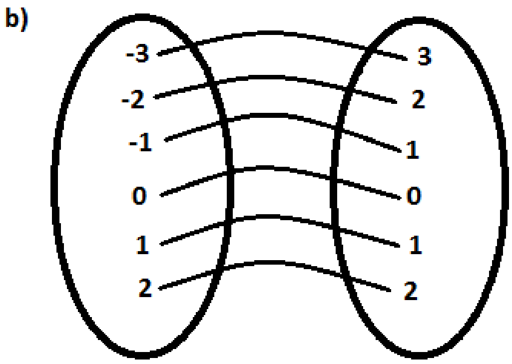
Note que cada valor de r produz somente um valor de V. O conjunto de todos os r é o domínio e o conjunto de todos os V é a imagem do Volume da esfera.

Para você fazer

Em cada um dos arranjos de números, a primeira coluna representa os valores de x e a segunda coluna representa os valores de y.

Explique se cada relação o representa ou não uma função.





Resposta:

a) Este não é uma função, pois há dois valores diferentes para y, 0 e - 9, associados a um valor de x.

Resposta:

b) Este é uma função, pois só há um valor de y para cada valor de x.

Então podemos definir com rigor o dominio de funções:

Definição

Dominio de uma função é o conjunto de valores da variável independente para os quais a função existe ou tem sentido no universo considerado. Chama-se também **domínio de existência** ou **domínio de definição.**

Exemplo:

Considere a função:

$f(x)=\sqrt{x+1}$ Os valores de (x+1) para os quais a função existe devem ser maiores ou iguais zero, porque se (x+1) tomar valores menores que zero ou seja valores negativos o radicando vai ser um número negativo mas, a raíz quadrada de um número negativo não existe em R .

Simbolicamente escreve-se:

A Condição: $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$; D: $x\in \left[-1;+\infty\right[$

Portanto, a condição para existência da função conduz-nos a resolução duma inequação linear e a solução da inequação é exactamente o domínio de existência da função dada.

***E o gráfico de uma função*?**

<u>**Definição**</u>

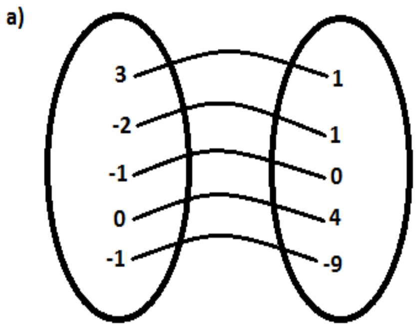
Chama se grafico de função real y= f (x), x D, ao conjunto dos pontos (x, f (x)) tais que $x\in D$, onde D é o dominio de funcao.

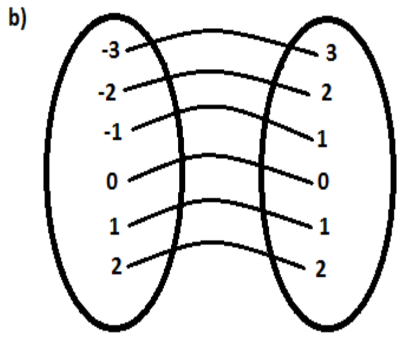
Exemplo Seja y = f (x) = 3x-2, $x\in$

As funções podem ter diferentes formas de representação tais como:

- Forma diagrama que consiste em representar a função na forma de tabelas. Olhe o exemplo que se segue.

Exemplo





- Mas tambem podemos representar **na forma de uma tabela** veja o exemplo a seguir:

$$V(r)=\frac{4\pi r^3}{3}$$

Valor de r	V (r)
0	0
0,5	0,5236
1,0	4,1888
1,5	14,137
2,0	33,51
2,5	65,45
3,0	113,1
3,5	179,59
4,0	268,8
4,5	381,70
5,0	523,60
5,5	696,91
6,0	904,78

$f(x)=ax+b$ e $y=ax+b$

Exemplo:

$f(x)=3x+6$ e $y=-x+2$

- Existe uma forma de representar uma função menos usada que se chama forma **de pares ordenados.**

- **Exemplo**

O domínio da função f e $Df=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ e o seu contradomínio e $CD_f=\{1,2,3,0,-1,-2\}$ como se vê o domínio e finito e consequentemente o contradomínio também será.

$$f = \{(-3,1),(-2,2),(-1,3),(0,0)(1,-1),(2,-2)\ \}$$

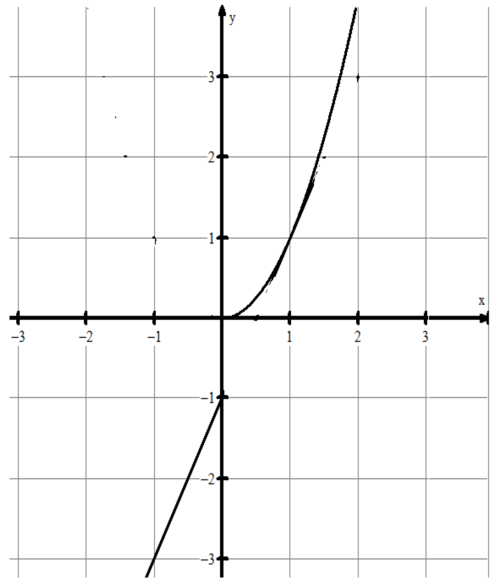
Quais os procedimentos para construir o gráfico de uma função?

Para a representação gráfica é necessário considerar os seguintes passos:

1) Expressão analítica
2) Contradomínio e Domínio
3) Sistema cartesiano

Exemplo:

Esboce o gráfico da função $y = \begin{cases} 2x-1; & \text{se } x<0 \\ x^2; & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$



Domínio:

Os valores a escolher para o domínio da função só podem ser negativos para y =2x-1 e maiores ou iguais a zero para $y = x^2$

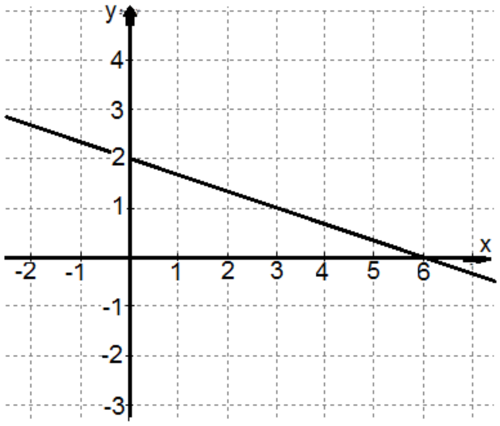
Contradomínio:

Os valores do conntradomínio são calculados a partir dos valores atribuibuidos a variável x segundo as condições dadas.

Caro estudante, você pode fazer essas continhas sozinho e depois formar os pares ordenados de forma a marcar no SCO

Sistema cartesiano

Marcamos os pontos obtidos no SCO e finalmente traçar o gráfico da função:



Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu que:

- ✓ Dominio de uma função é o conjunto de valores da variável independente para os quais a função existe ou tem sentido no universo considerado. Chama-se também **domínio de existência** ou **domínio de definição.**

- ✓ Chama se gráfico de função y = f (x), x D, ao conjunto dos pontos (x, f (x)) tais que $x \in$ D, onde D e o dominio de funcao.

- Forma diagrama que consiste em representar a função na forma de tabelas. Olhe o exemplo que se segue.

Mas tambem podem representar **na forma de uma tabela** veja o exemplo a seguir:

- **Forma de expressão analítica** e como já deve saber esta forma consiste escrever a equação em que uma das variáveis e independente e a outra dependente. A expressão e a forma algébrica e simplificada de representa uma função e nominal

- Existe uma forma de representar uma função menos usada que se chama forma **de pares ordenados**

- Para a representação gráfica é necessário considerar os seguintes passos:

    1) Expressão analítica
    2) Contradomínio e Domínio
    3) Sistema cartesiano

Actividade

Actividades

O custo em meticais para contratar um pintor é determinado pelo custo da tinta e o custo do trabalho. O custo total C é uma função de duas variáveis independentes, o número de latas de tinta g e o número de horas h que o pintor leva para pintar a casa, e é dada por

$C(g, h) = 24g + 15h.$

1. Qual é o custo total, C, quando o pintor usa 12 latas de tinta e gasta 18 horas pintando a casa? Qual é o custo total, C, quando o pintor usa 12 latas de tinta e gasta 18 horas pintando a casa?

Lembre-se: g (latas de tinta) e h (horas de trabalho do pintor)

$$CT=(g,h) \rightarrow 24g + 15h$$

Fazendo a substituição dos valores de g e h para saber o resultado.

Resposta: Mts 558,00 2.

2. A fórmula de Heron para achar a área de um triângulo quando os três lados são conhecidos é dada por A.

Lembre-se: a, b e c - medida dos lados

c. Ache o semi-perímetro do triângulo quando a = 5, b = 8 e c = 11.

Resposta: 12 unidades

d. Entre com o valor calculado de s na função Área e determine a área do triângulo

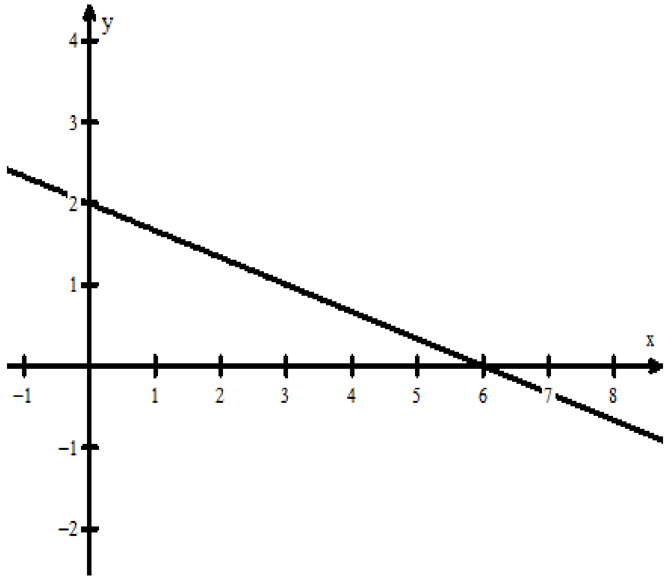
Resposta: 18,33

3. Determine o domínio de existência das funções:

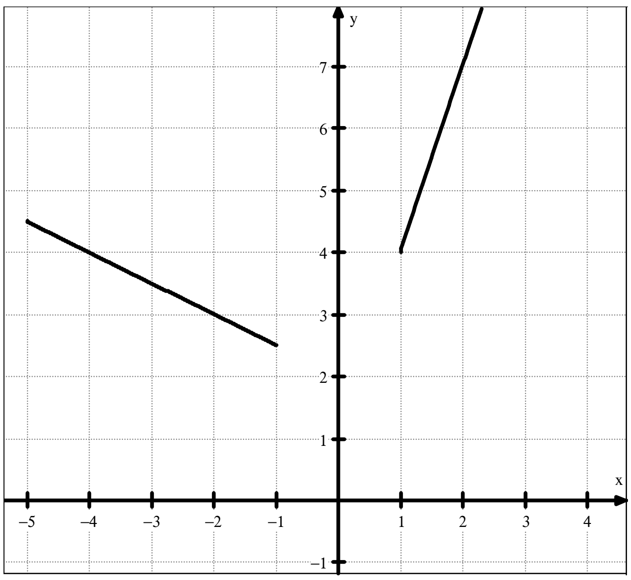
$$f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2-1}$$

4. Represente graficamente as funções

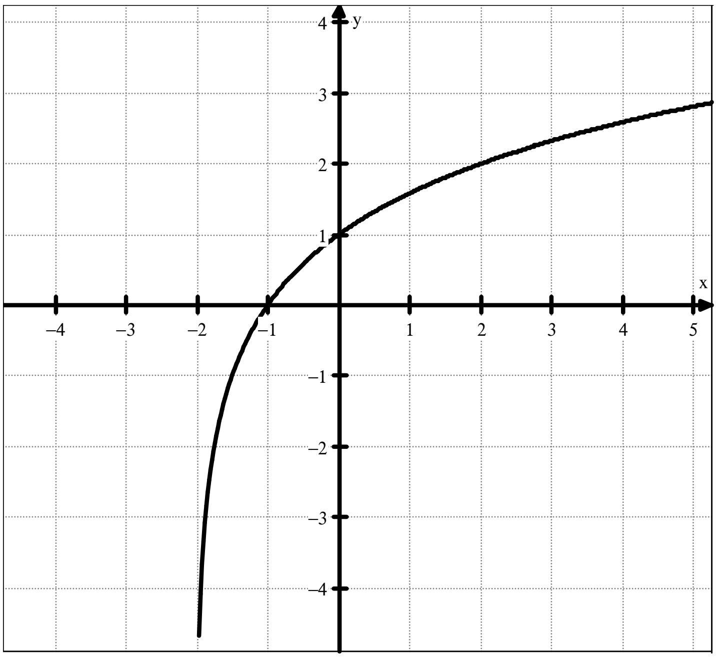
a) $y=2-\frac{x}{3}$



b) $y=\begin{cases} 2-\frac{x}{2}, & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ 3x+1, & \text{se } x>0 \end{cases}$



c) $y=\log_2(x+2)$



d) $y=\log_{11}\left(6+x-x^2\right)$ $\mathbb{R};]-2;3[$

$\log_2(x+2)$

Foi uma aula divertida não? Não percebeu alguma coisa?faz uma breve revisão e resolva os exercicios propostos.

Avaliação

Avaliação

1. Explique por que o domínio da área do quadrado é todo número real positivo e qual é contradominio correspondente?

2. Explique se o volume de uma esfera é ou não uma função do seu raio e qual é o domínio da função Volume da esfera ?

3. Determine o domínio de existência das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+4}}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}}$

c) $y = \log_{10}(-x)$

d) $y = \log_{10}\left(-10-3x+x^2\right)$

4. Esboce o gráfico de $y = x^3 + 1$

Resolução

1)

R: Um quadrado existe somente para números reais positivos.

R: Todos os números reais positivos.

2) Como um volume de uma esfera depende do seu raio, é uma função o dominio e ocontradomio sao todos os números reais positivos.

a) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+4}}$

Condição: $2x+4>0 \Rightarrow x>-2$; $D: x \in \left]-2;+\infty\right[$

Observe que o -2 não faz parte da condição de existência porque o radical aparece como denominador da fracção e pela e o valor desta só é determinado quando o denominador é diferente de zero

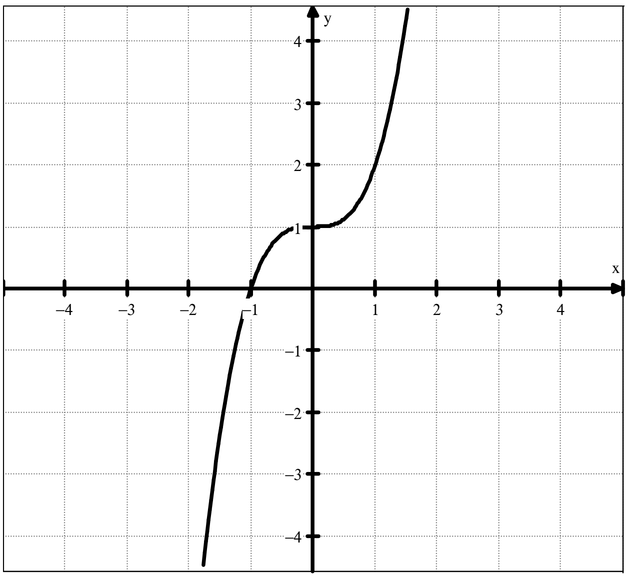
b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}}$

Condição: $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D: x \in [-1;+\infty[\setminus \{1\}$

c) $y=\log_{10}(-x) \quad R;]-\infty;0[$

d) $y=\log_{10}\left(-10-3x+x^2\right) \quad R;]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$

3. Esboce o gráfico de $y=x^3+1$



Lição 3

Monotonia das funçoes

Introdução

Ao observar o comportamento dos gráficos de funções pode-se concluir que crescem ou decrescem, mas também podem permanecerem constantes em todo seu domínio ou em partes de seu domínio. A erste comportamento chamamos monotonia da função .

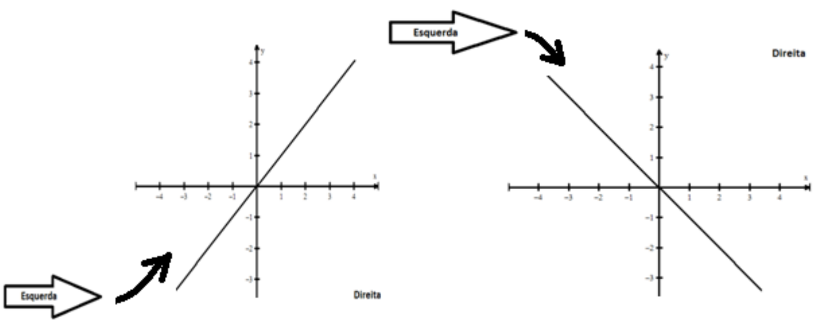
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Estudar* a monotonia das funções.
- *Estudar* a paridade das funções.

Monotonia de funções

Uma função é crescente em um intervalo se o seu gráfico sempre cresce à medida que você o move da esquerda para a direita. É decrescente em um intervalo se o seu gráfico decresce à medida que você o move da esquerda para a direita. É constante em um intervalo se o seu gráfico é horizontal.



O gráfico do volume de uma esfera é uma função crescente. O domínio desta função é dado por $D =]0;\infty[$

A imagem desta função será $CD =]0;\infty[$

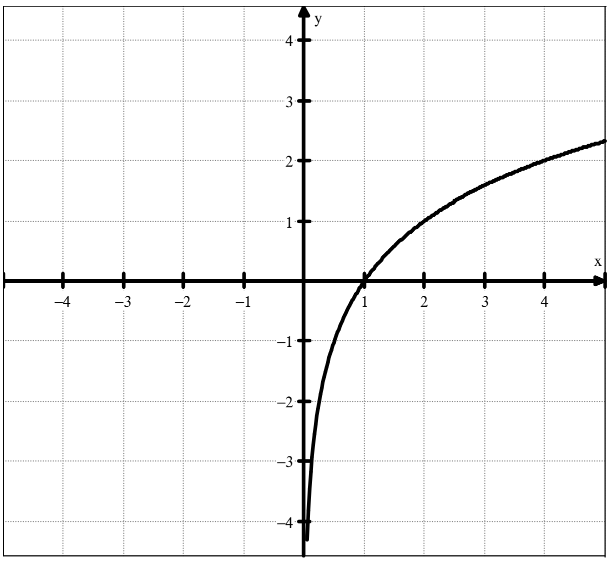
Explique por que o domínio da função volume de uma esfera são todos os números reais positivos maiores que zero.

Vamos dar uma definição mais rigorosa sobre a monotonia das funções:

1. Uma função $y=f(x)$ diz-se crescente no Intervalo (a,b) se para $x_1 < x_2 \in (a,b)$ tem-se $f(x_1) \le f(x_2)$

Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ a função é estritamente crescente

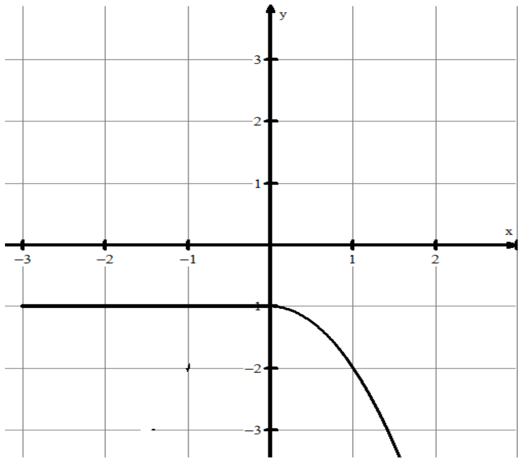
Exemplo: $f(x) = \log_2 x$



2. Uma função y = f(x), diz-se decrescente no intervalo (a,b) , se para $x_1 < x_2 \in (a,b)$,

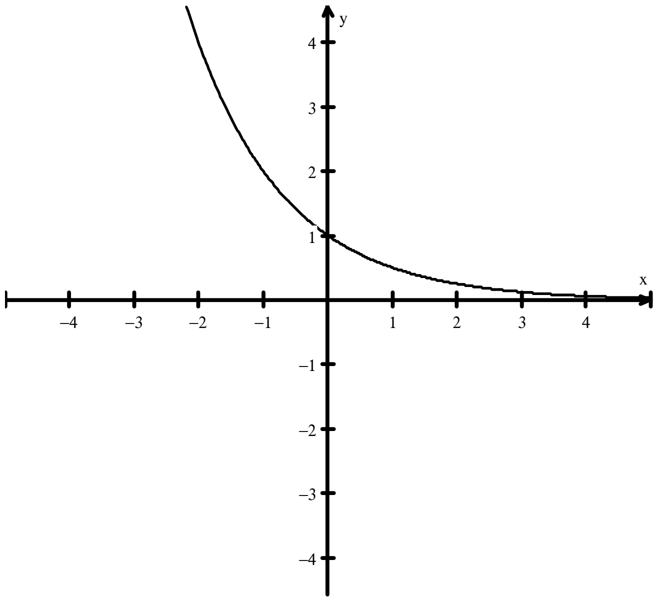
tem-se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$$\begin{cases} -1, & \text{se} \quad -3 \leq x \leq 1 \\ -x^2, & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ a função é **estritamente decrescente**

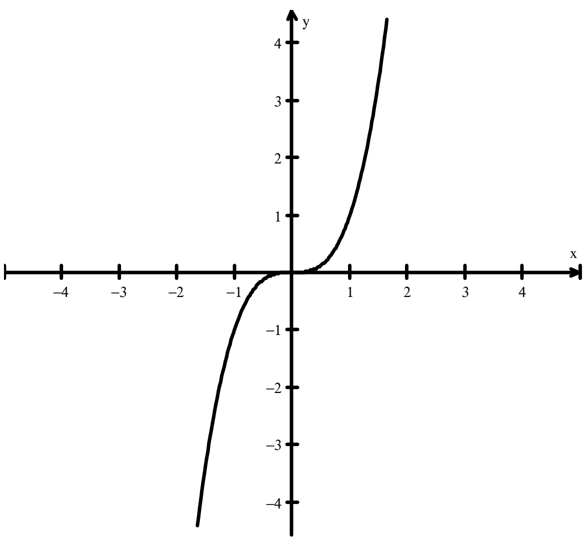
Exemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



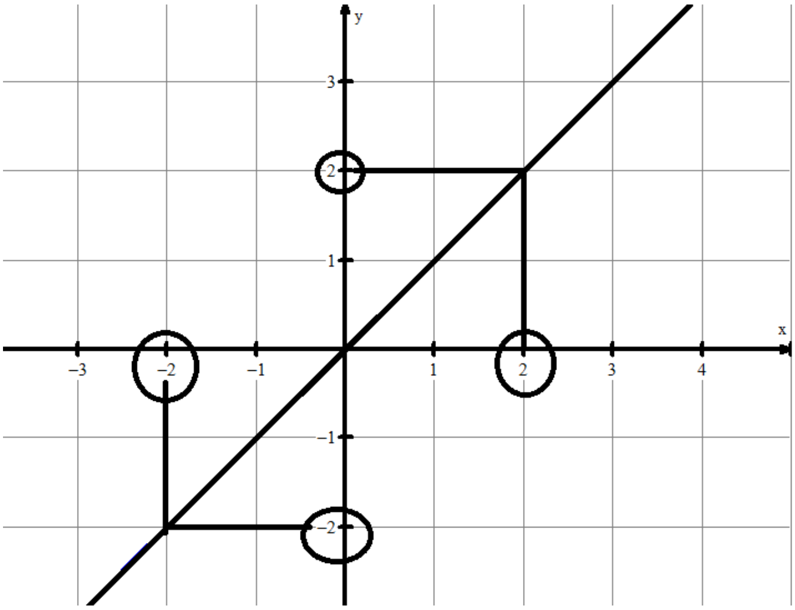
Paridade de funções

- Uma função y=f (x), definida num domínio em relação à origem do SCO diz-e ímpar se f (-x) = -f (x) para todos os valores de x.

Exemplo $f(x) = x^3$



Por exemplo pode usar a função linear abaixo



Fazer a demostração da evidencia de que f (2) é igual a – f (-2)

- Uma função y=f (x), definida num domínio simétrico em relação à origem do SCO diz-e par se se f (-x) = +f (x)

Exemplo

$$Se f(x) = x^2 \Rightarrow y = f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Excelente, você conseguiu ver o comportamento das diferentes funções observando os seus gráficos e ou o seu comportamento analítico por isso já é capaz de identificar função par e impar, função monótona crescente e decrescente.

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu

- Uma função $y=f(x)$ diz-se crescente no Intervalo (a,b) se para $x_1 < x_2 \in (a,b)$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$

  Se $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ a função é estritamente crescente.

- Uma função y = f(x), diz-se decrescente no intervalo (a,b) , se para $x_1 < x_2 \in (a,b)$,

  tem-se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- Uma função y=f (x), definida num dominio em relação à origem do SCO diz-e ímpar se f (-x) = -f (x) para todos os valores de x.

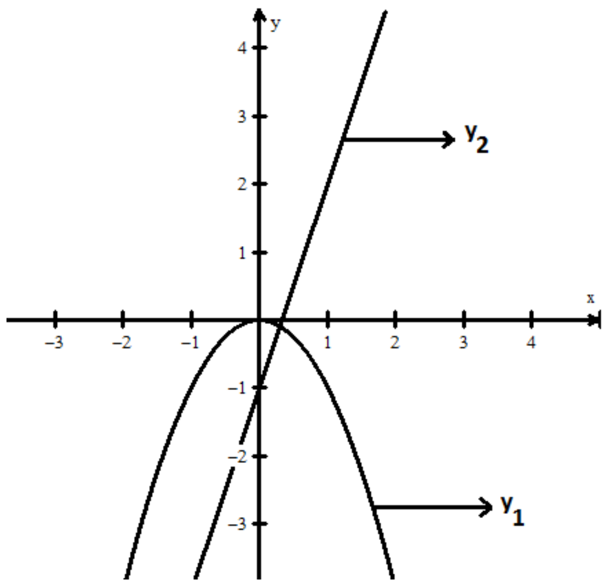
- Uma função y=f (x), definida num domino em relação à origem do SCO diz-e par se se f(-x) = +f(x)

Actividades

Actividades

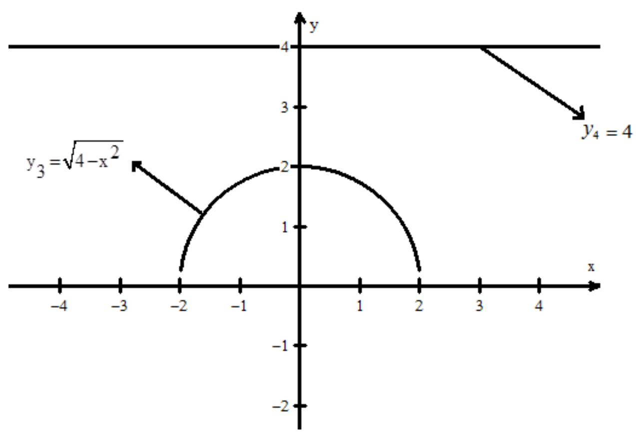
1. Estude a monotonia das funções representadas graficamente

a) $y_1 = -x^2$ b) $y_2 = 3x - 1$



Respostas: a) crescente de $]-\infty;0[$ e decrescente $]0;+\infty[$, b) crescente

c) $y_3 = \sqrt{4-x^2}$ d $y_4 = 4$



Respostas: c)decrescente e crescente d) constante

2.Para os gráficos acima, indique o domínio e contradomínio, usando a notação de intervalos.

Resposta.

a) Domínio: $]-\infty;+\infty[$; contradóminio: $]-\infty;+\infty[$

b) Domínio: $]-\infty;+\infty[$; contradóminio: $]-\infty;+\infty[$

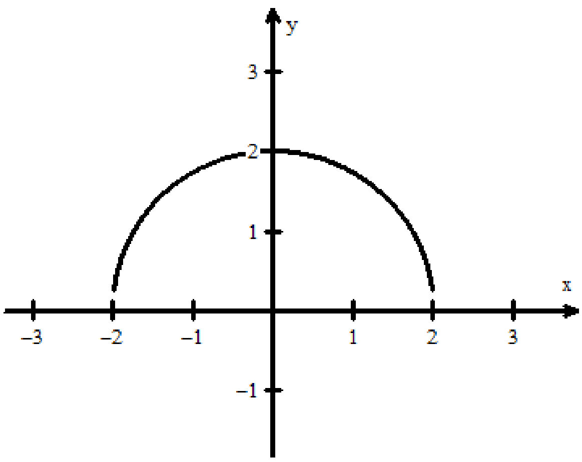
c) Domínio: $[-2;2]$; contradóminio: $[-2;0]$

d) Domínio: $]-\infty;+\infty[$; contradóminio: 4

3. Para o gráfico c, determine o intervalo no qual o semi-círculo é:

a) decrescente

b) crescente



a) $]-2;0]$ b) $[0;2[$

Avaliação

Avaliação

Esboce o gráfico das funcoes abaixo indicando o dominio e a monotonia

1. $y = \sqrt{2x+3}$

2. $y = x - \frac{1}{x}$

3. Dada a função $\begin{cases} 4x+6 & x \leq 2 \\ 2 & x < 5 \\ -4x+22 & 5 \leq x \end{cases}$

Construa o gráfico da função

Responda as seguintes questões:

a) Qual é o domínio?

b) Qual é o contradomínio?

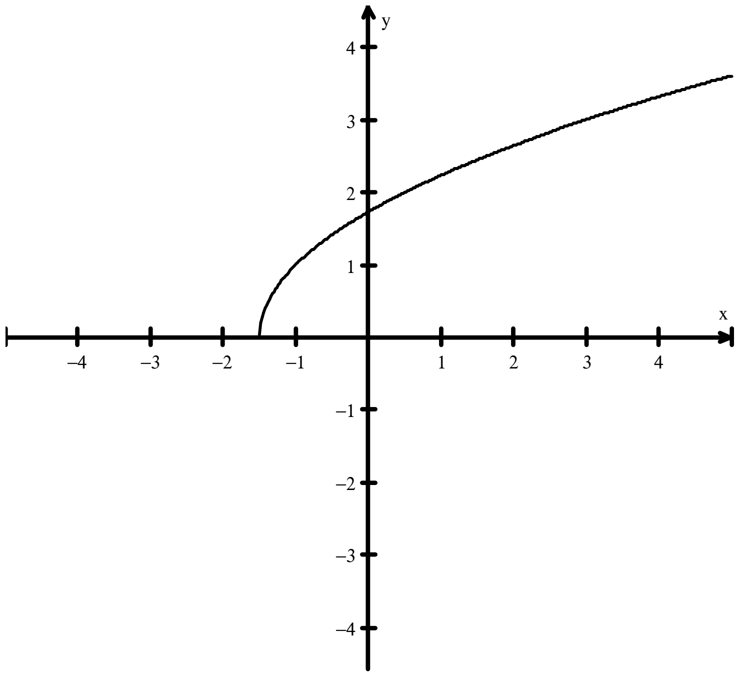
c) Em que intervalo é crescente?

d) Em que intervalo é decrescente?

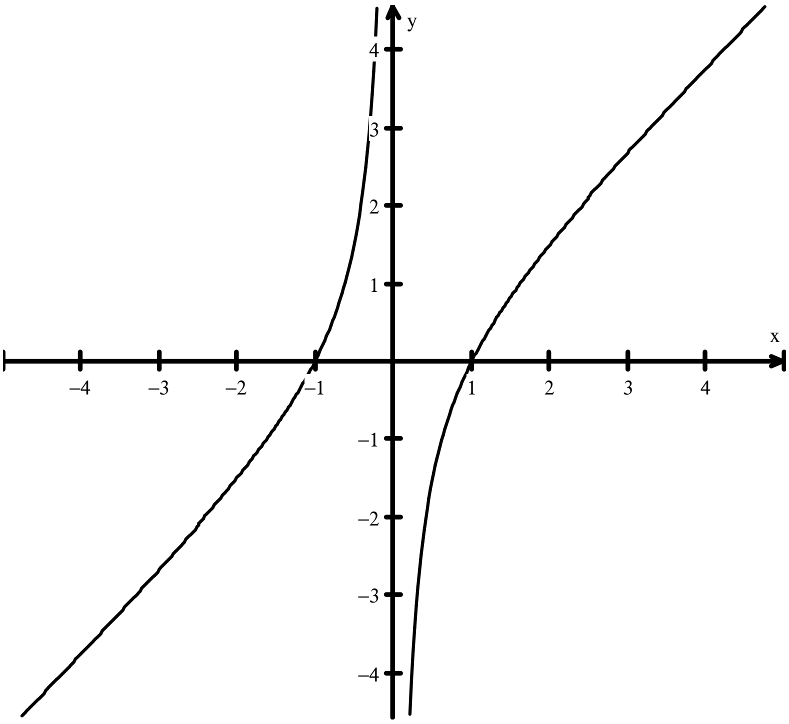
e) Em que intervalo é constante?

<u>Resolução</u>

1. $y = \sqrt{2x+3}$



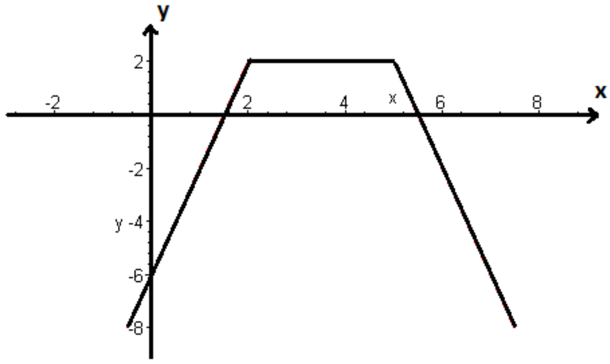
2. $y = x - \dfrac{1}{x}$



3. $\begin{cases} 4x+6 & x \leq 2 \\ 2 & x<5 \\ -4x+22 & 5 \leq x \end{cases}$

3.

Gráfico



a) $]-\infty;+\infty[$ b) $]-\infty;2[$ c) $]-\infty;2[$

d) $]5;+\infty[$ e) $]2;5[$

Lição 4

Revisao da Função linear

Introdução

Função linear e uma função cujo gráfico e uma recta. Tem portanto como expressao y= f (x) = ax+b, $x \in R$, com a e b constantes reais.

Certos autores fazem a seguinte distinção: seja y = f (x) = ax = b. Se $b \neq 0$ a função é chamada afim, enquanto se b = 0 ela e chamada de linear.

Por outro lado nem toda a recta e gráfico de uma função linear. Mais explicitamente, nenhuma recta paralela (ou coincidente) ao eixo dos y é gráfico de uma função linear.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

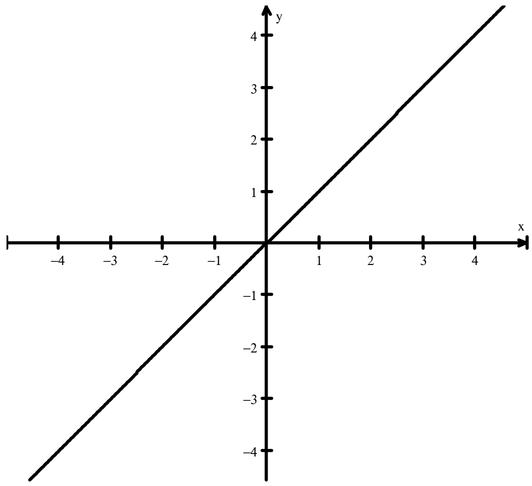
Objectivos

- *Fazer* o estudo completo da função linear
- *Explicar* o significado dos coeficientes a e b da função linear

Estudando a Função Linear (I) na forma $y=ax+b$

Inicialmente, vamos estudar funções lineares onde o coeficiente angular m é igual a 1 (m = 1) e, no caso abaixo, onde b = 0

O gráfico de $y_0 = x$ é apresentado abaixo.

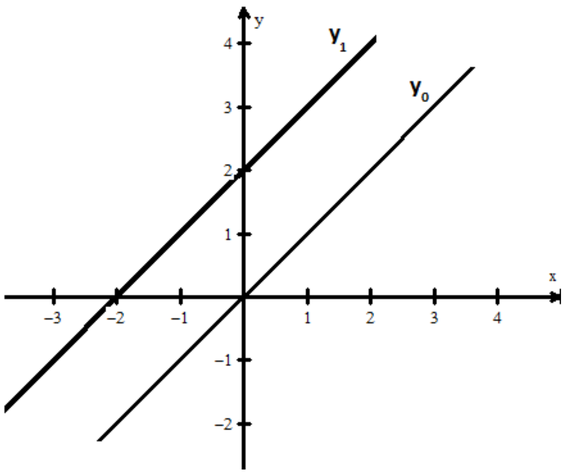


Qual o valor de *x* onde a equação intercepta o eixo Ox *(ou* eixo dos x*)?*
No gráfico, fica bem claro que x = 0

O ponto onde a equação intercepta o eixo y chamamos de ponto de intersecção em y e o interessante é que representa o valor de **b** em $y = ax + b$, ou seja, é o ponto (0, b).

Veja o gráfico acima e responda: Qual é o ponto de intersecção em y?
No caso como b = 0, o ponto é (0, 0)

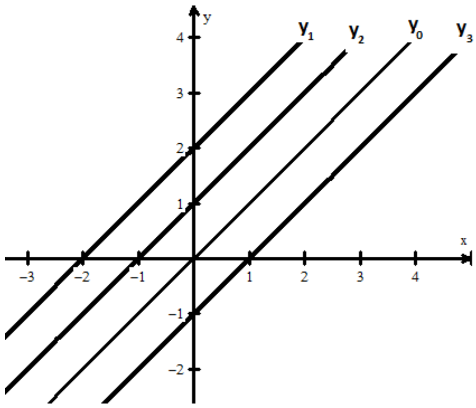
Agora, adicionaremos ao gráfico de $y_0 = x$, o gráfico de $y_1 = x + 2$



Qual é o ponto de intersecção no eixo x e no eixo y de $y_1 = x + 2$.
Ponto de intersecção em x: (- 2, 0)
ponto de intersecção em y: (0, 2)

Adicionaremos outras equações ao gráfico, tais como:

$y_0 = x, \quad y_1 = x+2, \quad y_2 = x-1, \quad y_3 = x+1$



Descreva como o ponto de intersecção do eixo dos x e dos y mudam, quando b muda.

Resposta:

Quando b (ponto de intersecçao em y) muda, o ponto de intersecçao em x é sempre o oposto de b.

Volte e veja novamente no gráfico.

Agora é com você. Calcule as taxas de variação das outras equações.

Compare a taxa calculada para o valor de ***a*** em cada equação.

Resposta:

Pegamos dois pontos de cada uma das equações e encontramos o seguinte:

$\frac{2-0}{1-0}$ terá o coeficiente angular **a=2**

$\frac{3-0}{1-0}$ terá o coeficiente angular **a=3**

$\frac{1-0}{2-0}$ terá o coeficiente angular $a = \frac{1}{2}$

$\frac{1-0}{4-0}$ terá o coeficiente angular $a=\frac{1}{4}$

Os valores encontrados correspondem exactamente aos valores de ***m*** de cada uma das equações.

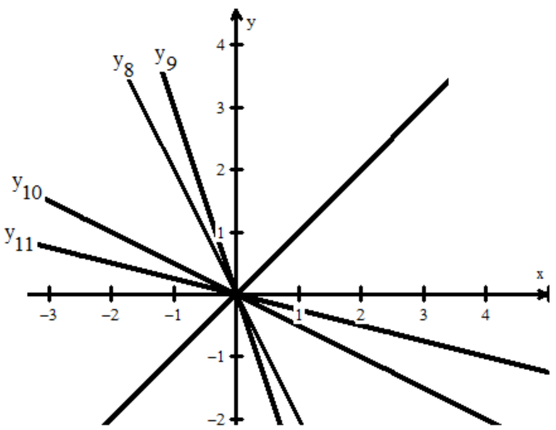
1) $y_8=-2x$

$y_9=-3x$

$y_{10}=-\frac{1}{2}x$

$y_{11}=-\frac{1}{4}x$

O procedimento deve ser o mesmo que você fez anteriormente



Descreva como os gráficos diferem quando o valor de ***a*** é negativo ou positivo.

Resposta: Quando o ***a*** é negativo, a reta é decrescente, ou seja, os valores de y caem à medida que os valores de x aumentam. O contrário ocorre quando ***m*** é positivo, os valores de y crescem à medida que os valores de x aumentam.

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu **:**

- Diz-se função linear à função f (x) =ax definida para todo R
- Diz-se função Afim à função f (x) = ax +b com a, b pertecentes a R e a diferente de zero definida para todo o R
- Quando o ***a*** é negativo, a reta é decrescente, ou seja, os valores de y caem à medida que os valores de x aumentam. O contrário ocorre quando ***m*** é positivo, os valores de y crescem à medida que os valores de x aumentam.
- Quando b (ponto de intersecçao em y) muda, o ponto de intersecçao em x é sempre o oposto de b.

Actividades

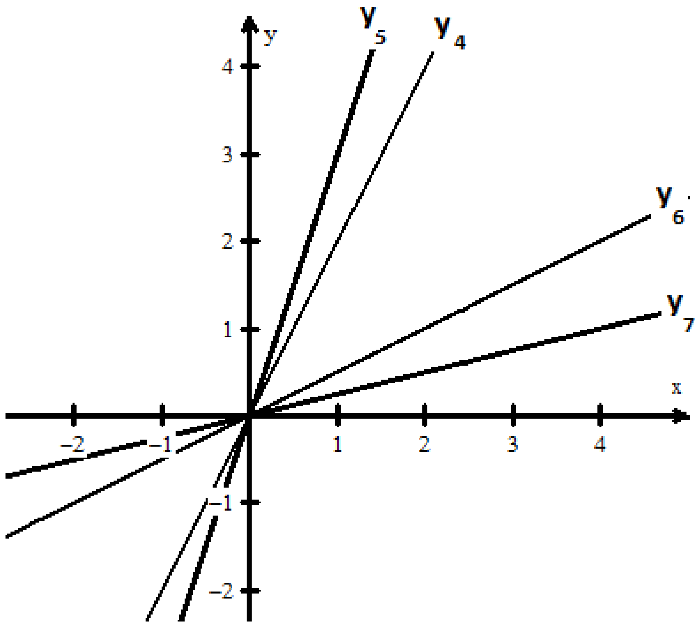
Actividades

Faça o Estudo das Equações funções $y = ax$

Junto com o gráfico de $y_o = x$, vamos construir os gráficos das seguintes funções:

1) $y_4 = 2x$ (aparecerá em azul)
2) $y_5 = 3x$ (aparecerá em roxo)
3) $y_6 = \frac{1}{2}x$ (aparecerá em vermelho)
4) $y_7 = \frac{1}{4}x$ (aparecerá em amarelo)

$y_4 = 2x, \quad y_5 = 3x, \quad y_6 = \frac{1}{2}x, \quad y_7 = \frac{1}{4}x$



Descreva o efeito crescente ou decrescente do valor de ***m*** (o coeficiente de x) na inclinação da reta.

Podemos observar que à medida que cresce o valor de ***m***, cresce também a inclinação da linha ou o ângulo que faz com o eixo dos x.

Por outro, lado à medida que decresce o valor de ***m,*** decresce a inclinação da reta, ou o ângulo que faz com o eixo dos x.

Caso você não esteja convencido, volte para a equação $y_4 = 2\,x$ e troque o 2, por 4, 5, 6, 7. O que aconteceu com a reta vermelha à medida que o ***m*** aumentou?

Qual é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y?

1) $y_4 = 2\,x$: ponto de intersecção com o eixo dos y é (0,0)
2) $y_5 = 3\,x$: ponto de intersecção com o eixo dos y é (0,0)
3) $y_6 = 1/2\,x$: ponto de intersecção com o eixo dos y é (0,0)
4) $y_7 = 1/4\,x$: ponto de intersecção com o eixo dos y é (0,0)

Por exemplo no caso de $y_4 = 2\,x$:

Pelo gráfico podemos ver dois pontos claramente (0, 0) e (1, 2). Agora, basta substituir as coordenadas de y dos pontos para y_2 e y_1 e substituir as coordenadas de x dos pontos para x_2 e x_1 na fórmula abaixo. O valor da taxa de variação é automaticamente calculada e nesse caso é igual a 2.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

O mais interessante é que essa taxa que encontramos refere-se à constante ***m*** da equação $y = \boldsymbol{a}\,x + b$, que também é o coeficiente angular da reta.

Avaliação

Avaliação

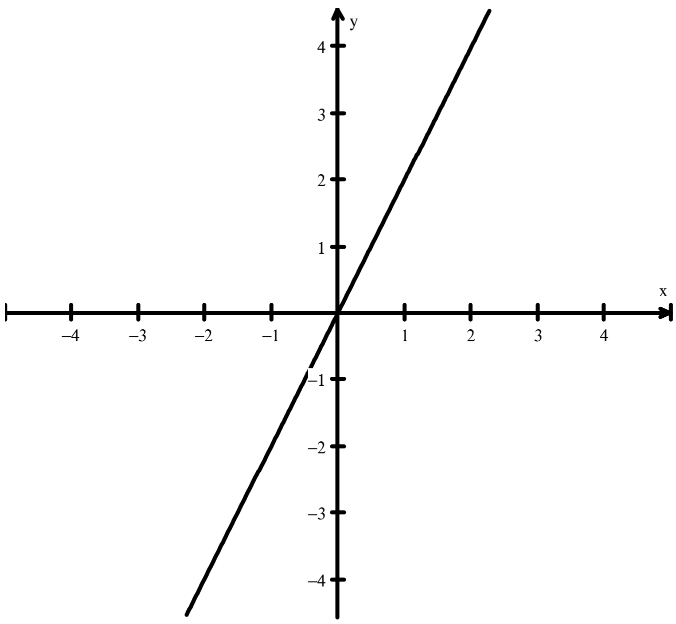
Agora é com você. Calcule as taxas de variação das outras equações.

1. Trace os gráficos e estude a monotonia das funções
   a) F (x) =2x
   b) F (x) =2x-5
   c) F (x) = 3
2. Compare a taxa calculada para o valor de ***a*** em cada equação.

Resolução

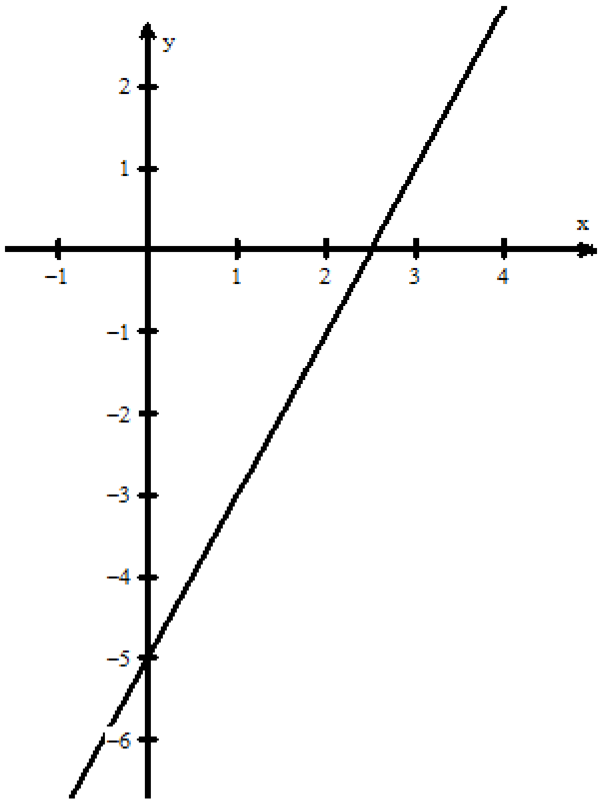
a)F (x) =2x

x	y=2x
1	2
2	4
-2	-4



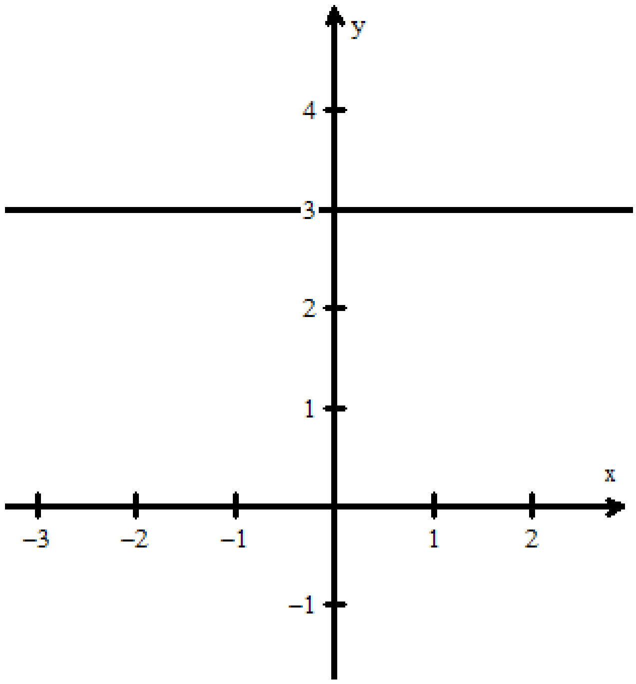
c) F (x) =2x-5

x	Y=2x-5
1	-3
1	-7
-2	-1
0	-5



d) F(x)= 3

x	Y=3
1	3
2	3
-2	3



2.

Resposta:

Pegamos dois pontos de cada uma das equações e encontramos o seguinte:

$\frac{2-0}{1-0}$ terá o coeficiente angular **a=2**

$\frac{3-0}{1-0}$ terá o coeficiente angular **a=3**

$\frac{1-0}{2-0}$ terá o coeficiente angular $a = \frac{1}{2}$

$\frac{1-0}{4-0}$ terá o coeficiente angular $a = \frac{1}{4}$

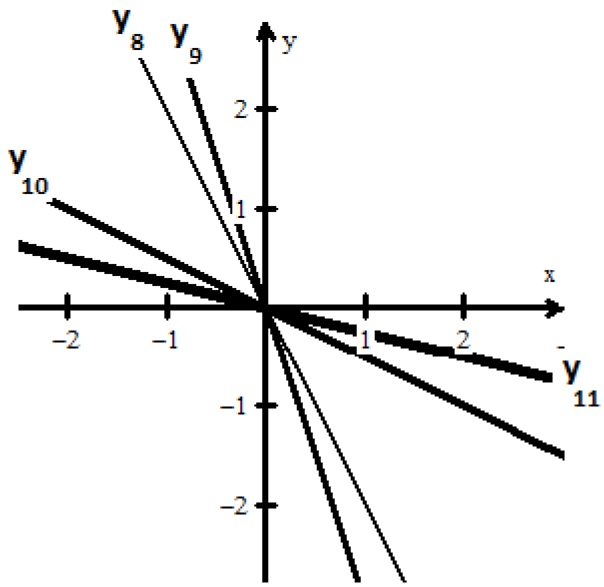
Os valores encontrados correspondem exactamente aos valores de ***m*** de cada uma das equações.

Junto com o gráfico de $y = x$, ... as seguintes equações:

1) $y_8 = -2x$ (aparecerá em vermelho)
2) $y_9 = -3x$ (aparecerá em azul)
3) $y_{10} = -1/2\,x$ (aparecerá em roxo)
4) $y_{11} = -1/4\,x$ (aparecerá em amarelo)

O procedimento deve ser o mesmo que você fez anteriormente

$$y_8 = -2x, \quad y_9 = -3x, \quad y_{10} = -\frac{1}{2}x, \quad y_{11} = -\frac{1}{4}x$$



Descreva como os gráficos diferem quando o valor de ***a*** é negativo ou positivo.

Quando o ***a*** é negativo, a reta é decrescente, ou seja, os valores de y caem à medida que os valores de x aumentam. O contrário ocorre quando ***m*** é positivo, os valores de y crescem à medida que os valores de x aumentam.

Aprofundando Seus Conhecimentos

Crie sua própria equação da forma *y* = *a x* + *b*.

Faça com que o valor de ***a*** cresça a partir de 0, descreva o que acontece com a inclinação e a direção da reta do gráfico.

Quando o valor de ***a*** se aproxima de 0, como se apresenta a inclinação da reta?

Qual o valor de ***a*** quando a reta está próxima da vertical?

Qual o valor de ***a*** quando a reta está próxima da horizontal?

Resposta:

Faça com que o valor de ***a*** cresça a partir de 0, descreva o que acontece com a inclinação e a direção da reta do gráfico.

A linha muda de quase horizontal para quase vertical.

Quando o valor de ***a*** se aproxima de 0, como se apresenta a inclinação da reta?

A reta torna-se muito menos íngrime até parecer quase horizontal.

Qual o valor de ***a*** quando a reta está próxima da vertical?

A medida que ***a*** torna-se cada vez maior a reta fica cada vez mais vertical

Qual o valor de ***a*** quando a reta está próxima da horizontal?

O valor de ***a*** aproxima-se de zero.

Lição 4

Função com módulo do tipo $y = |f(x)|$

Introdução

Como vimos ao logo das aulas sobre as funcoes estudadas, cada uma tem as suas carateristicas específicas contudo, todas as funções podem ser representadas também sob sinal de modulo.Assim nesta lição vamos estudar como construir ou esboçar o grafico deste tipo.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Construir* gráfico de funções com módulo.
- *Fazer o* estudo de funções com módulo.

Funcão com módulo do tipo $y = |f(x)|$

Quais procedimentos para esboçar os gráficos deste tipo de funções?

Podemos construir o gráfico da função $y=|f(x)|$, a partir do gráfico de f(x), pois existe uma ligação entre elas segundo a definição de $|f(x)|$, temos:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ f(x), & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Assim, para obtermos o gráfico $y = |f(x)|$ procedemos da seguinte forma:

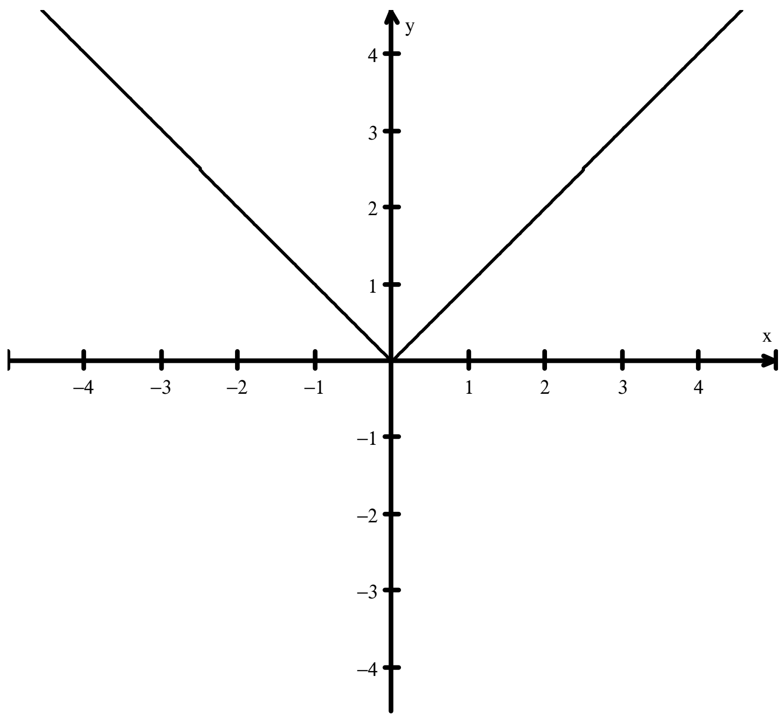
- Todos os pontos do gráfico cujas ordenadas são positivas não se alteram

- Em vez dos pontos do gráfico da função f(x) que têm as coordenadas negativas, construímos os pontos correspondentes do gráfico da função $y = -f(x)$

- Como módulo significa o valor absoluto então reflete-se a parte negativa de $f(x)$ para cima do eixo dos x.

Exemplo 1:

$y = |x|$



A parte do gráfico de y = x que fica abaixo do eixo ox é representada simetricamente em relação ao eixo OX obtendo assim o gráfico da função $y=|x|$

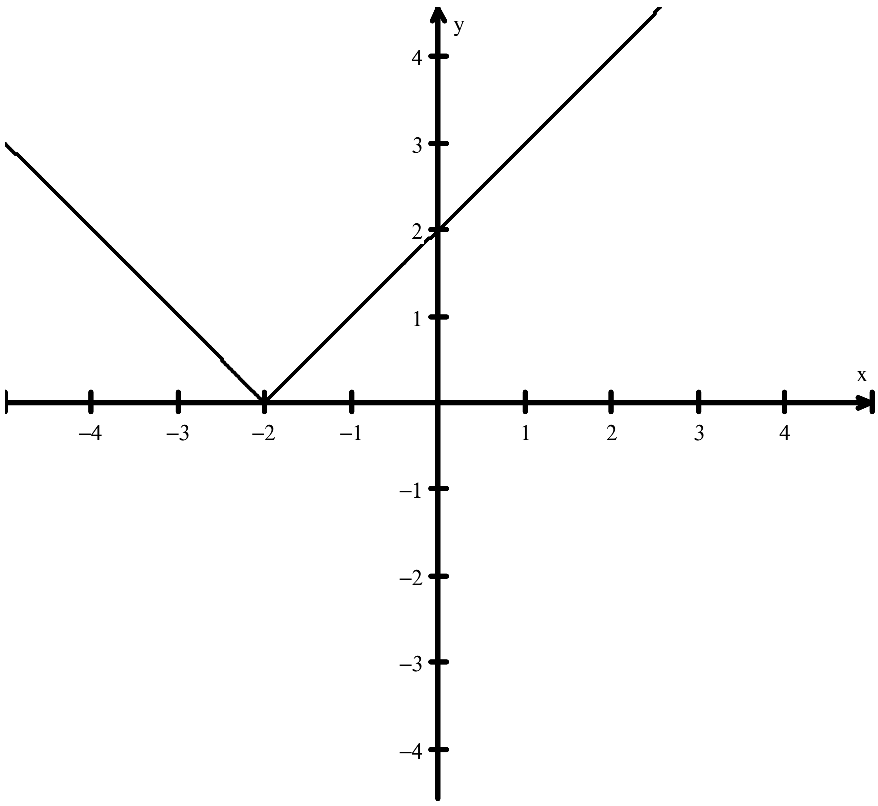
Exemplo 2:

$y=|x-2|$ e $y=|x+2|$ no mesmo SCO

Já conhecemos o gráfico $y = |x|$ então facilmente podemos construir os gráficos das funções dadas.

O gráfico da função $y = |x-2|$ obtém-se do gráfico da função $y = |x|$ fazendo a translação ao longo do eixo OX **à direita,** com o valor 2.

Do mesmo modo, pode-se obter o gráfico da função $y = |x+2|$ fazendo a translação do gráfico da função $y = |x|$ ao longo ao eixo OX à **esquerda** com o valor 2.

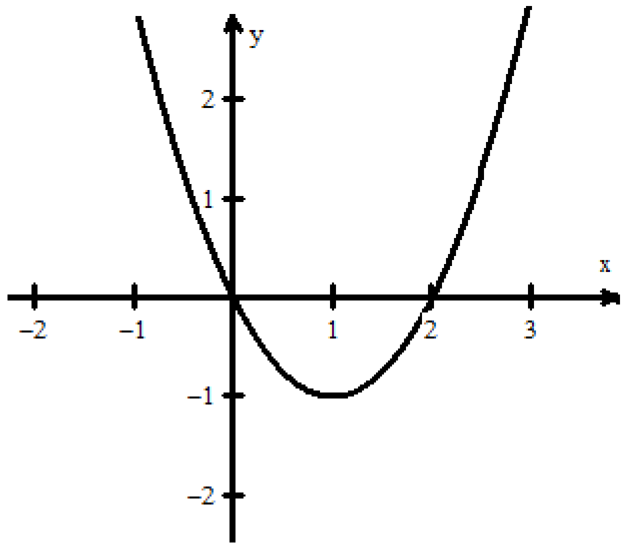


Exemplo 3:

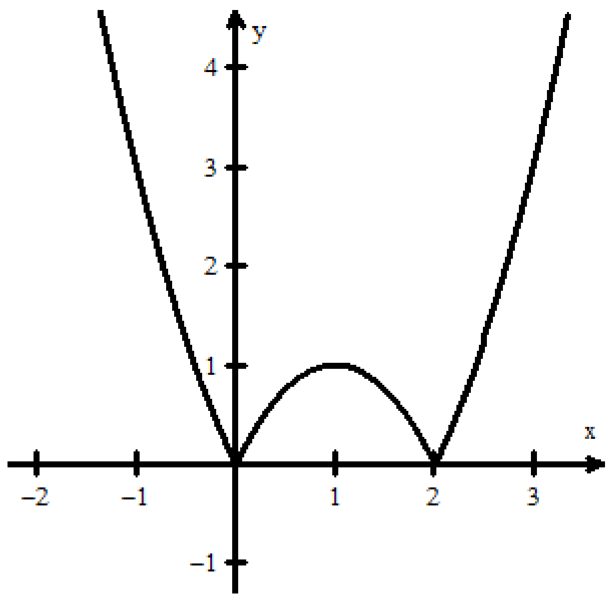
Considere $y=|x^2-2x|$ agora f(x) é uma função quadrática mas se você sabe construir o gráfico de uma funçào quadrática então saberá também construir o gráfico do módulo dela

1°passo construir o gráfico de $y=x^2-2x$

^



2°passo a partir deste gráfico a parte do gráfico que está no intervalo $]0;2[$ fica representada simetricamente em relação ao eixo Ox



Resumo da unidade

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Para obtermos o gráfico $y = |f(x)|$ procedemos da seguinte forma:

- Todos os pontos do gráfico cujas ordenadas são positivas não se alteram
- Em vez dos pontos do gráfico da função f(x) que têm as coordenadas negativas, construímos os pontos correspondentes do gráfico da função $y = -f(x)$
- Como módulo significa o valor absoluto então reflete-se a parte negativa de $f(x)$ para cima do eixo dos x.

Vamos realizar as actividades seguintes para melhor entender

Actividades

Actividades

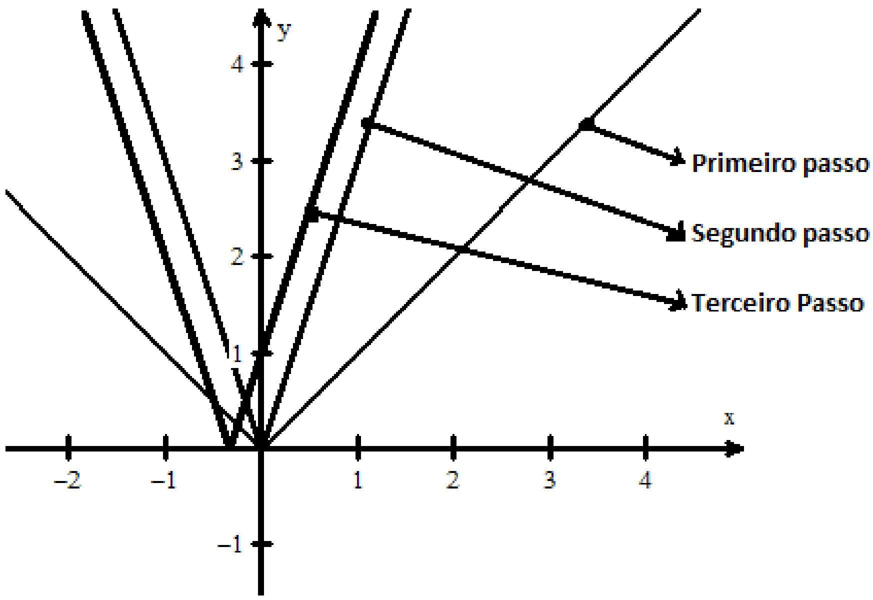
1. Represente o gráfico da função $f(x)=|3x+1|$

Procedimentos

1° Passo: construir $f(x)=|x|$

2° Passo: construir $f(x)=|3x|$ no mesmo SCO.

3° Passo: construir $f(x)=|3x+1|$ no mesmo SCO.



Nota - asb significa valor absoluto ou módulo

Conclusão:

1) O gráfico $f(x)=|3x|$ é uma contração do gráfico de $f(x)=|x|$ ao longo do OX, a partir do eixo oy em 3 vezes.

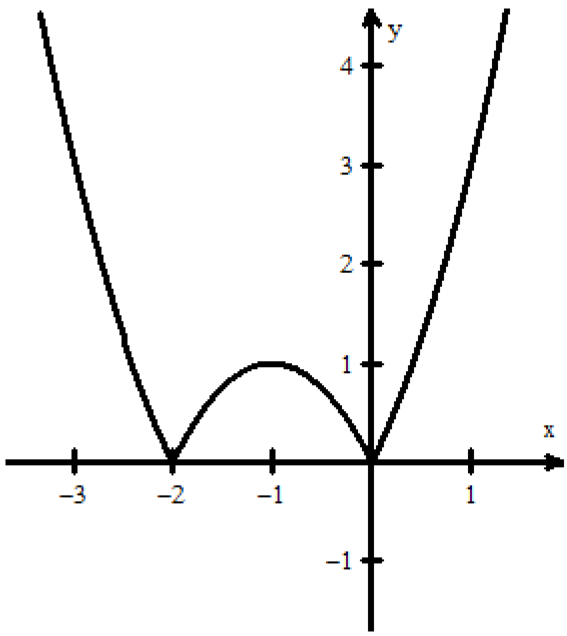
2) A partir do gráfico da função $f(x)=|3x|$, é uma translação à esquerda, ao longo do eixo OX ao valor de $\frac{1}{3}$ e obtemos o gráfico da

função $f(x)=|3x+1|$

2.Represente o grafico da funcao $y=|f(x)|$ **onde** $f(x)=x^2+2x$

1° Passo: construir $f(x)=x^2+2x$

2° Passo: construir $f(x)=|x^2+2x|$ no mesmo SCO a partir do gráfico de $f(x)=x^2+2x$ a parte do gráfico que está no intervalo $]-2;0[$ fica representada simetricamente em relação ao eixo Ox



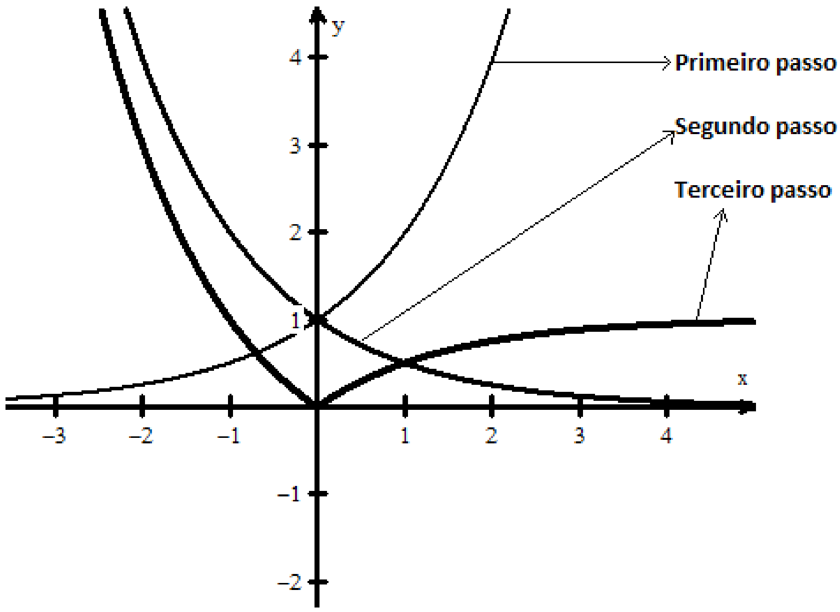
Observe que esta função dada é idêntica a $f(x)=|x^2-2x|$ ***coniderada no exemplo a cima, difere apenas nos zeros da função por isso o procedimento é o mesmo.***

3. Represente o grafico da funcao $y=|2^{-x}-1|$

1° Passo: construir $f(x)=2^{x}$

2° Passo: construir $f(x) = \left|2^{-x}\right|$ no mesmo SCO.

3° Passo: construir $f(x) = \left|2^{-x} - 1\right|$ no mesmo SCO.



Nota - asb significa valor absoluto ou módulo

Simples, você acertou porque é inteligente

Avaliação

Avaliação

Exercicios

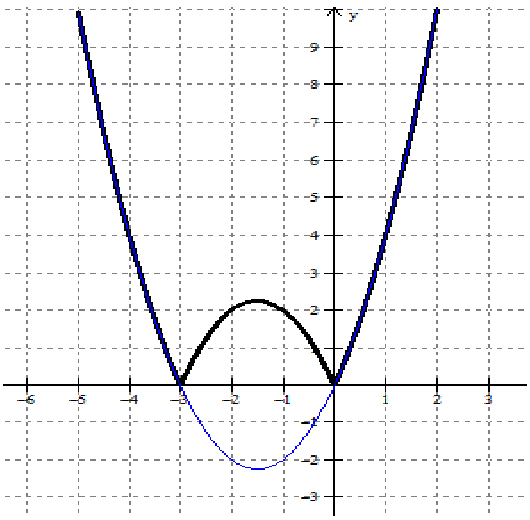
Represente graficamente cada uma das seguintes funções

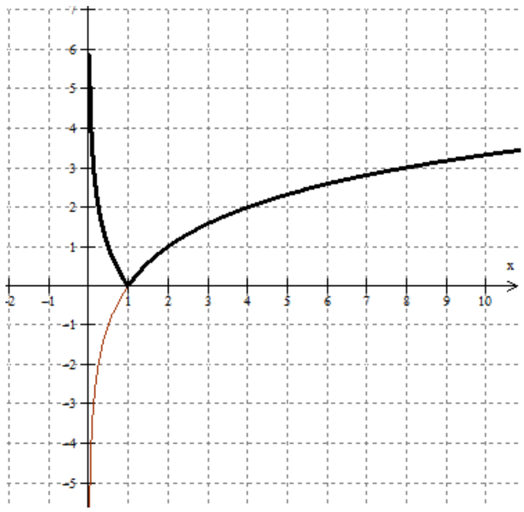
a) $y = |x^2 + 3x|$

b) $y = |\log_2 x|$

c) $y = |x^2 - 4x + 3|$

Resolução





Bom, como a próxima licao vai ser tambem sobre função com módulo deve estar seguro que compreendeu. Este claro de forma a não confundir as duas situações.

Lição 5

Função do tipo $y = f\left(|x|\right)$

Introdução

Nesta licao vamos também fazer a análise em função do sinal do módulo que neste caso so esta ligado a variavel, isto é, os objectos.

Está recordado que na outra função da lição anterior a imagem é que estava sob o sinal de módulo.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Construir* gráficos de funções com módulos.
- *Estudar* gráficos de funções com módulos.

Procedimentos:

Para construir o grafico desta funcao a partir de $f\left(x\right)$

1° Passo: A partir da definicao do modulo vamos tentar mostrar como construir o grafico desta funcao

Como:

$$f\left(|x|\right) = \begin{cases} f\left(x\right) \text{ se } x \geq 0 \\ f\left(-x\right) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

2° Passo: Veja que a partir de módulo o que define a função é $f\left(x\right)$ para valores positivos de x.

O que significa que vamos construir a função para $x>0$ e a parte negativa de x como fica?

3° Passo: Verifique também que $f(|-x|)=f(|x|)$ logo é uma função par lembra- se?

Significa que é uma função simétrica ao eixo dos y.

Procedimento para construir o gráfico da função $y = f(|x|)$

1. Constroi- se $f(x)$ para x> 0
2. Completar o gráfico construindo a parte simetrica da função já construida em relacao ao eixo dos y de modo a obter uma função par.

Então o procedimento será o mesmo das funções da lição anterior? Sim

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu :

- Para construir o gráfico da função $y = f(|x|)$ notemos que para qualquer valor posivo ou zero, temos $|x|=x$ logo $f(|x|)=f(x)$.
- Todos os pontos do gráfico da função $y = f(|x|)$ para $x \geq 0$ são pontos da função $f(x)$ e $y = f(|x|)$ é uma **função par**
- De $|-x| = |x|$ segue que $f(|-x|)=f(|x|)$

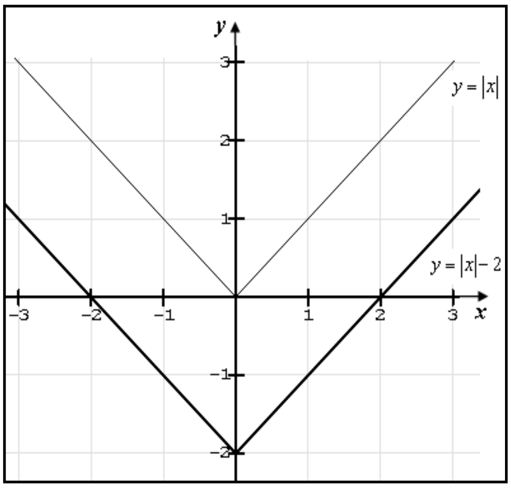
Para construir o gráfico de $y = f(|x|)$ a parte do gráfico y= $f(x)$, à direita do eixo OY é representada simetricamente em relação ao eixo OY.

Actividades

Actividades

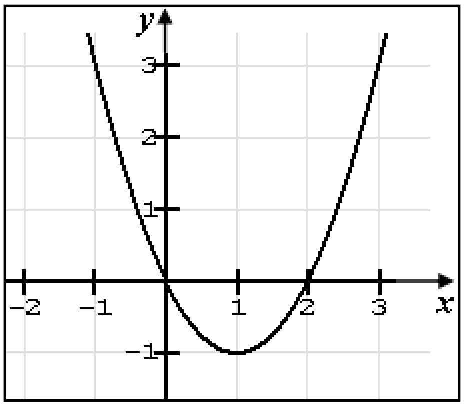
1. Representa o grafico da função $y = f(|x|)$ **se** $f(x) = x\text{-}2$

Construir $f(x)$ para x> 04

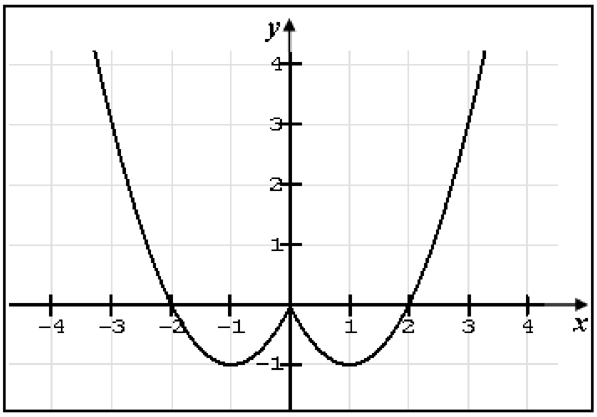


2. Construa o grafico da funcao da $f(x) = |x|^2 - 2|x|$

i) Construir $f(x) = x^2\text{-}2x$ para x> 0



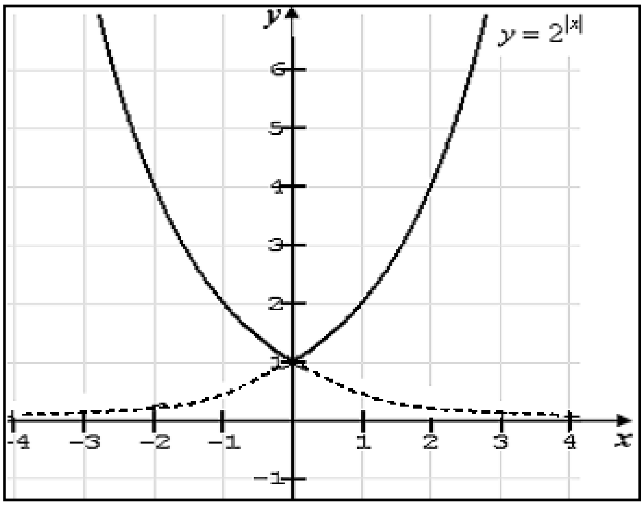
ii) Construir $f(x)$ $f(x) = x^2\text{-}2x$ para x< 0 de modo a completar a função e obter uma função par.



3. Dada a função $y = 2^{|x|}$ represente a graficamente

i) Construir $y = 2^x$ para x> 0

ii) Completar um gráfico de modo a obter o gráfico de uma função par, isto é simétrica em relação ao eixo OY.



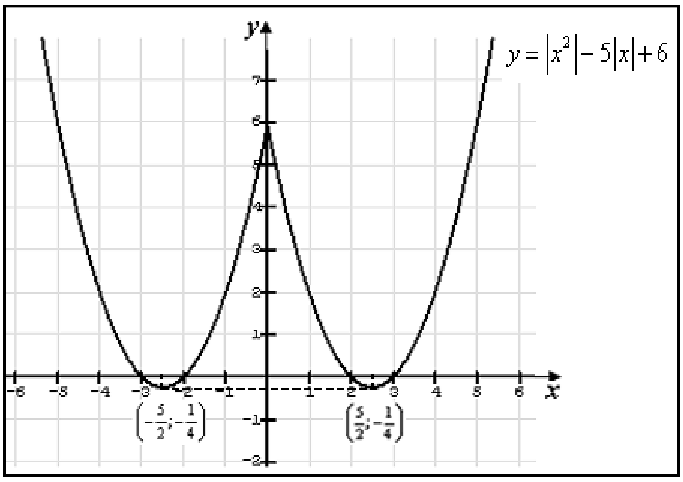
4. Represente graficamente $y=x^2-5|x|+6$

Podemos notar que a função $y=x^2-5|x|+6$ pode ser também representada como: $y=|x|^2-5|x|+6$ porque $x^2=|x|^2$ donde fica claro que esta função é par portanto o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y.

Se x é positivo, a função $y=|x|^2-5|x|+6$ coincide com

$y = x^2 - 5x + 6$, por isso a partir deste último pode ser construido o gráfico da função dada.quer dizer que a parte do gráfico de $y = x^2 - 5x + 6$ onde o x> o representa-se simetricamente em relação ao eixo OY.

Óptimo, agora ficou claro que as funções que você conhece podem ser escritas usando módulos, e estas por sua vez podem ser representadas graficamente



Agora resolva os exrcícios que se seguem para medir o seu nível de

Compreensão.

Avaliação

Avaliação

Exercicios

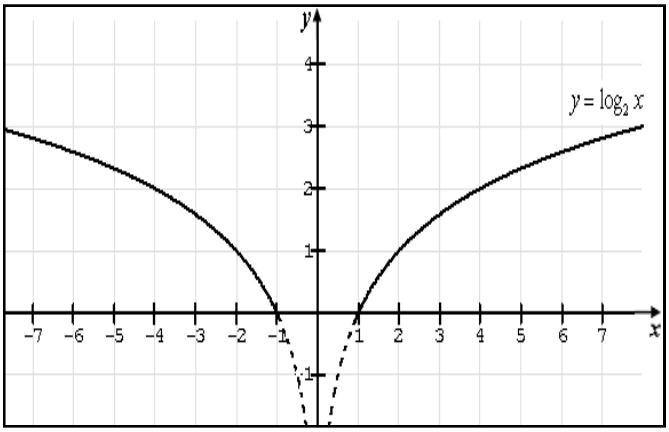
1.Construa o grafico de $y = \log_2 |x|$

2. Construa o gráfico $y = -2|x| + 3$

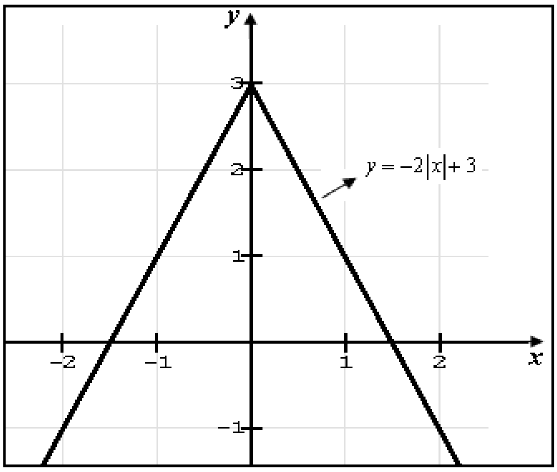
3. Construa o gráfico de $y = -x^2 + 2|x| - 1$

Resolução

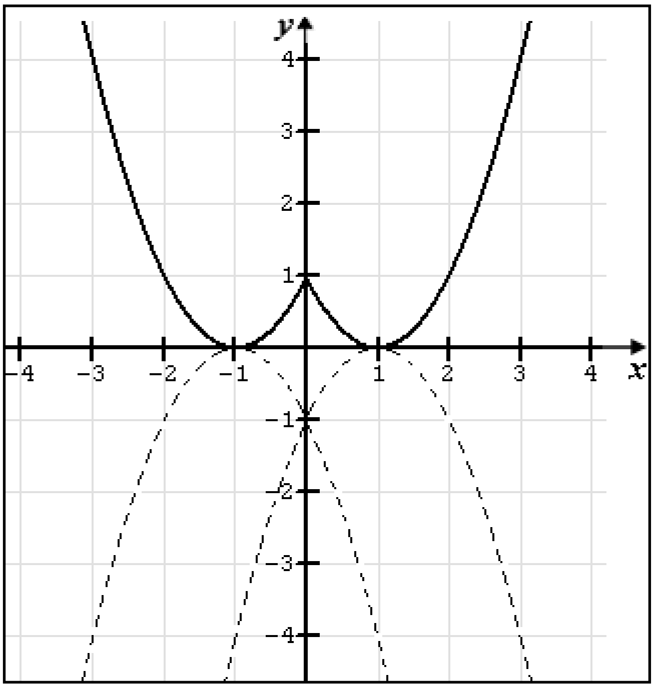
1 $y = \log_2 |x|$



2.



3.



Lição 6

Função inversa

Introdução

No inicio do estudo das funções reais e variavel falamos de tipos de funcões. Um dos tipos de funcoes de que falamos e a **função injectiva** e esta função pelas suas caracteristicas, a objectos diferentes corresponde imagens tambem diferentes.Isto significa que ela torna se reversivel o que significa nos dois sentidos definem uma função.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Definir* a função inversa.
- *Calcular* a função inversa de uma função dada
- *Representar* gráfico de uma função inversa

Você recorda-se de funções de funções injectivas? Claro, vimos essa matéria numa das lições deste módulo.

Diz-se que uma **função f é injectiva** se quaisquer que sejam x_1 e x_2 no seu dominio, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Vimos também, que se **f** for estritamente crescente ou estritamente decrescente, então f é injectiva.

Suponhamos, agora, que f seja injectiva e B é o contradomínio de f. Assim, para cada $u \in B$ existe um único $v \in D_f$ tal que $f(v) = u$

Podemos, então, considerar a função **g**, definida em B, dada por

$$\boxed{g(u) = v \Leftrightarrow f(v) = u}$$

Tal função g denomina-se **função inversa de f.**

Se **f** for uma função que admite inversa, então diremos que f é uma funcao inversivel.Observe que se **f** for uma função inversivel, com inversa **g**, então **g** também será inversivel e sua inversa será f.

Suponhamos que **f** admita inversa **g**. Temos.

$$\boxed{(a,b)\in f \Leftrightarrow b=f(a) \Leftrightarrow a=g(b) \Rightarrow (b,a)\in g}$$

Significa isso que se duas funções são inversa entre si o dominio duma e igual ao contradomínio da outra.para designar uma inversa de f usa se a notação f^{-1}.

Agora vamos procurar a forma de encontrar a expressao analitica da funcao inversa a partir de uma expressao analitica da funcao dada.

Neste caso toma- se sempre a expressão analitica da função dada procedendo da seguinte forma:

1. Toma-se a expressão como uma equação e resolve se a mesma em ordem a x

2.Trocando o **x** por y e vice-verse obtem se a função inversa da dada.

Preste atenção aos seguintes exemplos:

Exemplo 1

1.Determina a expressao analitica da funcao inversa de $f(x)=2x+4$

-Escrvendo a funcao na forma $y = 2x + 4$ e depois resolver em ordem a x obtemos:

$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

- Trocando o x por y ou vice-verse obtemos que e a função inversa da dada.

$$x=\frac{y}{2}-2 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-2 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-2$$

Exemplo 2

2.Determina a expressao analitica da funcao inversa de

$$f(x)=2^x+1 \Leftrightarrow y=2^x+1 \Leftrightarrow 2^x=y\text{-}1 \Leftrightarrow$$
$$x=\log_2(x-1) \Leftrightarrow y=\log_2(x-1) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\log_2(x-1)$$

Como se pode ver que neste caso também resolveu- se a equação em ordem a x e no fim trocou-se o **x** por **y** essa é a função inversa.

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu:

- **Definição**: seja **f** um função injectiva e B o contradomínio de f. Assim, para cada $u \in B$ existe um único $v \in D_f$ tal que $f(v)=u$ Podemos, então, considerar a função
- **g**, definida em B, dada por $\boxed{g(u)=v \Leftrightarrow f(v)=u}$ A Função

  Inversa de f. Para designar uma inversa de **f** usa se a notacao f^{-1}
- As funções injectivas é que admitem funções inversas.
- Quando duas funcoes são inversas entre si o dominio duma é igual ao contradominio da outra.para designar uma inversa de

Procedimentos para encontrar a expressão analítica da função inversa de uma dada função:

- ✓ **Toma-se a expressao como uma equacao e resolve se a mesma em ordem a x**
- ✓ **Trocando o x por y obtém se a funcao inversa da dada.**

Actividades

Actividades

1.Determine as funções inversas das seguintes funções:

Bastante simples, vamos considerar as funções dadas como equações e resolvê-las em ordem a variável x:

a) $y=\sqrt{2x+1} \Rightarrow x=\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x^2=2y+1 \Leftrightarrow y^{-1}=\dfrac{x^2-1}{2}$

Resposta: $y^{-1}=\dfrac{x^2-1}{2}$ é a função inversa da função dada

b)

$$y=\frac{x}{4x-1} \Rightarrow x=\frac{y}{4y-1} \Leftrightarrow (4y-1)x=y \Leftrightarrow 4yx-x=y$$

$$\Leftrightarrow 4yx=y+x \Leftrightarrow (4x-1)y=x \Leftrightarrow y^{-1}=\frac{x}{4x-1}$$

Resposta: $y^{-1}=\dfrac{x}{4x-1}$ é a função inversa

5. Determine as funções inversas de e esboce os gráficos das seguintes funções: a) $y=x^2$ b) $y=\dfrac{3x}{x+1}$

a) **Resposta**: a a função $y=x^2$ não admite função inversa porque ela não é injectiva

b)

$y=\dfrac{3x}{x+1}$

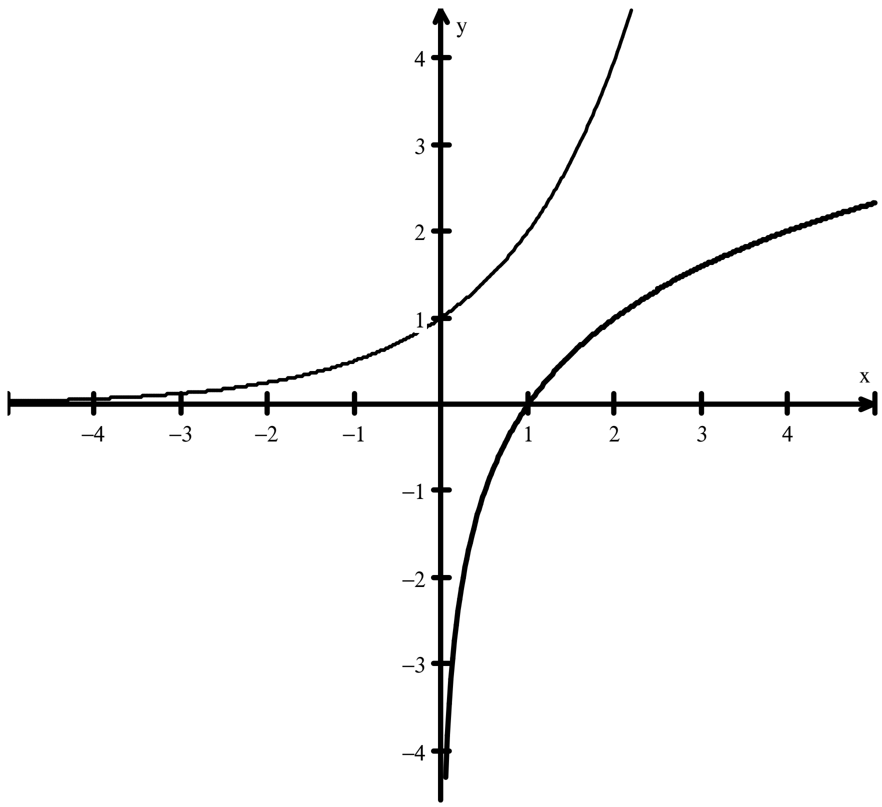
1º) Calcula-se o Dominio de existencia: $D=x\in \square \setminus\{-1\}$ ou $x\neq 3$

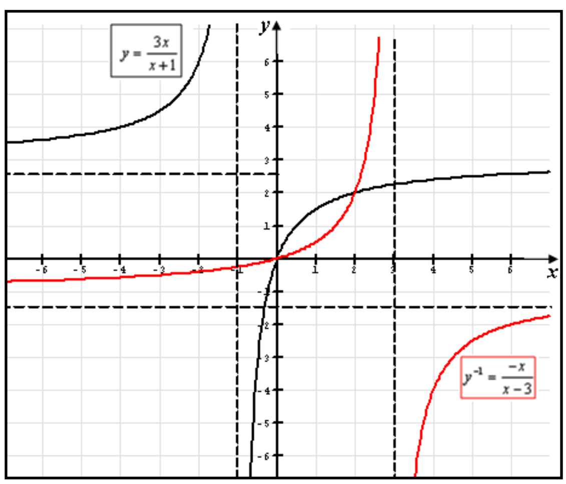
2°) $y=\dfrac{3x}{x+1} \Rightarrow x=\dfrac{3y}{y+1} \Leftrightarrow xy+x=3y \Leftrightarrow y^{-1}=\dfrac{-x}{x-3}$

cujo do min io de existencia: $D=x\in \square \setminus\{3\}$ ou $x\neq 3$

3°) Para construir o gráfico desta função vamos construir em primeiro lugar o gráfico da função dada e com base a representação da sua inversa,

Sugiro o uso de 2^{x} **e sua inversa** $\log_2 x$ **que na figura abaixo está sob notação** $\log(2,x)$





E pronto, a representação da função dada em primeiro lugar, tornou fácil a representação gráfica da sua função inversa

Avaliação

Avaliação

1.Determine as funções inversas de:

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = \dfrac{1}{4x^3 + 2}$

2.Ache a função inversa de y = x e construa o respectivo gáfico

Resolução

a)

$$y = x^2 + 2 \Rightarrow x = y^2 + 2 \Leftrightarrow y^2 + 2 = x \Leftrightarrow y^2 = x - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^{-1} = \sqrt{x-2}$$

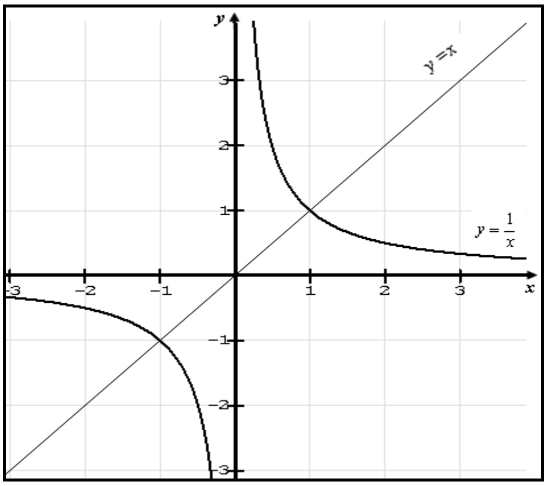
Resposta: $y^{-1} = \sqrt{x-2}$ é a função inversa da função dada

b)

$$y = \frac{1}{4x^3 + 2} \Rightarrow x = \frac{1}{4y^3 + 2} \Leftrightarrow \left(4y^3 + 2\right)x = 1 \Leftrightarrow 4y^3 x + 2x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{1-2x}{4x} \Leftrightarrow y^{-1} = \sqrt[3]{\frac{1-2x}{4x}}$$

Resposta: $y^{-1} = \sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{4x}}$ é a função inversa da função dada

1. Ache a função inversa de y = x e construa o respectivo gáfico


y
x
y = x
$y = \frac{1}{x}$
-3
-2
-1
1
2
3

Lição 7

Composição de funções

Introdução

Caro estudante , você já estudou vários tipos de funções neste módulo, agora o que lhe falta é efectuar operações sobre elas. As operações sobre as funções dependem muito do conhecimento que você tem sobre os conceitos aplicação, domínio e contradomínio de funções. De certeza que você irá gostar bastante desta lição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Adicionar* funções.
- *Multiplicar* funções
- *Efectuar* a composição de funções

Antes de falarmos da composição de funções falemos das outras operações que são feitas sobre as funções para treinar o nosso pensamento ou para melhor actuar.

Adição de funções

Define-se como a soma de duas funções $f:x\rightarrow y$ e $g:x\rightarrow y$ uma função $h:x\rightarrow y$ tal que para cada número fixo, a sua imagem sobre a aplicação é: $f+g=h$ ou $f(x)+g(x)=h(x)$

Exemplo: dadas as funções

$$f(x)=2x+1\ ;\ \text{e}\ \ g(x)=2x \Rightarrow h(x)=f(x)+g(x)=2x+1+2x$$

$$h(x)=4x+1$$

Certo, acaba de adicionar polinómios logicamente

Multiplicação de funções

Define-se como multiplicação de duas funções $f: x \to y$ e $g: x \to y$ uma função $h: x \to y$ tal que para cada número fixo, a sua imagem sobre a aplicação é: $f.g = h$ ou $f(x).g(x) = h(x)$

Exemplo: dadas as funções
$f(x) = 2x + 1$; e $g(x) = 2x \Rightarrow h(x) = f(x).\,g(x) = (2x+1).2x$

$$h(x) = 4x^2 + 2x$$

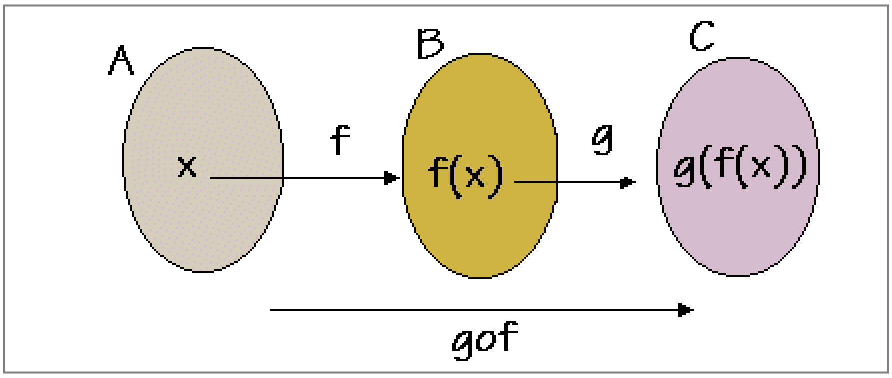
Certo, acaba de multiplicar polinómios logicamente

Agora podemos falar de composição de funções, em linguagem vulgar trata-se de "funções dependentes de outras funções"aí tem a definição.

Composição de funções

Definição dadas as funções f: A→B e g: B→C, a composta de f com g, denotada por g o f, é a função definida por (g o f) (x) =g (f(x)). gof pode ser lida como "g após f" ou seja sóse aplica a lei g depois de ter aplicado a lei f.

Para que a composição ocorra o Contradomínio de f deve ser igual domínio de g



Exemplo: Sejam as funções reais definidas por f (u) =4u+2 e

g(x)=7x-4. As composições **fog** e **gof** são possíveis e neste caso

serão definidas por:

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=g(7x-4)=4(7x-4)+2=28x-14$$

$$(g \circ f)(u)=g(f(u))=g(4u+2)=7(4u+2)-4=28u+10$$

Como a variável **u** não é importante no contexto, ela pode ser substituída por x e teremos:

$$(g \circ f)(x)=g\ (f(x))\ =g\ (4x+2)\ =7(4x+2)-4=28x+10$$

Observação: Em geral**, f o g** é diferente de **g o f.**

Exemplo: Consideremos as funções reais definidas por $f(x) = x^2+1$ $g(x)= 2x-4$. Então:

$$(f \circ g)\ (x) = f\ (g\ (x))\ =f\ (2x-4)\ =(2x-4)^2+1=4x^2-16x+17$$
$$(g \circ f)\ (x) = g\ (f\ (x))\ =g\ (x^2+1)\ =2\ (x^2+1)\ -4=2x^2-2$$

Resumo da Lição

Resumo

Recordou que:

$$f+g=h \quad \text{ou} \quad f(x)+g(x)=h(x)$$

$$f.g=h \quad \text{ou} \quad f(x).g(x)=h(x)$$

Aprendeu que

Definição : dadas as funções f: $A \rightarrow B$ e g: $B \rightarrow C$, a composta de f com g, denotada por $g \circ f$, é a função definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. gof pode ser lida como "g após f".

Para que a composição ocorra o Contradomínio de f deve ser igual domínio de g

Em geral, $f \circ g$ é diferente de $g \circ f$.

Actividades

Actividades

1.dadas as funções:

$$y_1=\sqrt{2x+1}\ ;\ y_2=\frac{1}{4x^3+2};\ y_3=\frac{x}{4x-1};\ y_4=x^2+2$$

Efectue: a) y_3+y_2 b) $y_1\times\frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}$

Resolução

$$a)\ y_3+y_2=\frac{1}{4x^3+2}+\frac{1}{4x-1}=\frac{(4x-1)+\left(4x^3+2\right)}{(4x-1)\left(4x^3+2\right)}=\frac{4x+4x^3+1}{(4x-1)\left(4x^3+2\right)}$$

$$b)\ y_1\times\frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x+1}\times\frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}=\frac{(1-x)\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x-1}}$$

2.

Dadas $f(x)=x^2\ ;\ g(x)=\frac{1}{x+1}$ calcular:

$$gof=g(f(x))=g\left(x^2\right)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$fOg=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$$

2 Dadas as funções:

$$f(x)=x^2+1\ ;\ g(x)=\sqrt{2x+1}\ ;\ h(x)=\frac{x}{2x^2-3}$$

Resolva :

a) $fogoh(x)$ b) $gohof(x)$

Resolução

$$\text{a) } fogoh(x)=f\left[g(h(x))\right]=f\left[g\left(\frac{x}{2x^2-3}\right)\right]=f\left(\sqrt{2.\frac{x}{2x^2-3}+1}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2x}{2x^2-3}+1}\right)^2+1=\frac{2x}{2x^2-3}+2$$

$$\text{b) } gohof(x)=g\left[h(f(x))\right]=g\left[h\left(x^2+1\right)\right]=\left[\left(\frac{x^2+1}{2x^2-3}\right)^2+1\right]=$$

$$=\sqrt{2\left[\left(\frac{x^2+1}{2x^2-3}\right)^2+1\right]+1}$$

3 Calcule:

a) $gohof(2)$ b) $hof(-3)$

Resolução

$$\text{a) } gohof(2)=\sqrt{2\left[\left(\frac{2^2+1}{2.2^2-3}\right)^2+1\right]+1}=\sqrt{2.(2+1)}=\sqrt{6}$$

$$\text{b) } hof(-3)=h(f(-3))=h\left((-3)^2\right)=\frac{9}{2.9^2-3}$$

Avaliação

Avaliação

1.dadas as funções:

$$y_1=\sqrt{2x+1}\ ;\ y_2=\frac{1}{4x^3+2};\ y_3=\frac{x}{4x-1};\ y_4=x^2+2$$

Efectue: a) $y_1 \times y_2$ b) $y_3 \times y_4$

2. Dadas as funções:

$$f(x)=x^2+1\ ;\ g(x)=\sqrt{2x+1}\ ;\ h(x)=\frac{x}{2x^2-3}$$

Resolva :

$hofog(x)$

3. Calcule:

a) $hofog(3)$ b) $goh(1)$ c) $hoh(-1)$

Resolução

1. Dadas as funções:

$$y_1=\sqrt{2x+1}\ ;\ y_2=\frac{1}{4x^3+2};\ y_3=\frac{x}{4x-1};\ y_4=x^2+2$$

Efectue: a) $y_1 \times y_2$ b) $y_3 \times y_4$

$$a)\ y_1+y_2=\sqrt{2x+1}\quad +\frac{1}{4x^3+2}=\frac{\left(4x^3+2\right)\sqrt{2x+1}}{4x^3+2}$$

$$b)\ y_3 \times y_4=\frac{x}{4x-1}\cdot\left(x^2+2\right)=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4x-1}$$

2. Dadas as funções:

$$f(x)=x^2+1\ ;\ g(x)=\sqrt{2x+1}\ ;\ \ h(x)=\frac{x}{2x^2-3}$$

Resolva :

$$\text{hofog}(x)=h\left[f\left(g(x)\right)\right]=h\left[f\left(\sqrt{2x+1}\right)\right]=h\left[\left(\sqrt{2x+1}\right)^2+1\right]=$$

$$=h(2x+2)=\frac{2x+2}{2(2x-2)^2-3}$$

3. Calcule:

$$\text{a) hofog}(3)=h\left[f\left(g(3)\right)\right]=\frac{2.3+2}{2(2.3+2)^2-3}=\frac{8}{125}$$

$$\text{b) goh}(x)=g\left(h(x)\right)=g\left(\frac{x}{2x^2-3}\right)=\sqrt{2\left(\frac{x}{2x^2-3}\right)^2-3}$$

$$\text{logo: goh}(1)=\sqrt{2\left(\frac{1}{2.1^2-3}\right)^2-3}=\sqrt{2.1-3}=\sqrt{-1}$$

$$\text{c) hoh}(x)=h\left(h(x)\right)=h\left(\frac{x}{2x^2-3}\right)=\frac{\dfrac{x}{2x^2-3}}{2\left(\dfrac{x}{2x^2-3}\right)^2-3}$$

$$\text{hoh}(-1)=\frac{\dfrac{-1}{2(-1)^2-3}}{2\left(\dfrac{x}{2(-1)^2-3}\right)^2-3}=\frac{-1}{-1}$$

Lição 8

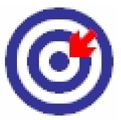
Introdução à Trigonométrica

Introdução

Caro estudante, como você sabe a trigometria não foi obra de uma única pessoa mas sim de várias pessoas e nações pois ela surgiu da necessidade de resolver problemas em muitos ramos da Ciência tais como Astronomia, física, Topologia etc. Contudo, o principal fundador foi o astrónomo HIPARCO (180-125 A.C). portanto a trigonometria foi descoberta a séculos devido a sua particularidade de ser a ciência da medição. Mas até hoje tem a sua aplicação no mundo desenvolvido como por exemplo na área de construção, aviação etc.

Você vai ter mais uma oportunidade para viver assuntos muito interessantes do seu quotidiano nesta unidade.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

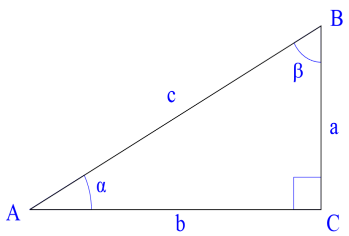


Objectivos

- *Definir* as razões trigonométricas de um angulo
- *Definir o* radiano como unidade de medida de um ângulo.
- *Reduzir* qualquer angulo ao 1° quadrante do círculo trigonométrico

Vamos fazer uma revisão de alguns conceitos para podermos caminhar bem

Não se esqueça que você estudou na 10ª classe que , num triângulo rectângulo ABC como mostra a figura



a é o cateto oposto ao ângulo α, **b** é o cateto adjacente ao ângulo α, **c** é a hipotenusa, α e β são ângulos complementares cuja sua soma é igual a 90° portanto: $\alpha+\beta=90^\circ$.

Sendo assim, as razões trigonométricas podem ser definidas do seguinte modo:

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ a partir destas razões trigonométricas básicas podem ser produzidas as outras como **tangente, cotangente, secante e cossecante.**

Podemos resumir estas definições através da seguinte tabela:

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$	$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
$\text{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$	$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$
$\sec\alpha = \frac{c}{b}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
$\cos\sec\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\sec\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$

Portanto, as razões cotg, sec e cossec são as razões inversas de tg, cos e sen respectivamente:

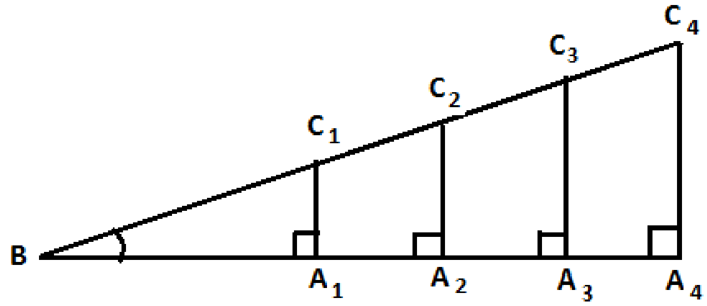
Razão trigonométrica	**Razão inversa**
Seno, $\text{sen}\alpha$	Secante, $\sec\alpha$
Co-seno, $\cos\alpha$	Co-secante, $\cos\sec\alpha$
Tangente, $\text{tg}\alpha$	Cotangente, $\text{cotg}\alpha$

Você pode não ter falado das razões **sec α (secante) e cosec α (cosecante)** na 10ª classe mas é mais um conhecimento que vai lhe ajudar a resolver problemas neste capítulo.

Caro estudante, as razões não são nada nem nada menos que:

As relações entre os lados do triângulo rectângulo e que têm a propriedade de determinar a medida dos ângulos do triângulo, uma vez que seus lados sejam conhecidos.

Se considerarmos a seginte figura:



Um fato interessante é que, como pode ser observado na figura, usando o fato de que os triângulos A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3, A_4BC_4, ... são semelhantes, designando por **x** o ângulo de vértice em B, imediatamente concluímos que:

$$\operatorname{Sen} x = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4}$$

Assim como,

$$\operatorname{Cos} x = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4}$$

e

$$\operatorname{Tg} x = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4}$$

ou seja, Sen x, Cos x, Tg x não dependem do particular triângulo retângulo ABC, mas apenas do ângulo , cuja medida é **x** graus.

Por outro lado, podem ser estabelecidas relações úteis entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer, não necessariamente retângulo, podendo ser <u>acutângulo</u> ou <u>obtusângulo</u>, ampliamos o domínio das funções definidas acima, colocando:

Sen 90°=1
Cos 90°= 0

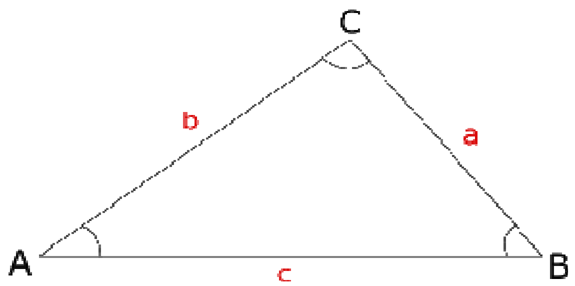
Sen (180°- x) = Sen x
Cos(180°- x) = Cos x
Tg(180°- x)= Tgx

Indicando pela letra minúscula o lado oposto a cada vértice do triângulo, que é denotado pela correspondente letra maiúscula, e indicando por A a medida em graus do ângulo $\hat{A}$, B a medida em graus do ângulo $\hat{B}$ e C a medida em graus do ângulo $\hat{C}$, temos:

Leis do seno e do cosseno

Os problemas envolvendo trigonometria são resolvidos através da comparação com triângulos rectângulos. Mas no quotidiano geralmente não encontramos tamanha facilidade, algumas situações envolvem triângulos acutângulos ou triângulos obtusângulos. Nesses casos necessitamos do auxílio da lei dos senos ou dos cossenos.

Considere o triângulo ABC



<u>Lei dos senos:</u>

A lei dos senos estabelece relações entre as medidas dos lados com os senos dos ângulos opostos aos lados. Observe:

Em todo triângulo ABC, vale a seguinte relação:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

<u>Lei dos co-senos:</u>

Em todo triângulo ABC, valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}\,A$$

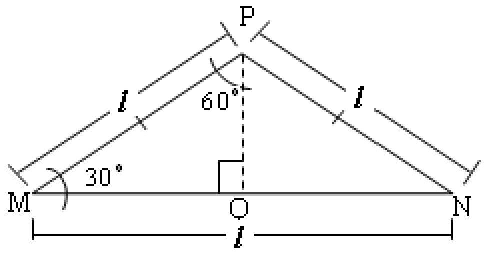
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\mathrm{Cos}\,B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}\,C$$

Tomemos alguns exemplos:

Exemplo

Considere o triângulo MNP equilátero de lado l.



1.Determine:

a) A altura relativa ao lado MN.

b) As razões trigométricas dos angulos de 30° e 60°

c) As medidas dos ângulos do triângulo MQP

É bastante simples, observemos muito bem a figura antes de mais nada e depois aplicamos as fórmulas acima.

1. Determine aplicando lei dos senos ou lei dos cossenos

Exemplo·

Num triângulo, os lados de medidas $6\sqrt{3}$ cm e 8 cm formam um ângulo de 30º. Determine a medida do terceiro lado.

De acordo com a situação, o lado a ser determinado é oposto ao ângulo de 30º. Dessa forma, aplicamos a fórmula da lei dos cossenos da seguinte maneira:

$$x^2=\left(6\sqrt{3}\right)^2+8^2-2.6\sqrt{3}.8\cos 30°$$

$$x^2=36.3+64-2.+8^2-2.6\sqrt{3}.8.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2=172-144=28$$

$$x=2\sqrt{7}$$

Você precisa de recordar os valores de alguns ângulos que não necessitam da tabela trigonométrica. Os chamados ângulos notáveis. Aqui tem um pequeno quadro:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Seno	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Exemplo:

Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\operatorname{sen}30° + \cos^2 45° + \operatorname{tg}30° + \operatorname{sen}^2 60°$

b) $1-\cot g^2 60° + \dfrac{\sec^2 30°}{1-\cos^2 45°}$

Resolução

$$\text{a)}\ \operatorname{sen}30° + \cos^2 45° + \operatorname{tg}30° + \operatorname{sen}^2 60° = \frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$$

$$b)\ 1-\cot g^{2}60^{\circ}+\frac{\sec^{2}30^{\circ}}{1-\cos^{2}45^{\circ}}=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}}=1-\frac{3}{9}+\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{4}}=$$

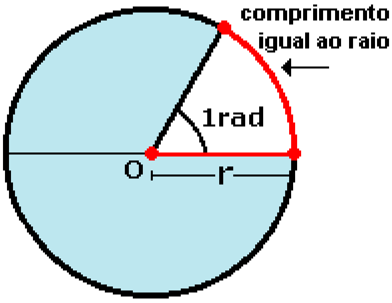
$$=1-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right).\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

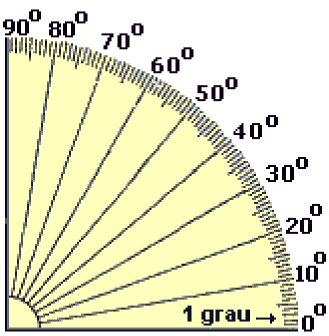
Formidável, auténtica aritmética, não precisa de tabela trigonométrica porque se trata de ângulos notáveis.é só substituir as substituir as razões trigonométricas dos ângulos dados pelos seus valores.

Avancemos

Lembre-se também que a unidade de medição de ângulos é o **grau** no sistema sexagesimal mas, existem outros sistemas de medição de ângulos como os sistemas centesimal e circular. Interessa-nos também agora falar do sistema circular que tem como unidade o **radiano** e denota-se por **rad (r = rad).**

Definição: chama-se radiano ao comprimento de um arco de circunferência igual ao seu raio.





$\alpha=\frac{1}{r}\text{rad}$ para uma volta completa $\alpha=\frac{2\pi r}{r}\text{rad}=2\pi\text{rad}$

Exemplo:

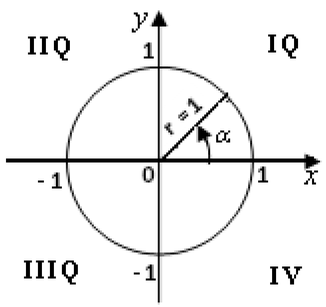
$\frac{\pi}{2}\text{rad}=\frac{\pi}{2}.\frac{180^{0}}{\pi}=90^{0}$ e $135^{0}=135^{0}.\frac{180^{0}}{\pi}\text{rad}=\frac{3}{4}\pi\text{rad}$

Óptimo, podemos fazer conversão de graus para radianos e vice-versa.

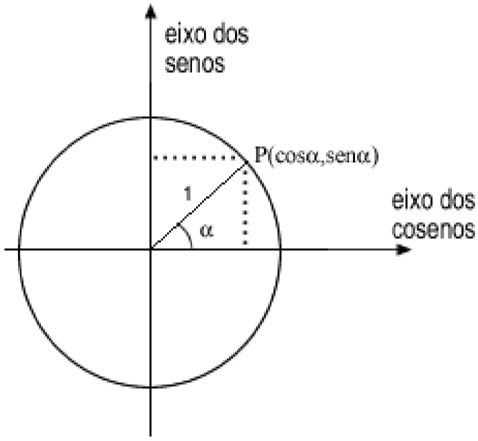
Entretanto, não interessa a limitação do domínio dessas funções Sen, Cos e Tg, ao intervalo] 0˚,180˚[, nem tão pouco o uso da unidade grau para a medida dos ângulos pois, queremos definir funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de todos os números reais, inclusive com uma medida que seja mais interessante.

Para isso, precisamos abandonar o triângulo retângulo e utilizar um outro modelo geométrico que nos permita estabelecer relações semelhantes aquelas válidas no triângulo retângulo. O modelo geométrico é a circunferência orientada de raio unitário, na qual será possível ampliar todos os conceitos e alcançar os objetivos propostos.

Esta circunferência é chamada também de **círculo trigonométrico** um círculo de raio unitário, com o centro que coincide com a origem dos eixos ortogonais. E cada região determinada por estes eixos chama-se quadrante. Portanto temos quatro quadrantes para o círculo trigonométrico.



Relacionando o círculo trigonometrico e os eixos cartesianos podemos definir as razões trigometricas em função das projecções do de um ponto P que tanto percentence a circunferência como também ao plano definido pelos eixos Cartesianos:



P_x e P_y São as projecções de P em relação aos eixos das abcissas e das ordenadas, respectivamente.

Sendo ΔOPP_x um triângulo rectângulo

$\overline{OP_x} = X_p$ e $\overline{OP_y} = y_p$, logo:

$sen\alpha = y_p$	$\cos\alpha = x_p$
$tg\alpha = \frac{y_p}{x_p}$	$cotg\alpha = \frac{x_p}{y_p}$

Exemplo: complete a tabela seguinte

x	senx	cosx	tgx	cotgx
0°		1		
90°				
180°				Nao existe
270°	-1			
360°			0	

Fácil, aplica-se a definição das razões trigonométricas nos eixos ortogonais e considera-se medida de raio igual a unidade.

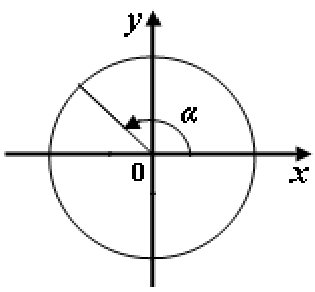
x	senx	cosx	tgx	cotgx
0°	0	1	0	Nao existe
90°	1	0	Nao existe	0
180°	0	-1	0	Nao existe
270°	-1	0	Nao existe	0
360°	0	1	0	Nao existe

<u>Redução ao 1° Quadrante</u>

As tabelas trigonométricas facilitam-nos na determinação de razões trigométricas de ângulos agudos ou seja ângulos que pertencem ao 1° Quadrante. Daí a necessidade de Redução de ângulos maiores que 90° ao 1° Quadrante. Através do círculo trigonométrico é possível calcular valores de ângulos que pertencem aos outros quadrantes.

1. Ângulos no segundo quadrante ($\alpha \in \text{II}\,Q$)

Se o ponto M está no segundo quadrante, de modo que o ângulo pertence ao intervalo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então a cotangente de a é negativa. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tem-se que $\text{cotg}\,\frac{\pi}{2} = 0$.



Tomemos um ângulo de 100° então:

$\alpha = 100^0 \Rightarrow \beta = 180^0 - 100^0 = 80^0$ Pela simetria axial em relação ao eixo OY teremos:

$\text{Sen}100^{\circ} = y_p = y_{p'} = \text{sen}80^{\circ}$ depois pode-se usar a tabela trigonométrica para ter o valor

$$\cos 100^{\circ} = x_p = -x_{p'} = -\cos 80^{\circ}$$

$$\text{tg}100^{\circ} = -\text{tg}80^{\circ} \quad \text{e} \ \text{cotg}100^{\circ} = -\text{cotg}80^{\circ}$$

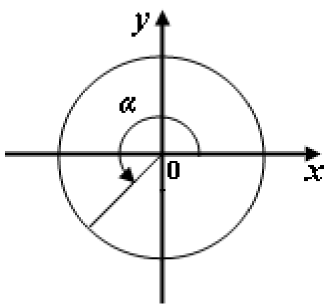
$$\cos 100^{\circ} = x_p = -x_{p'} = -\cos 80^{\circ}$$

Como pode ver a figura torna muito clara a seguinte generalização:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{sen}\alpha = \text{sen}\left(180^{\circ} - \alpha\right) \\ &\cos\alpha = -\cos\left(180^{\circ} - \alpha\right) \\ &\text{tg}\alpha = -\text{tg}\left(180^{\circ} - \alpha\right) \\ &\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}\left(180^{\circ} - \alpha\right) \end{aligned}}$$

2. Ângulos no terceiro quadrante ($\alpha \in \text{III Q}$)

Se o ponto M está no terceiro quadrante, o ângulo está no intervalo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e nesse caso, a cotangente é positiva. Quando $\alpha = \pi$, a cotangente não existe, as retas que passam por OM e BS são paralelas.



Tomemos um ângulo de 200˚ então:

$\alpha = 200^{\circ} \Rightarrow \beta = 200^{\circ} - 180^{\circ} = 20^{\circ}$ pela simetria central com centro em **o** teremos :

$\text{Sen}200^\circ = y_p = y_{p'} = -\text{sen}20^\circ$ depois pode-se usar a tabela trigonométrica para ter o valor

$$\cos 200^\circ = x_p = -x_{p'} = -\cos 20^\circ$$

$$\text{tg}200^\circ = \text{tg}20^\circ \quad \text{e} \quad \text{cotg}200^\circ = \text{cotg}20^\circ$$

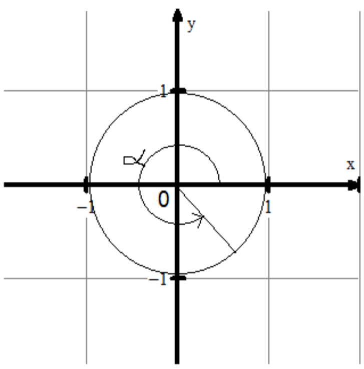
Note que o sinal para tg e cotg é positivo porque estas razão são o quociente de sen e cos que neste caso são ambos negativos.

Como pode ver a figura torna muito clara a seguinte generalização:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = -\text{sen}\left(\alpha - 180^\circ\right) \\ \cos\alpha = -\cos\left(\alpha - 180^\circ\right) \\ \text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\alpha - 180^\circ\right) \\ \text{cotg}\alpha = \text{cotg}\left(\alpha - 180^\circ\right) \end{array}}$$

3. Ângulos no quarto quadrante $\alpha \in \text{IV Q}$

Se o ponto M está no quarto quadrante, o ângulo **a** pertence ao intervalo $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, assim a cotangente de α é negativa. Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\text{cotg}\frac{3\pi}{2} = 0$.



Tomemos um ângulo de 300˚ então:

$\alpha = 300^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ pela simetria axial do eixo OX teremos :

$\text{Sen}300^\circ = y_p = -y_{p'} = -\text{sen}60^\circ$ depois pode-se usar a tabela trigonométrica para ter o valor

$\cos 300^\circ = x_p = x_{p'} = \cos 60^\circ$

$\text{tg}300^\circ = -\text{tg}60^\circ$ e $\text{cotg}300^\circ = -\text{cotg}60^\circ$

Como pode ver a figura torna muito clara a seguinte generalização:

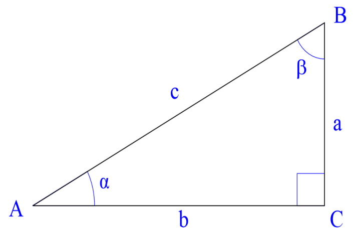
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{sen}\alpha = -\text{sen}\left(360^\circ - \alpha\right) \\ &\cos\alpha = \cos\left(360^\circ - \alpha\right) \\ &\text{tg}\alpha = -\text{tg}\left(360^\circ - \alpha\right) \\ &\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}\left(360^\circ - \alpha\right) \end{aligned}}$$

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu :

Para o triângulo rectanculo ABC



$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\text{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\sec\alpha = \frac{c}{a}$ $\sec\alpha = \frac{c}{b}$

<u>Lei dos senos:</u>

- Em todo triângulo ABC, vale a seguinte relação:

$$\frac{a}{\text{Sen}\,A} = \frac{b}{\text{Sen}\,B} = \frac{c}{\text{Sen}\,C}$$

- **<u>Lei dos co-senos:</u>**

Em todo triângulo ABC, valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}\,A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\text{Cos}\,B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{Cos}\,C$$

- Chama-se radiano ao comprimento de um arco de circunferência igual ao seu raio.
- Se o arco da circunferência corresponder a uma volta completa, então: $\alpha = 2\pi\text{rad}$

- Se o arco da circunferência corresponder a meia volta então: $\alpha = \pi \text{rad}$

- Se o arco da circunferência corresponder a um quarto da volta, então: $\alpha = \frac{\pi}{2}\text{rad}$

- Se o arco da circunferência corresponde à n-ésima parte da volta, então: $\alpha = \frac{2\pi}{n}\text{rad}$

- Quando $\alpha \in IIQ$

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\left(180^\circ - \alpha\right)$$

$$\cos\alpha = -\cos\left(180^\circ - \alpha\right)$$

$$\text{tg}\alpha = -\text{tg}\left(180^\circ - \alpha\right)$$

$$\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}\left(180^\circ - \alpha\right)$$

- Quando $\alpha \in IIIQ$

$$\text{sen}\alpha = -\text{sen}\left(\alpha - 180^\circ\right)$$

$$\cos\alpha = -\cos\left(\alpha - 180^\circ\right)$$

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\alpha - 180^\circ\right)$$

$$\text{cotg}\alpha = \text{cotg}\left(\alpha - 180^\circ\right)$$

- Quando $\alpha \in IVQ$

$$\text{sen}\alpha = -\text{sen}\left(360^\circ - \alpha\right)$$

$$\cos\alpha = \cos\left(360^\circ - \alpha\right)$$

$$\text{tg}\alpha = -\text{tg}\left(360^\circ - \alpha\right)$$

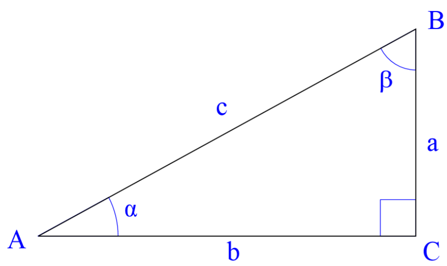
$$\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}\left(360^\circ - \alpha\right)$$

Actividades

Actividades

1. Num triângulo rectângulo cujos catetos medem 5cm e 12cm. Determine as razões trigonométricas do ângulo oposto ao cateto que mede 5cm.

Resolução



Dados: a=5cm **e** b=12cm

$$\text{primeiro: } c^2=5^2+12^2=25+144=169 \qquad \text{logo: } c=\sqrt{169}=13$$

$$\text{segundo: } \operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{c}=\frac{5}{13} \quad ; \quad \operatorname{cossec}\alpha=\frac{c}{a}=\frac{13}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{12}{13} \quad ; \quad \sec\alpha=\frac{c}{b}=\frac{13}{12}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{5}{12} \quad ; \quad \operatorname{cotg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{12}{5}$$

Correcto, você calculou a medida da hipotenusa através do teorema de Pitágoras porque sabia que iria precisar para aplicar as definições das razões trigonométricas.

2. Determine o ângulo agudo x de modo se verifiquem as seguintes igualdades

a) $\operatorname{sen}\left(2x+10^\circ\right)=\cos 20^\circ$

b) $\operatorname{cot} g\left(90^\circ-x\right)=\operatorname{tg}\left(3x-8^\circ\right)$

Resolução

a) $\operatorname{sen}\left(2x+10^{\circ}\right)=\cos 20^{\circ}$

$$2x+10^{\circ}=20^{\circ} \Leftrightarrow 2x=10^{\circ} \Leftrightarrow x=5^{\circ}$$

b) $\cot g\left(90^{\circ}-x\right)=tg\left(3x-8^{\circ}\right)$

$$90^{\circ}-x=3x-8^{\circ} \Leftrightarrow -4x=-98^{\circ} \Leftrightarrow x=22^{\circ}$$

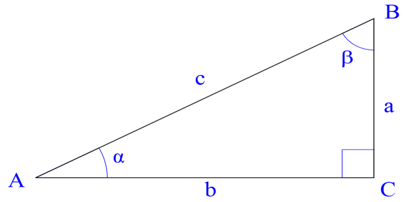
3. A partir de um triângulo rectângulo qualquer, prove que para qualquer ângulo agudo, verifica-se a seguinte igualdade:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1}$$

Resolução

Não se atrapalhe, use as definições das razões trigonométricas.

Considere um triângulo ABC então: $\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{c}$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ mas também sabe-se que num triângulo rectangulo qualquer é valido o teorema de pitágoras $c^2=a^2+b^2$



Substituíndo na igualdade acima teremos:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

Isso mesmo você acertou em cheio, está de parabéns....

4. Determine α tal que:

$a)\ tg\alpha = 1$

$b)\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$c)\ \cot g\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$d)\ sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta

$a)\ tg\alpha = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$b)\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$c)\ \cot g\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 300^\circ$

$d)\ sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \alpha = 225^\circ$

5. Determine cosx, sabendo que $senx = \frac{3}{5}$, se:

a) $0^\circ < x < 90^\circ$ b) $90^\circ < x < 180^\circ$ c) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Solução

a) $0^\circ < x < 90^\circ$, Dado:

$senx = \frac{3}{5}$ a partir de $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ teremos:

:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Resposta: $\cos x = \frac{4}{5}$

b) $90° < x < 180° \quad \text{sen}x = \frac{3}{5}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

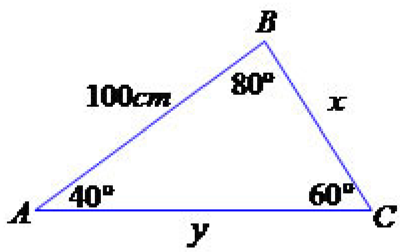
Resposta: $\cos x = -\frac{4}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Resposta: $\cos x = \frac{4}{5}$

d) No triângulo a seguir, determine o valor dos segmentos x e y.



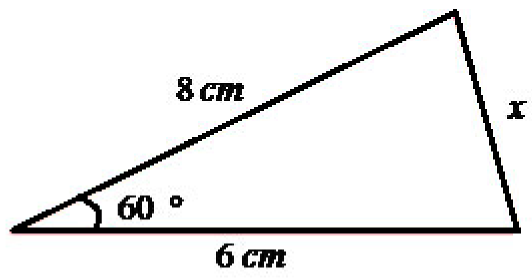
Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{100}{\text{sen}60°} = \frac{x}{\text{sen}40°} = \frac{y}{\text{sen}80°}$$

$$\frac{x}{\text{sen}40°} = \frac{100}{\text{sen}40°} \Leftrightarrow \frac{x}{0{,}64} = \frac{100}{0{,}87} \Rightarrow x = \frac{64}{0{,}87} = 73{,}56$$

$$\frac{y}{\text{sen}80°} = \frac{100}{\text{sen}80°} \Leftrightarrow \frac{y}{0{,}98} = \frac{100}{0{,}87} \Rightarrow 0{,}87y = 98 \Rightarrow y \approx 112{,}64$$

e) Determine o valor do lado oposto ao ângulo de 60º. Observe figura a seguir:



$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.\cos 60°$

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.\frac{1}{2}$

$x^2 = 100 - 48$

$x^2 = 52$

$x = 2\sqrt{3}$

Avaliação

Avaliação

1. Determine o ângulo agudo **x** se de modo que:

   a) $\cos\left(\frac{1}{2}x+10^{\circ}\right)=\operatorname{sen}\left(x-5^{\circ}\right)10^{\circ}$

   b) $\operatorname{tg}\left(x-15^{\circ}\right)=\operatorname{cotg}\left(3^{\circ}+x\right)$

2. Complete o quadro:

α	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$		
cos		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
tg			$\sqrt{3}$
cotg			
sec			
cossec			

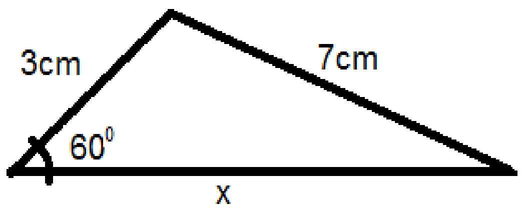
3. Sabendo que x pertecnce ao 1° Quadrante , determine os valores de:

   a) $\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}151^{\circ}$

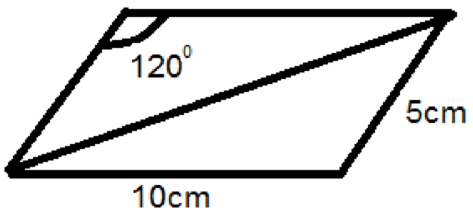
   b) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}193^{\circ}$

   c) $\cos x=\operatorname{sen}20^{\circ}$

4. Calcule o valor de x:



5. Determine a medida de x:



Solução

2.

α	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cossec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3.

a) $\text{sen}x = \text{sen}151^\circ \Rightarrow x = 29^\circ \quad (\text{ porque } \ \text{sen}x = \text{sen}(180^\circ - x))$

b) $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}193^\circ \Rightarrow x = -\operatorname{tg}77^\circ$ $\left(\text{ porque } \operatorname{tg}x = -\operatorname{tg}(180°-x)\right)$

c) $\cos x = \operatorname{sen}20^\circ \Leftrightarrow x = 70^\circ$ $\left(\text{ porque } x+20^\circ = 90^\circ\right)$

4. Calcule o valor de x:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos 60^\circ$$
$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2.3.x.\cos 60^\circ$$
$$49 = x^2 + 9 - 2,x.\frac{1}{2}$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \text{ e } x_2 = -5$$

Como são se trata de medidas x não pode ser negativo, então $x = 8\text{cm}$

5. Determine a medida de x:

$$\cos 120^\circ = -\cos\left(180^\circ - 120^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 5^2 + 10^2 - 2.5.10\left(-\cos 60^\circ\right)$$

$$x^2 = 125 + 50$$
$$x^2 = \sqrt{5^2.7}$$
$$x = 5\sqrt{7}$$

Lição 9

Função Trigonometria

Introdução

Para a construção de qualquer gráfico de função trigonométrica temos as funções básicas seno, coseno, tangente e cotangente. São curvas muito bonitas que podem ser usadas na construção de pontes e em algumas obras as curvas dão beleza. Antes de mais nada faça uma pequena dos gráficos que você mesmo construiu quando estava na 10ª classe. Desta vez você vai brincar com as curvas no SCO fazendo translações para cima ou para baixo, para esquerda ou para direita em relação aos eixos OX e OY.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Definir* uma função trigonométrica.
- *Representar* o gráfico de qualquer função trigonométrica.

Função Trigonometria

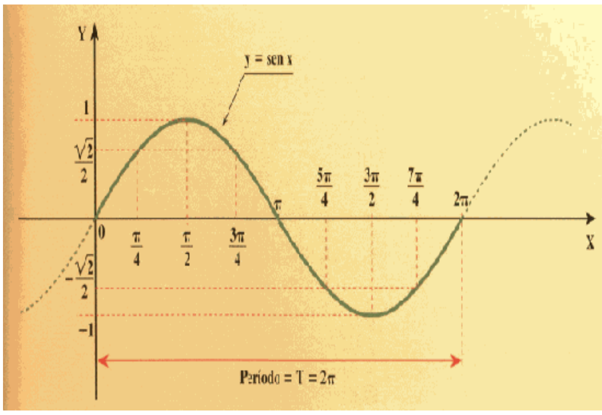
Amigo, vamos começar por estudar as funções trigonométricassimples para chegar as mais complexas

1. <u>Senx</u>

Considerando o domínio R, o gráfico da função f (x) =senx será o conjunto de todos os pares ordenados ordenados (x, y) que podemos encontrar ao mover um ponto pertecente à circunferência de raio r =1.

Lembre-se que o gráfico é uma curva chamada senosóide com D=R contradomínio $D_f=[-1;1]$ com período $P=2\pi$ '

Sabe também que esta se repete com zeros da $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$ por diante.



Agora, queremos descobrir como é o gráfico de uma função seno mais geral, y= a.sen (bx+m) +k, quando comparado ao gráfico de y = sen x, a partir das transformações sofridas pelo gráfico dessa função

1. Consideremos a função seno cuja expressão é dada por, $y=f_1(x)=\operatorname{sen}x+k$ onde **k** é uma constante real. A pergunta natural a ser feita é: qual a ação da constante **k** no gráfico desta nova função quando comparado ao gráfico da função inicial y=sen x?

2. Ainda podemos pensar numa função seno que seja dada pela expressão $y=f_2(x)=a.\operatorname{sen}x$, onde a é uma constante real, $a \neq 0$. Observe que se a=0, a função obtida não será a função seno, mas sim a função constante real nula.

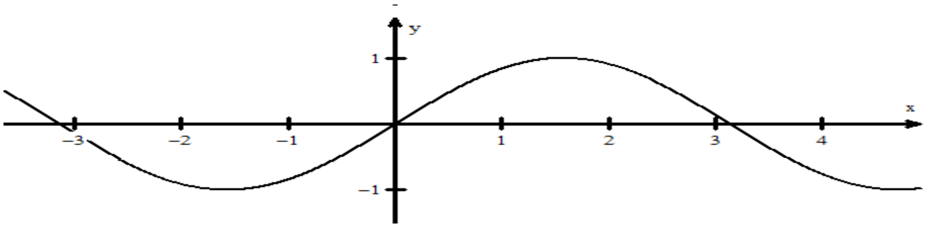
3. Uma questão a ser ainda considerada é a função do tipo $y=f_3(x)=\operatorname{sen}(x+m)$, onde m é um número real não nulo.

4. Finalmente podemos pensar numa função seno que seja dada pela expressão, $y=f_4(x)=.\operatorname{sen}(bx)$ onde b é uma constante real não nula

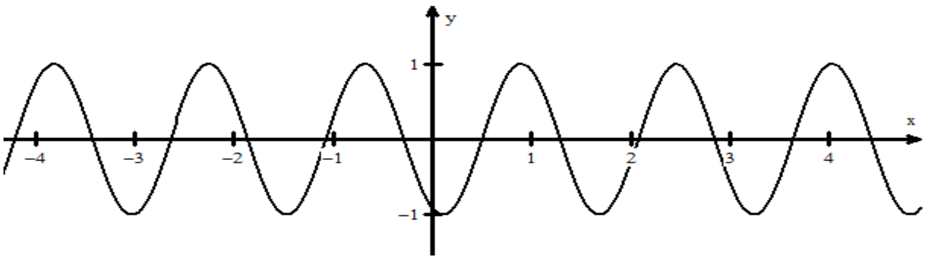
Exemplo: Seja $g(x)=3.\operatorname{sen}(4x-2)+\frac{2}{3}$. Desenhe seu gráfico, fazendo os gráficos intermediários, a fim de entender as transformações ocorridas.

Resolução

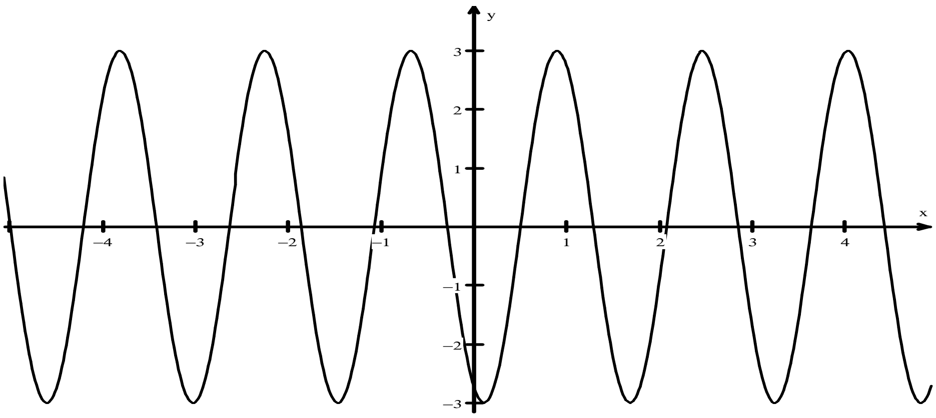
$Y = \text{senx}$



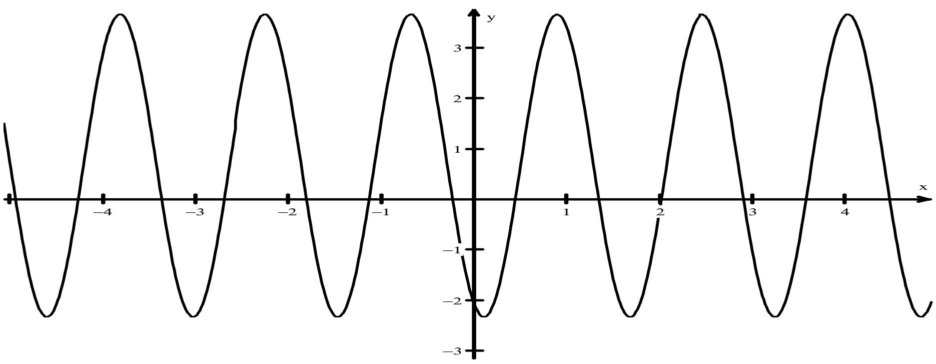
$Y = \text{sen}(4x - 2)$



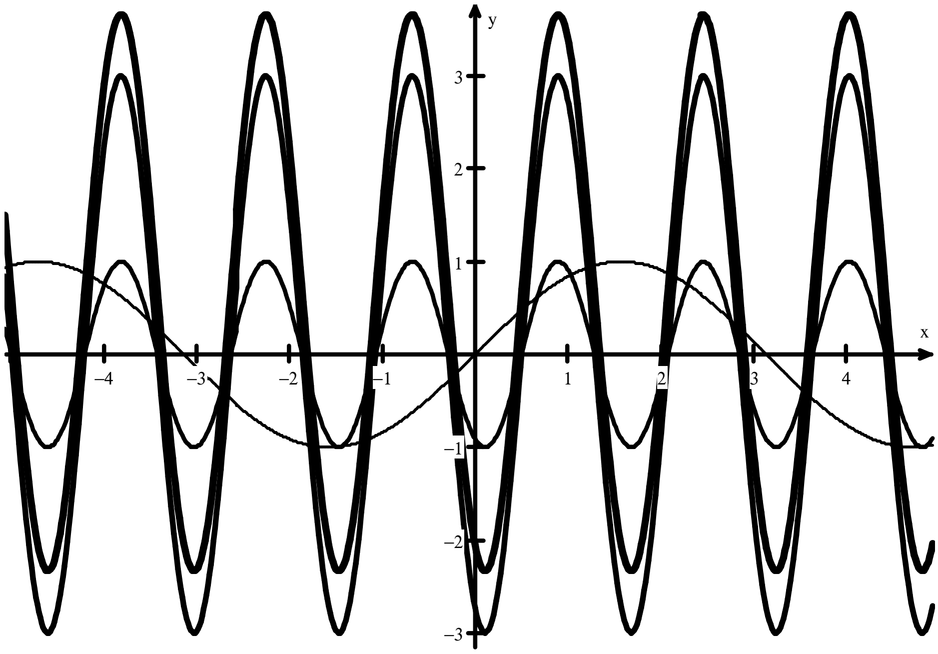
$Y = 3\text{sen}(4x - 2)$



$$Y = 3\text{sen}(4x - 2) + \frac{2}{3}$$



No mesmo SCO teríamos



Conclusão: Podemos, portanto, considerar a função seno do tipo $y = f(x) = a.\text{sen}(bx + m) + k = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$, onde os coeficientes a e b não são zero, examinando as transformações do gráfico da função mais simples y=f (x) =sen x, quando fazemos: em primeiro lugar $y = \text{sen}\left(x + \frac{m}{b}\right)$, em seguida $y = \text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$, $y = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ e, finalmente, $y = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$

Analisemos, o que é que aconteceu mesmo?

- Em primeiro lugar, $y = \text{sen}\left(x + \frac{m}{b}\right)$ sofreu uma translação horizontal de $-\frac{m}{b}$ unidades, pois $x = -\frac{m}{b}$ exerce tem papel que X = 0 exercia em y = sen x;
- Em segundo lugar, $y = \text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ sofreu uma mudança de

período em relação a $y = \text{sen}\left(x + \frac{m}{b}\right)$, passando a ter período $P = \frac{2\pi}{b}$;

- A seguir, no gráfico de $y = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ ocorreu uma mudança de inclinação pois, em cada ponto, a ordenada é igual àquela do ponto de mesma abscissa em $y = \text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ multiplicada pelo coeficiente a;

- Por fim, o gráfico de $y = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$ sofreu uma translação vertical de k unidades, pois, a cada abscissa, a ordenada do ponto do gráfico de $y = a.\text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$ ficou acrescida de k quando comparada à ordenada do ponto de mesma abscissa do gráfico de $y = \text{sen}\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$.

Note que O estudo dos gráficos das funções envolvidas auxilia na resolução de equações ou inequações, pois as operações algébricas a serem realizadas adquirem um significado que é visível nos gráficos das funções esboçadas no mesmo referencial cartesiano.

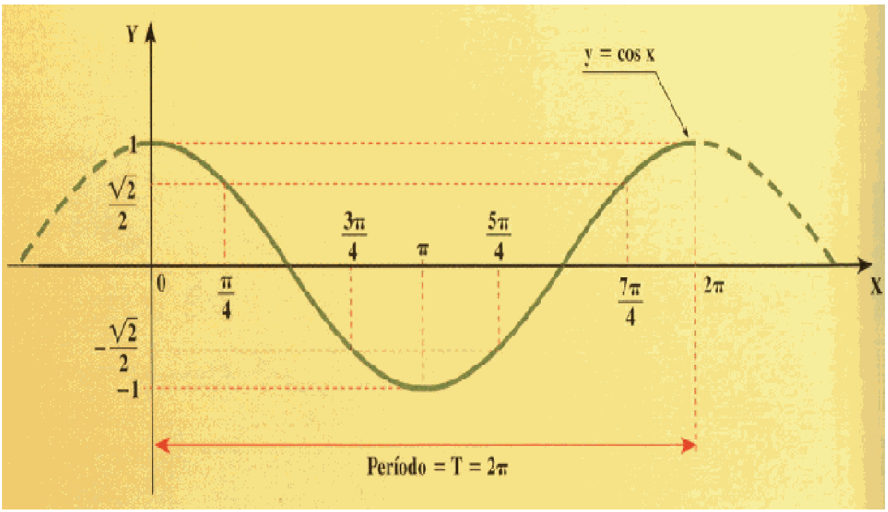
2 <u>Cosx</u>

Considerando o domínio R, o gráfico da função f(x)=cosx será o conjunto de todos os pares ordenados ordenados (x,y) que podemos encontrar ao mover um ponto pertecente à circunferência de raio r =1.

Lembre-se que o gráfico é uma curva chamada cossesóide com D=R contradomínio $D_f = [-1;1]$ com período $P = 2\pi$

Sabe também que esta se repete com zeros da $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$ por diante.

O gráfico da função é o seguinte:



Agora, queremos descobrir como é o gráfico de uma função cosseno mais geral, y=a.cos (bx+m) +k, quando comparado ao gráfico de y= cosx, a partir das transformações sofridas pelo gráfico dessa função:

1. Consideremos a função cosseno cuja expressão é dada por $y = f_1(x) = \cos x + k$, onde **k** é uma constante real. A pergunta natural a ser feita é: qual a ação da constante **k** no gráfico desta nova função quando comparado ao gráfico da função inicial

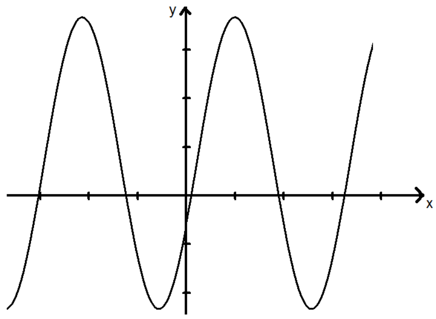
y= $\cos x$?

2. Ainda podemos pensar numa função cosseno que seja dada pela expressão $y = f_2(x) = a\cos x$, onde a é uma constante real, $a \neq 0$. Observe que se a=0, a função obtida não será a função cosseno, mas sim a função constante real nula.

3. Uma questão a ser ainda considerada é a função do tipo $y = f_3(x) = \cos(x+m)$, onde **m** é um número real não nulo.

4. Finalmente podemos pensar numa função cosseno que seja dada pela expressão, $y = f_4(x) = .\cos(bx)$, onde **b** é uma constante real.

Exemplo: Seja $g(x) = 3.\cos(2x-2)+\frac{2}{3}$. Desenhe seu gráfico, fazendo os gráficos intermediários, todos num mesmo par de eixos.



Resolução

Conclusão: Podemos, portanto, considerar as funções cosseno do tipo $y = f(x) = a.\cos(bx + m) + k = a.\cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$, onde os coeficientes a e b não são zeros, examinando as transformações

do gráfico da função mais simples y=f(x)=cos x, quando

fazemos em primeiro lugar $y = \cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$, em seguida,

$y = a.\cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ e, finalmente, $y = a.\cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right] + k$

o que é que aconteceu mesmo?

- Em primeiro lugar, $y = \cos\left(x + \frac{m}{b}\right)$ sofreu uma translação horizontal

  de $-\frac{m}{b}$ unidades, pois $x = -\frac{m}{b}$ exerce o papel

  que x=0 exercia em y=cos x;

- em segundo lugar, $y = \cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ sofreu uma mudança de

  período em relação a $y = \cos\left(x + \frac{m}{b}\right)$, passando a ter período;

  $P = \frac{2\pi}{|b|}$

- a seguir, no gráfico de $y = a.\cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$ ocorreu uma mudança

  de inclinação pois, em cada ponto, a ordenada é

  igual aquela do ponto de mesma abscissa em $y = \cos\left[b.\left(x + \frac{m}{b}\right)\right]$

multiplicada pelo coeficiente a;

- Por fim, o gráfico de $y = a.\cos\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]+k$ sofreu uma translação vertical de k unidades, pois, a cada abscissa,

  As ordenadas dos pontos do gráfico de $y = a.\cos\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]+k$ ficaram acrescidas de k quando comparadas às ordenadas dos pontos do gráfico de. $y = \cos\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$

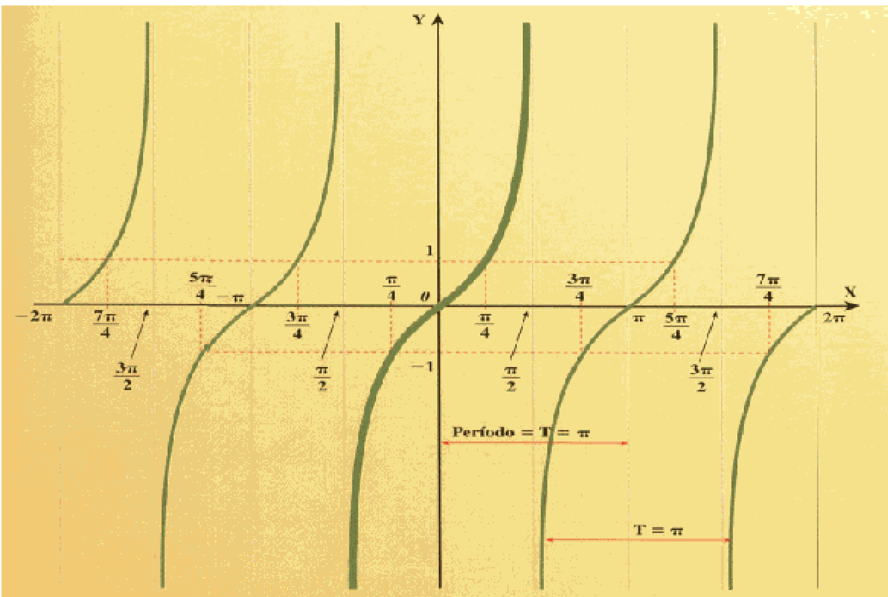
Complicado? Não você já conhece as funções seno e cosseno desde a décima classe e nem fica atrapalhado com isso, nesta lição apenas aprofundou um pouco mais o conhecimento sobre as transformações que são feitas quando a função é de expressão analítica um pouco complexa.

Certo, viu que as duas funções têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e período, diferem apenas nos zeros da função

3 <u>Tgx</u>

Consideremos a função f(x)=tg x. Cada ponto do gráfico é da forma (x, tg x), pois a ordenada é sempre igual à tangente da abscissa, que é um número real que representa o comprimento do arco em graus ou a medida do arco em radianos.

O gráfico dessa função é o seguinte:



O domínio da função tangente é $\left\{ x\in\mathbb{R} \;/\; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \right\}$ e a imagem é o conjunto R.

Trata-se de uma função periódica de período $P=\pi$.

Agora, queremos descobrir como é o gráfico de uma função tangente mais geral, y=a.tg(bx+m)+k, quando comparado ao gráfico de y=tg x, a partir das transformações sofridas pelo gráfico dessa função.

1. Consideremos a função tangente cuja expressão é dada por $y=f_1(x)=\text{tg}x+k$, onde **k** é uma constante real. A pergunta natural a ser feita é: qual a ação da constante **k** no gráfico desta

nova função quando comparado ao gráfico da função inicial

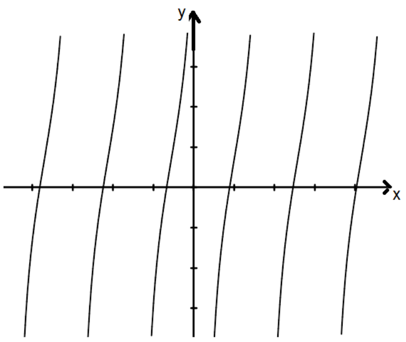
y= tg x?

2. Ainda podemos pensar numa função tangente que seja dada pela expressão $y=f_2(x)=a.\text{tg}x$, onde a é uma constante real, $a\neq 0$. Observe que se a=0, a função obtida não será a função tangente, mas sim a função constante real nula.

3. Uma questão a ser ainda considerada é a função do tipo $y=f_3(x)=\text{tg}(x+m)$, onde m é um número real não nulo.

4. Finalmente podemos pensar numa função tangente que seja dada pela expressão $y=f_4(x)=\text{tg}(bx)$, onde b é uma constante real.

Exemplo: Seja $g(x)=3.\text{tg}(2x-2)+\frac{2}{3}$. Desenhe seu gráfico, fazendo os gráficos intermediários, todos num mesmo par de eixos.



Resolução

Conclusão: Podemos, portanto, considerar as funções tangente do tipo $y = f(x) = a.tg(bx+m)+k = a.tg\left[b.\left(x-\frac{m}{b}\right)\right]+k$, onde os coeficientes a e b não são zero, examinando as transformações do gráfico da função mais simples

y =f (x) =tg x, quando fazemos em primeiro lugar $y = tg\left(x+\frac{m}{b}\right)$, em seguida $y = tg\left[b\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$, $y = a.tg\left[b\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$, e, finalmente, $y = a.tg\left[b\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]+k$

Analisemos o que aconteceu:

- Em primeiro lugar, $y = tg\left(x+\frac{m}{b}\right)$ sofreu uma translação horizontal de $-\frac{m}{b}$ unidades, pois $x = -\frac{m}{b}$ exerce o papel que x=0 exercia em y= tg x;

- Em segundo lugar $y = tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$, sofreu uma mudança de período em relação a $y = tg\left(x+\frac{m}{b}\right)$, passando a ter período $P = \frac{\pi}{|b|}$;

  Atenção: (***o período já mudou em relação ao das funções sen e cos***)

- A seguir, no gráfico de $y = a.tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$ ocorreu uma mudança de inclinação pois, em cada ponto, a ordenada é igual àquela do ponto de mesma abscissa em $y = tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$ multiplicada pelo coeficiente a;

- Por fim, o gráfico de $y = a.tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$ sofreu uma translação vertical de k unidades, pois, a cada abscissa, as ordenadas dos pontos do gráfico de $y = a.tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]+k$ ficaram acrescidas de k quando comparadas às ordenadas dos pontos do gráfico de $y = tg\left[b.\left(x+\frac{m}{b}\right)\right]$.

Cotgx

Definição: $\cot gx = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$ se sen x □0.

Logo, o domínio da função cotangente é

.$\{x \in □ \ / \ \text{sen} x \neq 0\} = \{x \in □ \ / \ x \neq k\pi, k \in □\}$

Propriedade:

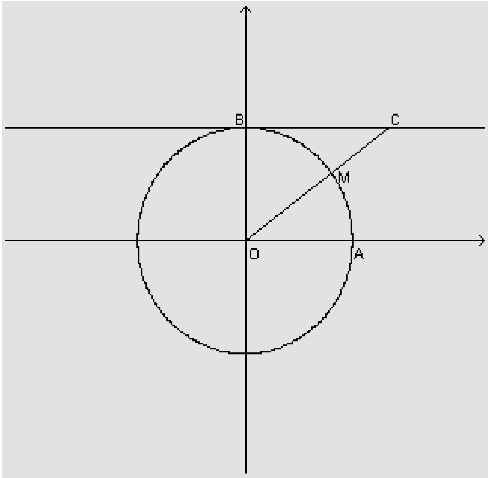
Observação:

A propriedade acima só é válida quando os dois termos que aparecem na igualdade têm sentido, isto é **tg x** existe e não é zero e a **cotg x** existe e não é zero. Assim a propriedade vale no conjunto $\left\{x \in □ \ / \ x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in □\right\}$

ou seja, sempre que x for diferente de um múltiplo inteiro de $\frac{\pi}{2}$.

Também, a partir da circunferência trigonométrica, já sabemos que, na figura abaixo, para cada $x \in D_f$, **cotg x** é a medida algébrica do segmento BC.

ou seja, sempre que x for diferente de um múltiplo inteiro de $\frac{\pi}{2}$.



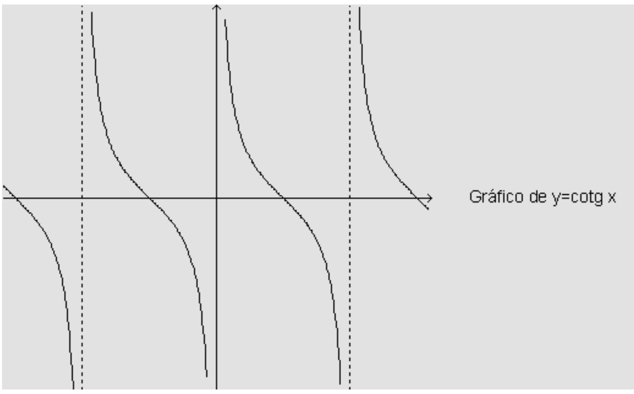
Da figura, observamos também que, qualquer que seja
$x \in D_f$, $\cot gx = \cot g(x + k\pi)$, onde k é um número inteiro qualquer.

Assim a função cotg é periódica, de período π.

A fim de esboçar o **gráfico** de y=cotg x, façamos a análise de como é a variação de y conforme x varia:

- $\pi < x < 2\pi \Rightarrow -\infty < y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;
- $\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow -\infty < y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;

Observemos que as retas verticais de equação $x = k\pi$, para k inteiro, não nulo, são assíntotas ao gráfico da função.



A função y=cotg x tem como imagem o intervalo $]-\infty,+\infty[$. Ela é uma função não limitada e periódica, de período kπ.

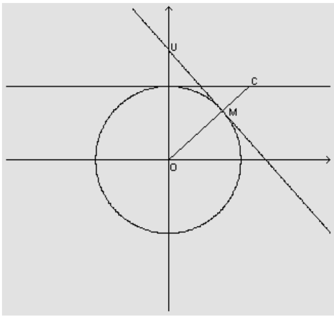
5.. Cossec x

Definição: $\cos\sec x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Logo, o domínio da função cossecante é

$$\{x \in R / \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in R / x \neq k\pi, k \in Z\}$$

Também, a partir da circunferência trigonométrica, já sabemos que, na figura abaixo, para cada $x \in D_f$, **cossec x** é a medida algébrica do segmento ou do segmento OC.



Da figura, observamos também que, qualquer que seja, $x \in D_f$,

$\cos\sec x = \cos\sec(x + '2k\pi)$ onde k é um número inteiro qualquer.

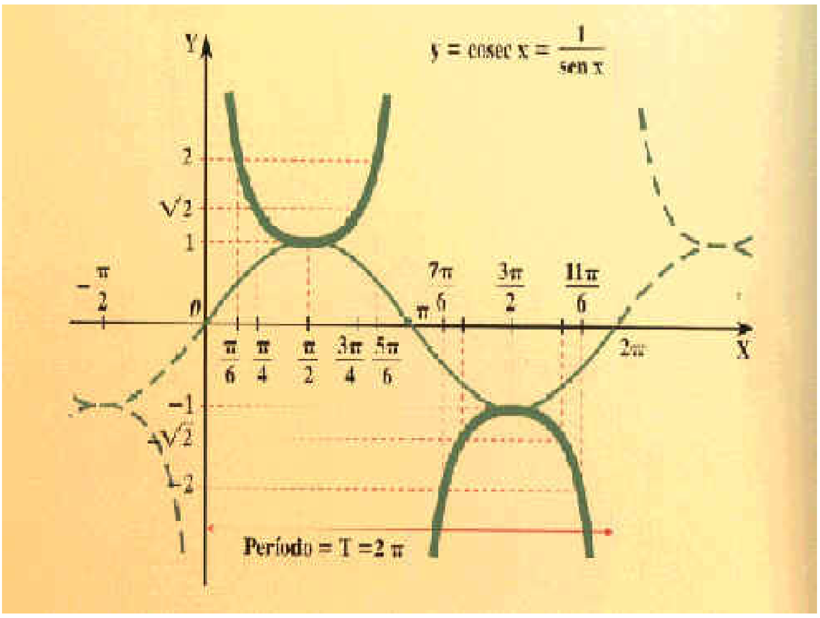
Assim a função cos sec é periódica, de período 2π.

A fim de esboçar o **gráfico** de y=cossec x, façamos a análise de como é a variação de y conforme x varia:

$0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente

- Decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;
- $\dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \Rightarrow 1 \leq y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\dfrac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \Rightarrow -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.

Observemos que as retas verticais de equação $x = k\pi$, para k inteiro, não nulo, são assíntotas ao gráfico da função.



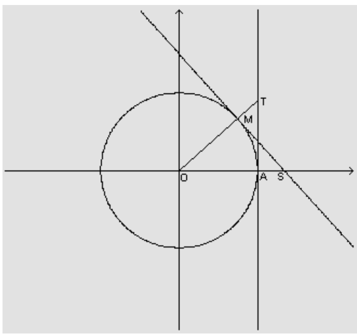
5.Secx

Definição: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Logo, o domínio da função secante é

$$\{x \in R / \cos x \neq 0\} = \left\{x \in R / x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}.$$

Também, a partir da circunferência trigonométrica, já sabemos que, na figura abaixo, para cada $x \in D_f$, **sec x** é a medida algébrica do segmento OS ou do segmento OT.



Da figura, observamos também que, para todo $x \in D_f$,

$, \sec x = \sec(x + 2k\pi)$ onde k é um número inteiro qualquer. Assim a função sec é periódica, de período 2π.

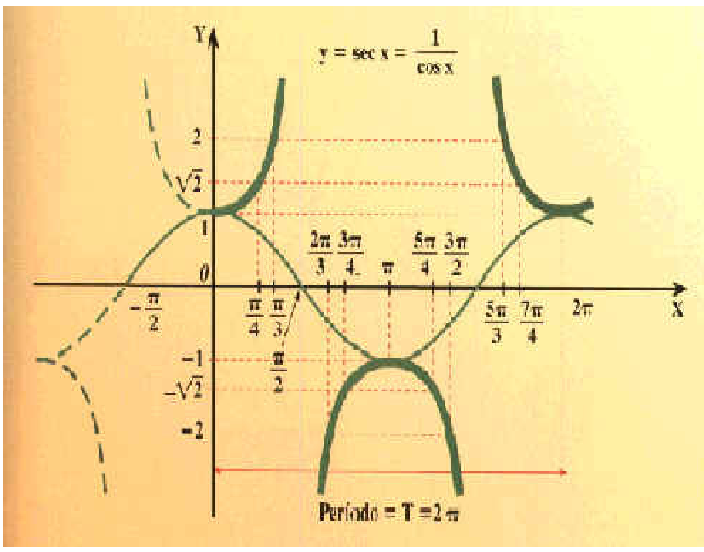
A fim de esboçar o **gráfico** de y=sec x, façamos a análise de como é a variação de y conforme x varia:

$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow\ 1 < y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta

$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow\ 1 < y \leq -1$

- nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow\ -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow\ -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;
- $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \Rightarrow\ 1 \leq y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.

Observemos que as retas verticais de equação $x = \frac{k\pi}{2}$, para k inteiro, não nulo, são assínptotas ao gráfico da função.



As inversas das funções trigonométricas

Todas as funções trigonométricas são periódicas. Assim, para cada uma delas, vale que $f(x+T)=f(x)$, para todo x do D_f, sendo **f** uma das referidas funções, e **T** o **período**. Assim sendo, nenhuma das funções trigonométricas é inversível em seu domínio. Entretanto, para cada uma delas podemos considerar uma restrição do domínio, a fim de obter uma função inversível.

- **A função arcsen**

A função seno foi definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}: R &\to [-1,+1] \\ x &\mapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

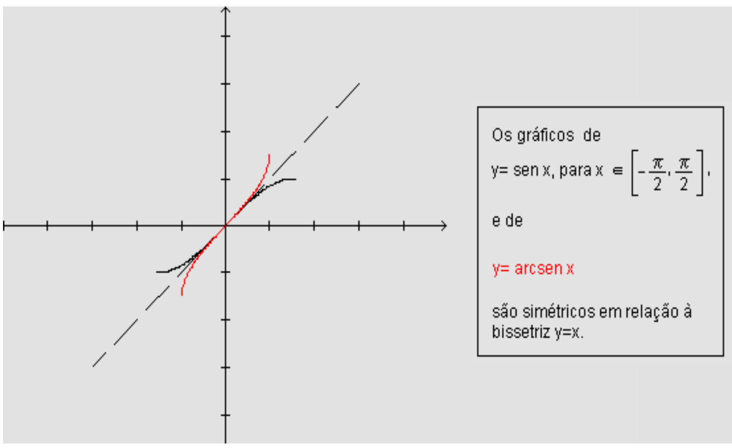
considerando a restrição dessa função ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, isto é:

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;\,1]$ para: $x \mapsto \operatorname{sen} x$

Essa função, restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, é inversível pois é uma função estritamente crescente. A sua inversa denomina-se **arcsen** e escreve-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}: [-1,+1] &\to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

O gráfico da função arcsen é então o seguinte:



A função arccos

A função cosseno foi <u>definida</u> da seguinte maneira:

$$\cos : R \to [-1,+1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

Vamos considerar a restrição dessa função ao intervalo

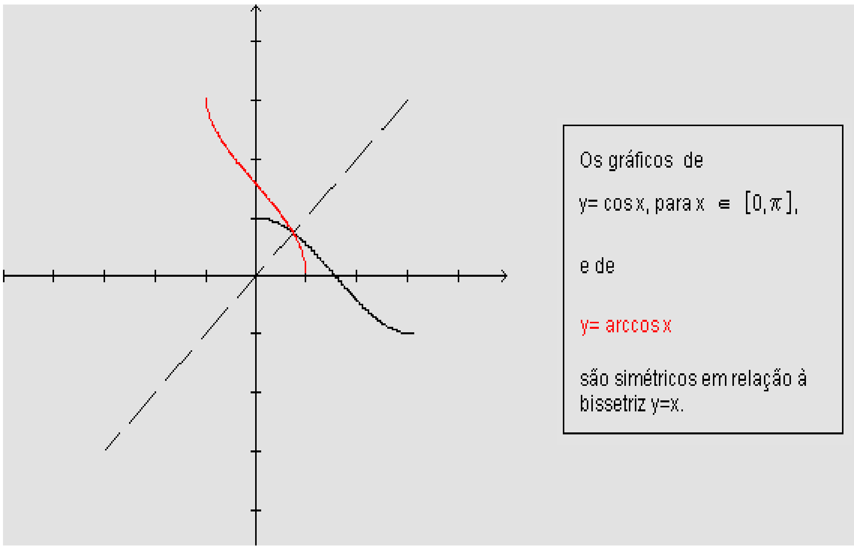
$[0;\pi]$, isto é: $[0;\pi] \to [-1;+1]$ para $x \to \cos x$

Essa função, restrição da função cosseno ao intervalo $[0;\pi]$, é inversível pois é uma função estritamente decrescente. A

sua inversa denomina-se **arccos** e escreve-se:

$$\arccos : [-1,+1] \to [0,\pi]$$
$$x \mapsto \arccos x$$

O gráfico da função <u>arccos</u> é então o seguinte:



A função arctg

A função tangente foi <u>definida</u> da seguinte maneira:

$$\mathrm{tg}: R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \left]-\infty;+\infty\right[$$
$$x \mapsto \mathrm{tg}x$$

Vamos considerar a restrição dessa função ao intervalo

$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, isto é:

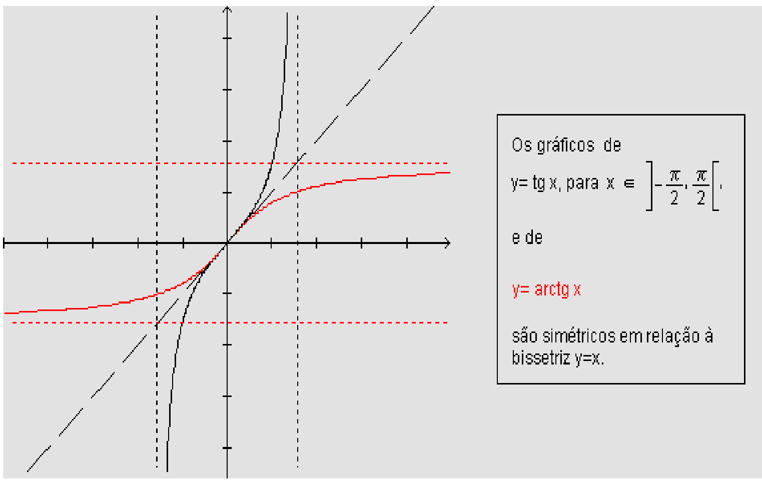
$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty;+\infty\right[\text{ para } \quad x \mapsto \mathrm{tg}x \quad \text{para: } \ x \to \mathrm{sen}x$$

Essa função, restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,é inversível pois é uma função estritamente

crescente. A sua inversa denomina-se **arctg** e escreve-se:

$$\mathrm{arctg}: \left]-\infty,+\infty\right[\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \mathrm{arctg}\,x$$

O gráfico da função <u>arctg</u> é então o seguinte:



Análogamente, podemos definir as inversas das outras três funções trigonométricas (cotg, sec e cossec). Sempre é preciso tomar cuidado com a restrição do domínio, a fim de obter uma função inversível.

Resumo da unidade

Resumo

- Os Domínios das funções seno e cos são iguais a R
- Os contradomínios da funções seno e coseno são iguais a $[-1;1]$
- A periodicidade de seno repete-se para
  $0 \le x \le 2\pi$; $2\pi \le x \le 4\pi$ etc...
- Os zeros da função seno são $x=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$; $x=3\pi$
- A periodicidade de co-seno $P = 2\pi$
- Os zeros da função co-seno
  são $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}$; $x=\frac{5\pi}{2}$ etc.. em geral dados pela

  Fórmula : $\boxed{x=(2K+1)\frac{\pi}{2};\quad k\in\mathbb{Z}}$

<u>Secante</u>

- $\sec x = \sec(x+2k\pi)$ onde k é um número inteiro qualquer. Assim a função sec é periódica, de período 2π.
- $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow\ 1 < y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta
- $\frac{\pi}{2} < x \le \pi \Rightarrow\ 1 < y \le -1$ nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\frac{\pi}{2} < x \le \pi \Rightarrow\ -\infty < y \le -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;
- $\pi \le x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow\ -\infty < y \le -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;
- $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi \Rightarrow\ 1 \le y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente

decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.

Cossecante

- Qualquer que seja, $x \in D_f$, $\cos\sec x = \cos\sec\left(x+'2k\pi\right)$ onde k é um número inteiro qualquer. Assim a função cos sec é periódica, de período 2π.

- $0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \leq y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente

- Decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui;

- $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \Rightarrow 1 \leq y < \infty$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;

- $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente crescente, ou seja, conforme x aumenta, y aumenta;

- $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \Rightarrow -\infty < y \leq -1$ e, nesse intervalo, a função é estritamente decrescente, ou seja, conforme x aumenta, y diminui.

Actividades

Actividades

1. Qual o valor máximo da função y = 10 + 5 cos 20x ?

Solução:

O valor máximo da função ocorre quando o fator cos20x é máximo, isto é, quando cos 20x = 1. Logo, o valor máximo da função será y = 10 + 5.1 = 15.

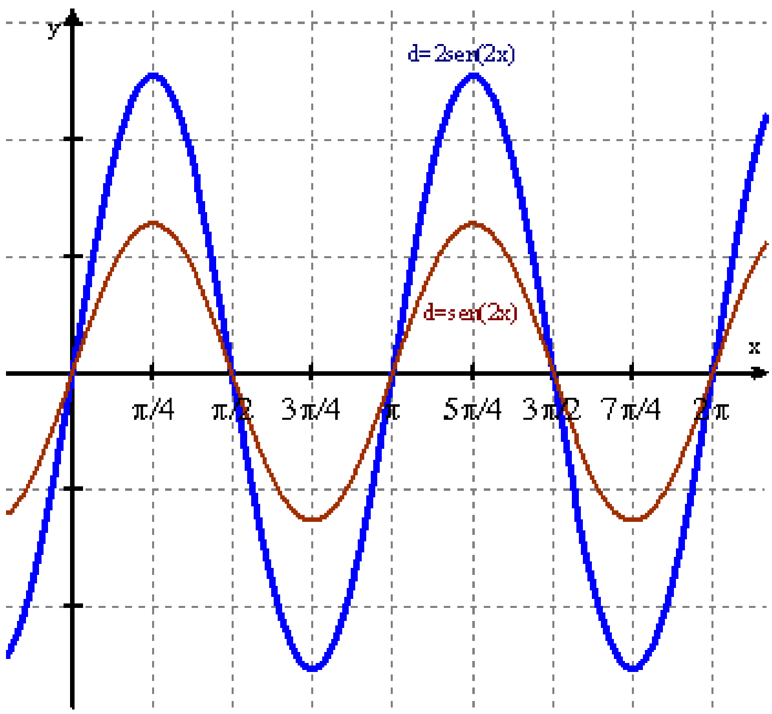
2. Qual o valor mínimo da função y = 3 + 5 sen 2x?

Solução:

O valor mínimo da função ocorre quando o fator sen2x é mínimo, isto é, quando sen2x = -1. Logo, o valor mínimo da função será y = 3 + 5(-1) = - 2 .

3. construa o gráfico de $d = 2\text{sen}2x$

Solução:



Você acertou em cheio pois, primeiro construiu o gráfico da função $d = \text{sen}2x$ que é uma contração ao longo do eixo OX duas vezes do gráfico d=senx que você conhece como a palma da tua mão e depois construiu o gráfico $d = 2\mathrm{sen}2x$ que é uma ampliação do gráfico anterior 2 vezes ao longo do eixo OY.

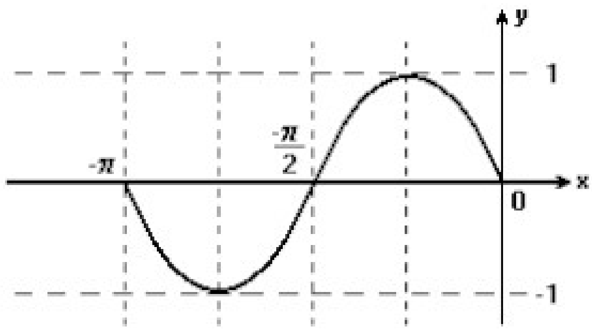
Avaliação

Avaliação

1. Qual o valor mínimo da função y = 3 + 5 sen 2x?

Solução:
O valor mínimo da função ocorre quando o fator sen2x é mínimo, isto é, quando sen2x = -1.
Logo, o valor mínimo da função será y = 3 + 5(-1) = - 2 .

2. Indique a expressão analítica do gráfico representado, o seu domínio e o seu contradomínio



Solução:

a função é y= cos2x , domínio R e o contradomínio é $[-1;1]$

2. Qual o valor máximo da função $y = \dfrac{10}{6-2\cos 2ox}$?

Solução:

A função terá valor máximo, quando o denominador tiver valor mínimo. Para que o denominador seja mínimo, deveremos ter cos 20x = 1

$$y = \frac{10}{6-2.1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Portanto, o valor máximo da função é $\frac{5}{2}$

Qual seria o valor mínimo da mesma função?

Resposta: $\frac{5}{4}$

4. Para que valores de m a equação sen 30x = m - 1 tem solução?

Solução:
Ora, o seno de qualquer arco, é sempre um número real pertencente ao intervalo fechado [-1,1]. Logo, deveremos ter: -1 □ m -1 □ 1 □ 0 □ m □ 2.

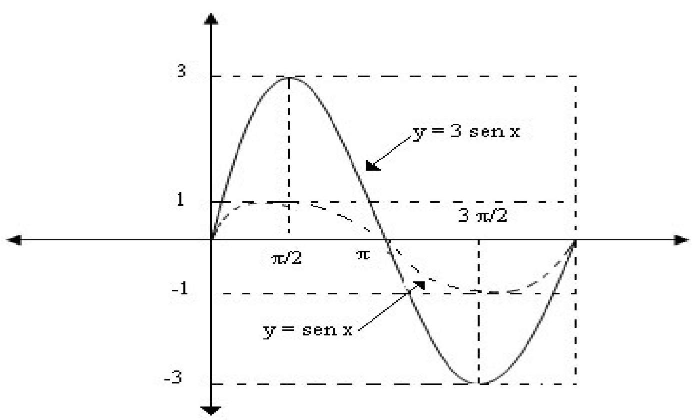
Agora calcule:

a) o valor mínimo da função y = 2 + 9sen4x.
b) o valor máximo da função y = 10 - cosx .
c) o valor de y = sen 180º - cos270º
d) o valor de y = cos 180º - sen 270º
e) o valor de y = cos(360.k) + sen(360.k), para k inteiro.

Respostas: a) - 7 b) 11 c) 0 d) 0 e) 1

3. construa o gráfico de $y = 3\text{sen}x$

Solução:



Lição 10

Equação Trigonométrica

Introdução

Caro estudante, você precisa de comprir com certas leis para lidar com expressões e equações que envolvem razões trigonométricas. Não iremos deduzir todas todas as fórmulas mas muitas delas são bastante claras. A dedução destas fórmulas faz-se apartir da aplicação das definições de razões trigonométricas e da fórmula fundamental da trigonometria.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* a equação trigonométrica.

Para resolver as equcoes trigonometricas precisamos de dominar as formulas trigonmetricas. Algumas dessas formulas ja estudou na decima classe.

Vamos a isso!!!!

<u>Fórmulas trigonométricas</u>

A partir da fórmula fundamental da trigonometria voce pode deduzir outras relações entre as razões trigonométricas:

Fórmula fundamental da trigonometria:

1. $\boxed{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

Dividindo ambos os membros da fórmla por $sen^2\alpha$ obtém-se a relação:

1.1. $\boxed{1+cotg^2\alpha=cosec^2\alpha}$

Muito fácil, não precisa de ser explicado para entender pois, você é muito inteligente. É só fazer continhas, lembre-se que sec é função inversa de co-seno.

Dividindo ambos os membros da fórmla por $cos^2\alpha$ obtém-se a relação:

1.2. $\boxed{tg^2\alpha+1=sec^2\alpha}$

lembre-se que sec é função inversa de co-seno.

2. fórmulas para transformação do produto de senos e co-senos em somas dessas funções:

$$2.1\ \ sen\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$$

$$2.2\ \ \cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha-\beta)+sen(\alpha+\beta)\right]$$

$$2.3\ \ sen\alpha.sen\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

3.fórmulas de somas e diferenças de funções

$$3.1\ \ sen\alpha+sen\beta=2sen\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$3.2\ \ sen\alpha-sen\beta=2sen\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$3.3\ \ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$3.4\ \ \cos\alpha-sen\beta=-2sen\frac{\alpha+\beta}{2}..sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

4. Seno da soma e da diferença de dois ângulos

4.1 $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

4.2 $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

5. Co-seno da soma e da diferença de dois ângulos

5.1 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$

5.2 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$

6. tangente da soma e da diferença de dois ângulos

6.1

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} \quad \text{para} \quad \begin{cases} a,b & \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\square) \\ a+b & \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\square) \\ 1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta & \neq 0 \end{cases}$$

6.2

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} \quad \text{para} \quad \begin{cases} a,b & \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\square) \\ a-b & \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\square) \\ 1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta & \neq 0 \end{cases}$$

1. Fórmulas de bissecção

7.1 $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

7.2 $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

7.3 $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

Para algumas fórmulas se $\boxed{\alpha=\beta}$ podemos deduzir as seguintes fórmulas novas:

$\alpha \neq \beta$	$\alpha = \beta$
$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\text{sen}\beta$	$\text{sen}2\alpha = 2\ \text{sen}\alpha.\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
$\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$	$\text{tg}2\alpha = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

Tudo bem, agora podemos simplificar expressões aplicando as fórmulas que acabamos de ver:

Por exemplo:

Reescreva na forma mais simples a expressão:

$$\text{sen}(2x-y)+\cos 4x$$

Resolução

Equações trigonométricas

Já vimos que equação é uma igualdade entre expressões matemáticas, fica claro que quando se tratar de equações trigonométricas vamos envolver expressões com razões trigonométricas.e as soluções serão os arcos que vao satisfazer a igualdade.

Definindo com rigor matemático:

Definição

Equação trigonométrica é a igualdade entre as expressões que envolvem um ou mais arcos incógnitos e são verdadeiras somente para certos valores atribuídos a esses arcos

As equações trigonométricas podem ser **elementares** ou **complexas.**

A equação elementar pode ser chamada equação simples, e define-se como qualquer equação da forma:

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$; $\cos x = \cos a$; $.\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Onde x é um arco trigonometria incógnita a ser determinar e a um arco trigonométrico qualquer.

Exemplos: $\cos x = 0$; $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$; $2\operatorname{sen} x = 1$

Qualquer equação trigonométrica não elementar pode ser transformada numa equação elementar aplicando as relações trigonométricas que acabamos de estudar.

E como determinar a solução equação trigonométrica?

Toda equação trigonométrica tem uma infinidade de soluções, por

Exemplo1: $\cos x = 0$

Os arcos que têm a mesma medida $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ satisfazem a igualdade. Poderá verificar isso geométricamente no gráfico da função co-seno.

Vamos organizar melhor o nosso procedimento:

1. **<u>Arcos do mesmo seno</u>**

se $\operatorname{sen}(\pi - a) = \operatorname{sen} a$ sendo x um arco trigonométrico, as soluções gerais da igualdade terão a forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = (\pi - a) + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = a + k2\pi \\ x = \pi + 2k.\pi - a \quad \text{ou} \quad x = a + k2\pi \\ x = (2k+1)\pi - a \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi + a \end{array}}$$

Exemplo2: $\operatorname{sen} x = 0,5$

Como 0,5 = sen 30°;

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$, Utilizando o resultado geral obtido acima:

de onde conclui-se:

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ com k inteiro, que representa a solução genérica da equação dada.

Fazendo k variar no conjunto dos números inteiros, obteremos as soluções particulares da equação:

Por exemplo, fazendo k = 0, obteremos por substituição na solução genérica encontrada acima,

$x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$;

Fazendo k = 1, obteremos:

$x = 17\frac{\pi}{6}\cdot$ ou $x = 13\frac{\pi}{6}$, e assim sucessivamente.

Observe que a equação dada, possui um número infinito de soluções no conjunto dos números reais.Poderemos escrever o conjunto solução da equação dada na forma geral:

$$\boxed{S = \{x|\ x\cdot R;\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in Z\}}$$

Poderemos também listar os elementos do conjunto solução:

$$S=\left\{\ldots.,\ -\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{17\pi}{6},\frac{13\pi}{6},\ldots..\right\}$$

2. <u>Arcos de mesmo cosseno</u>

Já sabemos que **cos (-a) = cos a**.

Analogamente ao caso acima, podemos escrever para as soluções gerais da igualdade:

Solução genética de uma equação do tipo cosx= cos a, será dada por $x = (-a) + 2k\pi$ ou $x = a + 2k\pi$, sendo k um número inteiro

3. <u>Arcos de mesma tangente</u>.

Já sabemos que tg **(π + a) = tg a.**

Então, podemos escrever para as soluções gerais da igualdade:

$x = (\pi + a) + 2k\pi$ ou $x = a + 2k\pi$
também podemos escrever: $x = (2k + 1)\pi + a$ ou $x = 2k\pi + a$,

Sendo k um número inteiro. Observando que 2k é um número par e 2k + 1 é um número ímpar, para k inteiro, assim reunindo as duas expressões acima numa única: $x = k\pi + a$.

a solução genética de uma equação do tipo tgx= tga, será dada por $x = k\pi + a$

Estimado estudante, um aspecto muito importante que você deve reter é, como qualquer equação trigonométrica pode ser reduzida a uma equação elementar através de transformações trigonométricas convenientes, as igualdades acima são básicas para a resolução de qualquer equação trigonométrica.

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu :

- Fórmula fundamental da trigonometria
- Fórmulas da Relações trigométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

- Equações trigonométricas são igualdades entre expressões que envolvem razões trigonométricas e são verdadeiras só para certos valores atribuídos as incógnitas
- Todas as equações trigonométricas têm uma infinidade de soluções
- Relações entre razões trigométricas

Produto de sen/cos	**Soma e diferença de sen/cos**
$\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$ $\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$ $\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$	$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\operatorname{sen}\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}..\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. Seno da soma e da diferença de dois ângulos $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$	**co-seno da soma e da diferença de dois ângulos** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$
Bissecção de ângulos $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$	

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta} \quad \text{para} \quad \begin{cases} a,b & \neq & \dfrac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ a+b & \neq & \dfrac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 1-tg\alpha.tg\beta & \neq & 0 \end{cases}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta} \quad \text{para} \quad \begin{cases} a,b & \neq & \dfrac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ a-b & \neq & \dfrac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 1+tg\alpha.tg\beta & \neq & 0 \end{cases}$$

Note que as outras fórmulas como viu são consequências das destas, partindo de certas condições especiais

- Definição

Equação trigonométrica é a igualdade entre as expressões que envolvem um ou mais arcos incógnitos e são verdadeiras somente para certos valores atribuídos a esses arcos

- Solução da equação trigonométrica

$$\begin{cases} \operatorname{sen}x=\operatorname{sen}a \Leftrightarrow x=(2k+1)\pi-a \ \text{ ou } \ 2k\pi+a \\ \cos x=\cos a \Leftrightarrow x=2k\pi+a \ \text{ ou } \ 2k\pi-a \\ tgx=tga \Leftrightarrow x=k\pi+a \end{cases}$$

com $k\in\mathbb{Z}$

- Qualquer equação trigonométrica pode ser reduzida a uma equação elementar através de transformações trigonométricas convenientes, as igualdades acima são básicas para a resolução de qualquer equação trigonométrica.

Actividades

É importante dominar as fórmulas sobre as relações trigonométricas pois para simplificar qualquer expressão que envolve razões trigonméricas deve-se aplicar estas fórmulas, sempre que não tiver em mente, consulte para não correr o risco de errar:

Actividades

1) $2\cos x - 3\sec x = 5$

Solução:

Lembrando que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ vem, por substituição:

$$2.\cos x - 3.\left(\frac{1}{\cos x}\right) - 5 = 0$$

$$2.\cos x - \frac{3}{\cos x} - 5 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $\cos x \neq 0$, fica:

$2.\cos^2 x - 3 - 5.\cos x = 0$ ou $2.\cos^2 x - 5.\cos x - 3 = 0$.

Vamos resolver a equação do segundo grau em cosx.·

Seja $y = \cos x$; teremos: $2y^2 - 5y - 3 = 0$

Portanto, $\cos x = 3$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

Note que: A equação $\cos x = 3$ não possui solução, já que o cosseno

Só pode assumir valores de -1 a $+1$.

Já para a equação $\cos x = -1/2$, teremos:

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Logo: $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donde resulta soluções genéricas da equação dada:

$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ou $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$

Estas soluções podem ser reunidas na forma:

$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, com k inteiro.

2) $5tg^2x - 1 = 7$ secx

Solução:

Resposta: $x = k\pi$ ou $x = k\pi + \pi/4$.

3) $3.\text{sen}x - \sqrt{3}.\cos x = 0$

Solução:

Teremos: $3.\text{sen}x = \sqrt{3} . \cos x$

Dividindo ambos os membros por $\cos x \neq 0$, fica:

$3.\frac{\text{sen}x}{\cos x} = \sqrt{3}.\frac{\cos x}{\cos x}$

$3.\text{tg}x = \sqrt{3}$

$\text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}30^\circ = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Vamos então resolver a equação elementar

$\text{tg}x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Vem logo que:

Resposta: $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

4) $4(\text{sen}^3x - \cos^3x) = 5$ (senx – cosx)

Solução:

Lembrando da identidade:

$\mathbf{A^3 - B^3 = (A - B)\ (A^2 + AB + B^2)}$, poderemos escrever:

$4(\text{sen}x - \cos x)(\text{sen}^2x + \text{sen}x.\cos x + \cos^2x) = 5(\text{sen}x - \cos x)$

Como $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$, vem, substituindo:

$4(\text{sen}x - \cos x)\ (1 + \text{sen}x.\cos x) = 5\ (\text{sen}x - \cos x)$

Simplificando os termos em comum, vem:

$4(1 + \text{senx.cosx}) = 5$

$1 + \text{Senx.cosx} = \frac{5}{4}$

$\text{senx.cosx} = \frac{5}{4} - 1$

$\text{senx.cosx} = \frac{1}{4}$

Multiplicando ambos os membros por 2, teremos:

$2.\text{senx.cosx} = 2.\left(\frac{1}{4}\right)$

$2.\text{senx.cosx} = \frac{1}{2}$

Como já sabemos da Trigonometria que $\boxed{\textbf{2.senx.cosx = sen 2x}}$, vem:

$\text{sen}2x = \frac{1}{2} = \text{sen}30º = \text{sen}\ (\pi/6)$

$\text{sen}2x = \text{sen}\ (\frac{\pi}{6})$

A solução será:

$2x = (2k+1)\pi - \pi/6$ ou $2x = 2k\pi + \pi/6$

Dividindo ambas as expressões por 2, vem:

$X = (2k+1).\pi/2 - \pi/12$ ou $x = k\pi + \pi/12$

Simplificando a primeira expressão, fica:

$x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ ou $x = k\pi + \frac{\pi}{12}$ $\pi/12$, que é a solução procurada.

Portanto,

Resposta: $S = \{x \setminus x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ ou $x = k\pi + \frac{\pi}{12}$, k inteiro$\}$.

Excelente, você resolveu os exercícios com sucesso pois, baseou-se nas fórmulas trigonométricas e aplicou-as correctamente.

Agora , resolva sozinho os exercícios que se seguem:

Avaliação

Avaliação

Resolva as seguintes equações:

1) tgx + cotgx = 2

2) tgx + cotgx = $\frac{4}{\sqrt{3}}$

3) Resolva a equação do exercício 4) que resolvemos em conjunto no item das actividades para o conjunto universo U = [0, π/2].

4) Resolver a equação 2sen (3x) + 1 = 0

5) Encontre a solução da equação cos x + 1 = 0

6) Encontre a solução da equação tgx=$\sqrt{3}$

7) Ache o o conjunto solução da equação

sen(5x)+sen(2x)=0

Soluções

1) tgx + cotgx = 2

Solução:

$$\frac{\text{senx}}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{senx}} = 2$$

$$\frac{\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\text{senx}.\cos x} = 2 \quad \text{Como } \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\text{senx}.\cos x} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2.\text{senx}.\text{cosx} \Leftrightarrow 1 = \text{sen}2x$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}2x = 1 = \text{sen}90^\circ = \text{sen}(\pi/2) \Leftrightarrow \text{sen}2x = \text{sen}(\pi/2)$$

Então:

$$2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ou } 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{ou } x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

Resposta: $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

2) $\text{tgx} + \text{cotgx} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Solução:

$$\frac{\text{senx}}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{senx}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\text{senx}.\cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{Como } \text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

$$\frac{1}{\text{senx}.\cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = 4.\text{senx}.\text{cosx} \Leftrightarrow \sqrt{3} = 2.\text{sen2x}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}60^{\circ} = \text{sen}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{sen2x} = \text{sen}\frac{\pi}{3}$$

Solução

$$S = \left\{ x \in \square \; / \; x = k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \square \right\}$$

3) $S = \{ \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12} \}$.

4) 2sen3x + 1 = 0

Solução:

Uma solução é Entao:

$$3x = \frac{7\pi}{6}, \text{ pois } \text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad \text{Assim temos } \text{sen}3x = \text{sen}\frac{7\pi}{6}$$

$$3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

Concluímos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{ x \in \square \; / \; x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \square \right\}$$

5) cos x + 1 = 0

Solução:
Temos que cos x = - 1. Então x = π rad é uma solução, pois cos π = -1.
Assim, cos x = cos π
Como os arcos de medidas π rad e $-\pi$ rad possuem a mesma extremidade, o conjunto solução é:

$$S=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\pi+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\}$$

6) $tgx=\sqrt{3}$

Solução:

Uma solução é $x=\frac{\pi}{3}$, pois $tg\frac{\pi}{3}=\frac{sen\frac{\pi}{3}}{cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

Assim sendo, o conjunto solução é:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

7) $sen5x+sen2x=0$

Solução:

Observe que é possível transformar o 1º membro em um produto; além disso, o 2º membro é zero. Assim sendo, lembrando que

$senx+seny=2sen\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$ temos:

$$2sen\frac{5x+2x}{2}.cos\frac{5x-2x}{2}=0\Rightarrow$$

$$2sen\frac{7x}{2}.cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow sen\frac{7x}{2}=0 \text{ ou } cos\frac{3x}{2}=0$$

Para $sen\frac{7x}{2}=sen0$ temos: $\frac{7x}{2}=k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$. Portanto:

$$7x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{7},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Para $cos\frac{3x}{2}=cos\frac{\pi}{2}$, temos: $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Entao: $3x=\pi+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\mathbb{Z}$

O conjunto solução é: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\ \text{ou}\ x=\dfrac{2k\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

por outro lado o mesmo problema poderia ser resolvido assim:

sen (5x) + sen (2x) = 0

sen (5x) = - sen (2x)

como: - sen (2x) = sen (- 2x) desse modo temos:

$5x=-2x+k\pi$ ou $5x=\pi-(-2x)+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ dai obtemos

$x=\dfrac{2k\pi}{7}$ ou $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z})$

Existem diversos tipos de equações trigonométricas, sendo impossível abordá-las neste módulo, por isso você deve investigar mais sobre o assunto tão importante no nosso quotidiano. Entretanto repetimos, você não pode se esquecer que qualquer que seja a equação trigonométrica dada, através de transformações trigonométricas, sempre recairá numa equação elementar, que acabamos de estudar. Força!!!

Lição 11

Inequações Trigonométricas

Introdução

Já vimos que inequação é uma desigualdade entre expressões matemáticas, fica claro que quando se tratar de inequações trigonométricas vamos envolver expressões com razões trigonométricas.

Vamos nesta última lição do módulo, nos dedicar a resolução de inequações trigonométricas.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* inequações trigonométricas.

Inequações trigonométricas

Quando numa inequação encontramos **função trigonométrica da incógnita** ou **função trigonométrica de alguma função da incógnita** em pelo menos um dos membros de uma inequação, dizemos que esta inequação é **trigonométrica.**

Tomemos alguns exemplos para ilucidar isso:

Exemplos:

1) $\text{sen}x > \frac{1}{2}$ e $\text{sen}^2 x + \text{tg}\, x \leq 2$ **são** inequações trigonométricas.

2) (sen 30º) . $(x^2 - 1) > 0$ e $\left(tg\frac{\pi}{3}+cot\,g\frac{\pi}{3}\right)x^2+\left(sen\frac{\pi}{2}\right)x<0$

Não são inequações trigonométricas.

Resolver uma inequação como f(x) < g(x), por exemplo, significa determinar o conjunto **S** dos números **s**, sendo s elemento do domínio de **f** e de **g**, tais que f(s) < g(s).

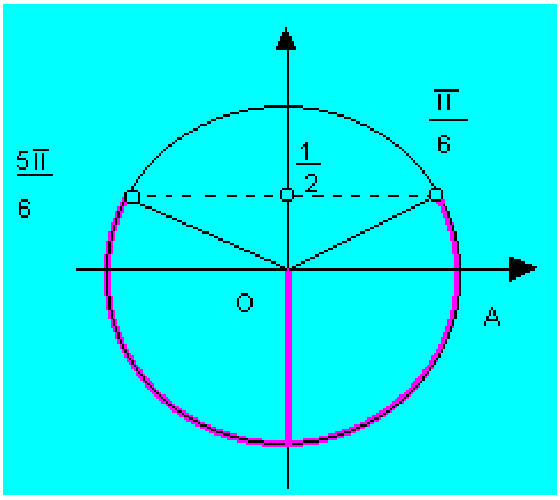
O conjunto **S** é chamado de **conjunto solução** da inequação e todo elemento de **S** é uma **solução** da inequação.

Assim, na inequação $senx > -\frac{1}{2}$, os números $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ são algumas de suas soluções e os números $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4}$ não o são.

Resolução das inequações trigonométricas fundamentais

Quase todas as inequações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das inequações fundamentais. Vamos conhecê-las, a seguir, através de exemplos.

1º caso : sen x < sen a (sen x $\leq$ sen a)



Por exemplo, ao resolvermos a inequação

$senx \leq sen\frac{\pi}{6}$ ou $senx \leq sen\frac{1}{2}$ Encontramos, inicialmente,

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$, que é uma solução particular no intervalo. $[0;2\pi]$ Acrescentando $2k\pi$ com $k \in \square$ às extremidades dos intervalos encontrados, temos a solução geral em IR, que é:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \square) \qquad \text{ou}$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \square)$$

O conjunto solução é, portanto:

$$S = \left\{ x \in \square \ / \ 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \square) \right\}$$

Por outro lado, se a inequação fosse: $\operatorname{sen} x \leq \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ ou $\operatorname{sen} x \leq \operatorname{sen}\frac{1}{2}$, então, bastaria incluir as extremidades de $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ e o conjunto solução seria:

$$S = \left\{ x \in \square \ / \ 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \square) \right\}$$

Resumo da Lição

- Quando numa inequação encontramos **função trigonométrica da incógnita** ou **função trigonométrica de alguma função da incógnita** em pelo menos um dos membros de uma inequação, dizemos que esta inequação é **trigonométrica.**

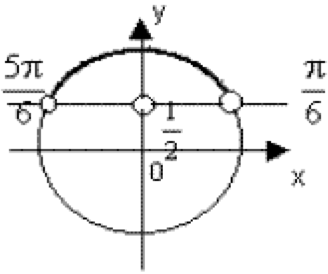
- Quase todas as inequações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das inequações fundamentais. Vamos conhecê-las,

Actividades

Actividades

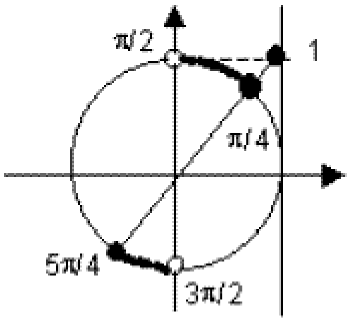
Resolva as inequações

1) Resolva a inequação sen x > $\frac{1}{2}$



$$S=\left\{x \in R / \frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in Z\right\}$$

2) tg x > 1



$$S=\left\{x \in R / \frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$$

ou $\frac{5\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Seja x tal que sen x + cos x = 1. Determine todos os valores possíveis para sen 2x + cos 2x

Solução:

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=(1)^2$$
$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+2\operatorname{sen}x.\cos x=1$$

$$\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=0 \quad \text{ou} \quad \cos x=0$$

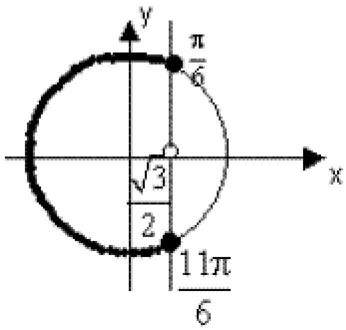
$$\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\cos x=1 \Rightarrow\cos 2x=1=1\Rightarrow\operatorname{sen}2x+\text{co}2x=1$$

$$\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=1\Rightarrow\text{co}2x=-1\Rightarrow\operatorname{sen}2x+\cos 2x=-1$$

Avaliação

Avaliação

1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$S = \left\{ x \in R \,/\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

2) $\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cot gx.\operatorname{sen}x} \leq \frac{1}{2}$

Solução

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cot gx.\operatorname{sen}x} \leq \frac{1}{2}$$

Primeiro, sabe-se:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

segundo, substituíndo na inequação inicial:

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x.\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$$

Como o valor do cosseno vai aumentando conforme o ângulo diminui, o menor resultado vai ser o que tem $\frac{1}{2}$, ou seja o 60º.

Resposta: $60^\circ \leq x < 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$

Módulo 5 de Matemáica

Teste Preparação de Final de Módulo

Parte 1 - Composição de funções

1. Seja $y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $x=g(t)=t^2+1$ achar $y=f(g(t))$

2. Achar $(f\circ g)(x)$, se $u=g(x)=\frac{u^2}{u+1}$ se $u=\frac{x}{x^2+1}$

Parte 2 - Função com módulo

1. $y=\left|x^2-5x+6\right|$

2. $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$

3. $y=\left|x^2-5|x|+6\right|$

Parte 3 - Função inversa

Escolha a opção verdadeira para cada alínea. Considere a seguinte afirmação:

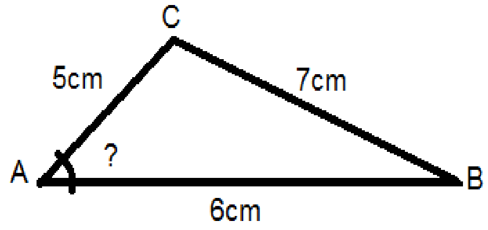
As funções inversas e o domínio de cada uma as seguintes funções**:**

1) $y=5x+1$ **2)** $y=\frac{1+x}{1-x}$ **3)** $y=\sqrt{1-x^2}$

4) $\begin{cases} x\ , & \text{se} \quad]-\infty;1[\\ x^2, & \text{se} \quad [1\,;\,4] \\ 3x+4, & \text{se} \quad]4;+\infty[\end{cases}$

Parte 4 - Trigonometria

1. Calcule o ângulo A



2. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

b) $\cos^2 x + 2\text{sen}^2 x = \frac{7}{4}$ em $U = [0, 2\pi]$

c) $\text{sen}x - \text{sen}^3 x = 0$,

Soluções do teste de preparação do Módulo 5

CHAVE DE CORRECÇÃO

Parte 1 - Composição de funções

1. $D_g = \mathbb{R}$ é domínio de definição de g(t)

Solução

$$f(g(t)) = \frac{g(t)+1}{g(t)-2} = \frac{(t^2+1)+1}{(t^2+1)-2} = \frac{t^2+2}{t^2-1} \quad \text{com } D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

Parte 2 – Função inversa

são respectivamente:

1)

a) $y^{-1} = \frac{x-1}{5}$, $D_{y^{-1}} = \mathbb{R}$ b) $y^{-1} = \frac{5}{x} + 1$, $D_{y^{-1}} = \mathbb{R}$

c) $y^{-1} = \frac{x-1}{5}$, $D_{y^{-1}} =]-\infty; 5[$

2) $y = \frac{1+x}{1-x}$

solução

a) $y^{-1} = \frac{1-x}{1+x}$, $D_{y^{-1}} = \mathbb{R}$ b) $y^{-1} = -\frac{1-x}{1+x}$, $D_{y^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $y^{-1} = \frac{x-1}{1+x}$, $x \neq -1$

3) $y=\sqrt{1-x^2}$

solução

a) $y^{-1}=-\sqrt{1-x^2}$ e $D_{y^{-1}}=\left[0;1\right]$ para $\left[-1;0\right]$ da funcao y ,

b) $D_{y^{-1}}=\mathbb{R}$ b) $y^{-1}=\sqrt{1-x^2}$, $D_{y^{-1}}=\mathbb{R}$ para $\left[-1;0\right]$ da funcao y

c) $y^{-1}=\sqrt{1-x^2}$, para $x\neq-1$

4) $\begin{cases} x\ , & \text{se} \quad \left]-\infty;1\right[\\ x^2, & \text{se} \quad \left[1\,;\,4\right] \\ 3x+4, & \text{se} \quad \left]4;+\infty\right[\end{cases}$

Solução

a) $\begin{cases} x\ , & \text{se} \quad \left]-\infty;1\right[\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{se} \quad \left[1\,;\,16\right] \\ \dfrac{x+4}{3}, & \text{se} \quad \left]16;+\infty\right[\end{cases}$

b) $\begin{cases} x\ , & \text{se} \quad \left]-\infty;1\right[\\ \sqrt{x}\,, & \text{se} \quad \left[1\,;\,16\right] \\ \dfrac{x-4}{3}, & \text{se} \quad \left]16\,;+\infty\right[\end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ , & \text{se} \quad \left]-\infty;1\right[\\ \sqrt{x}\,, & \text{se} \quad \mathbb{R} \\ \dfrac{3}{x}+4, & \text{se} \quad \left]16;+\infty\right[\end{cases}$

3. $D_g=\mathbb{R}$, $y=f\left(u\right)=\dfrac{u^2}{u+1}$, $D_f=R\backslash\{-1\}$

Solução: é preciso substituir na igualdade $f\left(u\right)=\dfrac{u^2}{u+1}$ o u pela expressão $u=\dfrac{x}{x^2+1}$ e analisar o domínio de existência :

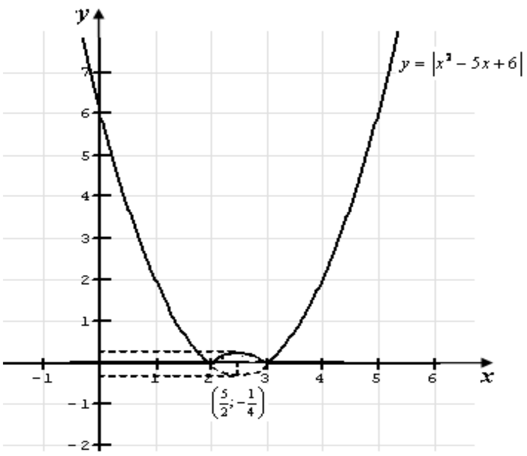
Assim :

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+1} = \frac{\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}{\frac{x+x^2+1}{x^2+1}} = \frac{x^2}{\left(x+x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

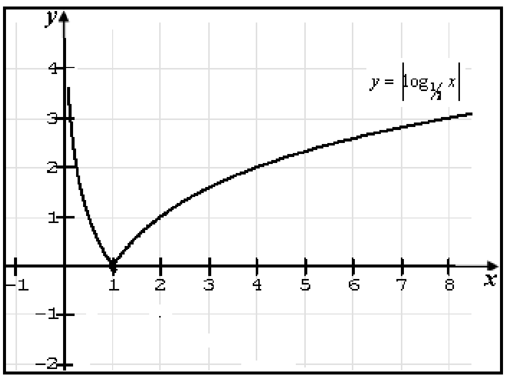
cujo domínio de existência é $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

Parte 3 - Função com módulo

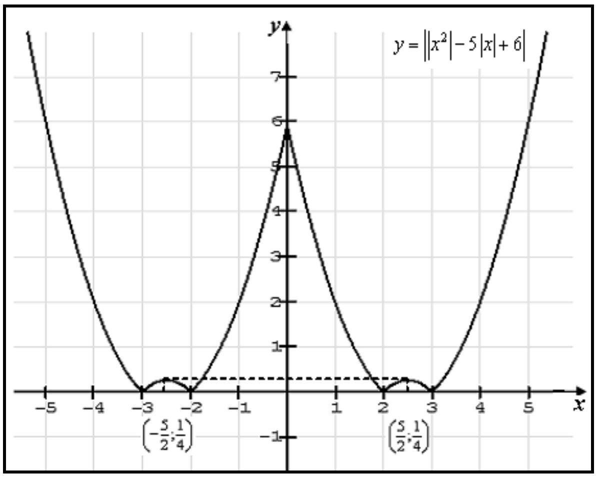
1. $y = \left| x^2 - 5x + 6 \right|$



2. $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$

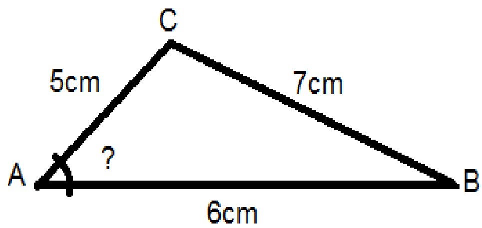


3. $y = \left| x^2 - 5|x| + 6 \right|$



Parte 4 trigonometria

1. Calcule o ângulo A



$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 60\cos A$$
$$49 - 36 - 25 = -\cos A$$
$$\frac{12}{60} = \cos A$$
$$\cos A = \frac{1}{5} \Rightarrow A = 78°$$

2. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

fazendo $\cos x = y$, temos $2y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ ou $y_1 = \frac{1}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos^2 x + 2\mathrm{sen}^2 x = \frac{7}{4}$ em $U = [0, 2\pi]$

$\left(1 - \mathrm{sen}^2 x\right) + 2\mathrm{sen}^2 x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{sen}^2 x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2 x = \frac{3}{4}$

$\mathrm{sen}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3},\right\}$

c) $\mathrm{sen}x - \mathrm{sen}^3 x = 0$

$\mathrm{sen}x\left(1 - \mathrm{sen}^2 x\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}x.\cos^2 x = 0$

$\mathrm{sen}x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$