MÓDULO 4

Matemática

Geometria Analítica

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Acerca deste Módulo

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

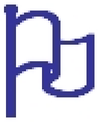
No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Conceitos Básicos de Geometria Analítica

Introdução

Caro estudante, os conceitos básicos da geometria plana, são do seu domínio. Porém nesta lição vamos fazer uma revisão de modo a prepará-lo melhor para a matéria que será tratada nas próximas lições.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Definir* os conceitos primitivos e básicos da geometria plana e suas designações.

Objectivos

Conceito Básicos de Geometria Analítica

Damos o nome de conceitos primitivos a todos aqueles que na geometria plana, não tem definição, como os conceitos de ***ponto, recta e plano.***

Para começar vamos falar dos conceitos "ponto, recta e plano" para melhor entender a abordagem destes conceitos ao longo do texto, iremos apenas procurar clarifica–los e não defini-los.

Ponto: designa-se pelas letras maúsculas do alfabeto habitual (A, B, C, ……. X, Z)

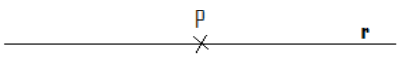
Recta: designa-se pelas letras minúsculas do alfabeto habitual (a, b, c, ……x, z)

Plano: designa-se pelas letras do alfabeto grego (α, β, γ, ……, semi-rectas e segmentos de recta

O que será?

Se numa dada recta r, marcarmos um ponto qualquer P sobre ela, dividímo-la em duas partes que começam em P chamadas ***semi-rectas***

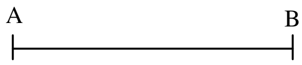
Ex:



O ponto P define duas semi- rectas na recta r

Seja dada uma rect l, se marcarmos nela dois pontos determina-se um

Conjunto de pontos entre os pontos A e B que formam um ***segmento de recta***



Onde $\overleftrightarrow{AB}$ é um segmento de recta.

Óptimo, você ainda se recorda destes conceitos, prossigamos

Certas grandezas ficam determinadas apenas por um número real, acompanhado pela medição correspondente.

Por exemplo: 5kg de massa, 8 m^2 de área, 70C° de temperatura etc.

Tais grandezas são chamadas de ***grandezas escalares.***

Outras grandezas precisam para além do número real e a unidade de medição, uma **direcção e sentido.**

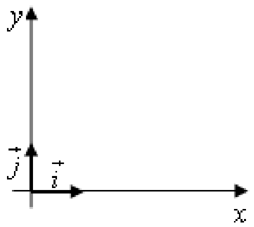
Por ex: a força, a aceleração, o campo magnético, etc. Estas são chamadas ***grandezas vectoriais***

O que é afinal um vector?

Um vector é um ente matemático que representa um movimento ou uma força e caracteriza-se por ter:

- Uma direcção;
- Um sentido;
- Um comprimento.

Ou seja:



Vector é uma grandeza que se define completamente por uma direcção, um sentido e um ponto de aplicação para além do valor numérico (módulo).

O módulo do vector é o valor numérico que dá o comprimento do segmento do vector e designa-se por $|\overrightarrow{AB}|$ onde A é a Origem do vector e B é a extremidade do vector,

$|\overrightarrow{AB}|$ - Módulo do vector AB

Os vectores designam-se também pelas letras minúsculas com uma seta por cima $\vec{u}$

Portanto as características de um vector são:

Isso mesmo, Voce já sabe caracterizar um vector mas como é que podemos classificar estes vectores?

Classificação de vectores

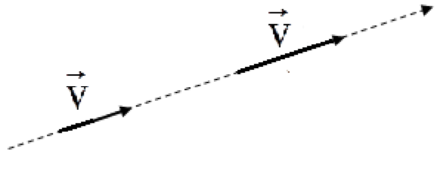
Vector livre - Vector em que não se conhece o seu ponto de aplicação podendo ser deslocado para qualquer direcção

Vector nulo – aquele em que a extremidade coincide com a origem [A, A] e representa-se por $\vec{O}$

Vector unitário – todo o vector de módulo igual a unidade de medição

Vector aplicado fixo ou ligado - todo o vector em que se conhece o ponto de aplicação

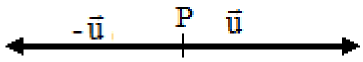
Vector deslizante – todo vector que se pode deslizar ao longo da sua linha de acção ou de um suporte



Versor – é um vector unitário que tem direcção e sentido de um outro vector. Os versores que têm a direcção dos eixos das coordensdas cartesianas ox e oy denotam-se por $\vec{i}$ e $\vec{j}$

Relação entre vectores

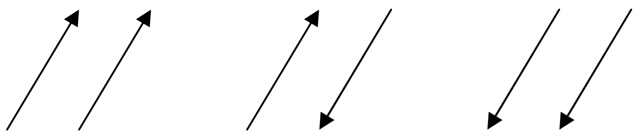
Vectores opostos (simétricos) - são vectores que têm o mesmo ponto de aplicaçãoa mesma direcção, mesmo modulo e sentidos contrarios



Por exemplo:

$-\vec{u}$ é vector oposto de $\vec{u}$

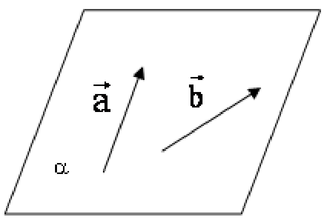
Vectores paralelos – Para dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ que não são nulos, se as direcções são mesmas e os sentidos são mesmos ou inversos, podemos dizer que $\vec{a}$ é **paralelo** ao $\vec{b}$,e escrevemos $\vec{a} \parallel \vec{b}$

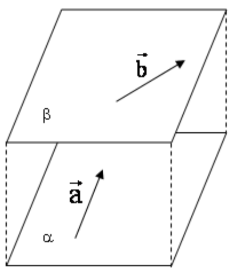


Vectores colineares- Diz-se que dois vectores são $k \neq 0$ tal que $\vec{u} = k \times \vec{v}$ colineares se e só se existe um número real.

Podemos dizer também que Vectores colineares são vectores com a mesma direcção, independentemente do sentido e do comprimento.

Vectores coplanares- São vectores que estão sobre o mesmo plano ou em planos paralelos





Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- **Ponto**: designa-se pelas maúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, ……. X, Z)
- **Recta**: designa-se lelas letras minúsculas do nosso alfabeto (a, b, c, ……x, z)
- **Plano** designa-se pelas letras do alfabeto grego (α, β, γ, ……,)
- As grandezas que são determinadas apenas por um número real, acompanhado pela unidade de medição correspondente, são chamadas de ***grandezas escalares,***
- As grandezas que precisam para além do valor numerico, uma direcção e de sentido**,** são Chamadas ***grandezas vectoriais***
- **Vector** é um segmento definido por uma direcção um sentido e um ponto de aplicação para além do valor numérico (módulo)
- Vector designa-se por $\overrightarrow{AB}$ onde A é a Origem do vector e B é a extremidade do vector, $|\overrightarrow{AB}|$ ou $|\vec{u}|$ - módulo do vector.
- Os vectores designam-se também pelas letras minúsculas com uma seta por cima $\vec{u}$
- Portanto as características de um vector são: **Ponto de aplicação, Direcção, Sentido e Modulo.**

<u>**Classificação de vectores**</u>

Vector livre - todo vector em que não se conhece o seu ponto de aplicação podendo ser deslocado para qualquer direcção.

Vector nulo – todo vector de direcção e sentidos indeterminados e comprimento nulo (igual a zero) e representa-se por $\vec{0}$

Vector unitário – todo o vector de módulo igual a unidade de medição.

Vector aplicado fixo ou ligado - todo o vector em que se conhece o ponto de aplicação.

Vector deslizante – todo vector que se pode deslizar ao longo da sua linha de acção ou de um suporte.

Versor – é um vector unitário que tem direcção e sentido de um outro vector. Os versores que têm a direcção dos eixos das coordenadas cartesianas ox e oy denotam-se por $\vec{i}$ e $\vec{j}$

Relação entre vectores

Vectores opostos (simétricos) - são vectores que têm o mesmo ponto de aplicação a mesma direcção, mesmo módulo e sentidos contrários.

Vectores paralelos Para os 2 vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ que não são nulos, se as direcções são mesmas e os sentidos são mesmos ou inversos, podemos dizer que $\vec{a}$ é paralelo ao $\vec{b}$, e escrevemos $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Vectores colineares- são vectores que estão sobre a mesma linha de acção (os vectores paralelos são colineares).

Vectores coplanares- São vectores estão sobre o mesmo plano ou em planos paralelos

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Defina por suas palavras: vectores colineares e vectores simétricos

Resposta:

Simples!

Vectores colineares são vectores que estão na mesma linha de acção e também são paralelos, vectores simétricos têm a mesma direcção, o mesmo módulo e sentidos opostos.

2. Como podem ser classificados os vectores?

Resposta

Vector livre - todo vector em que não se conhece o seu ponto de aplicação podendo ser deslocado para qualquer direcção.

Vector nulo – todo vector de direcção e sentidos indeterminados e comprimento nulo (igual a zero) e representa-se por $\vec{0}$

Vector unitário – todo o vector de módulo igual a unidade de medição.

Vector aplicado fixo ou ligado - todo o vector em que se conhece o ponto de aplicação.

Vector deslizante – todo vector que se pode deslizar ao longo da sua linha de acção ou de um suporte.

Versor – é um vector unitário que tem direcção e sentido de um outro

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Defina grandezas escalares e grandezas vectoriais e dê dois exemplos em cada caso.

2. Que relações podem ser estabelecidas entre os vectores?

De certeza que você ja está preparado para as próximas lições sobre a geometria plana, mas antes, responda as seguintes questões para sua recapitulação

Lição 2

Coordenadas de um Vector

Introdução

Um vector pode ser representado no plano cartesiano, quando falamos do plano cartesiano estamos nos referindo ao plano definido pelos dois eixos cartesianos como bem sabe duas rectas definem um plano.

Sabemos que voce ainda se recorda da definicao de vector, podemos deduzir a partir dai, que este é tambem um conjunto de pontos. dos quais , iremos considerar dois que são basicos na definicão. A origem e a extremidade do vector.

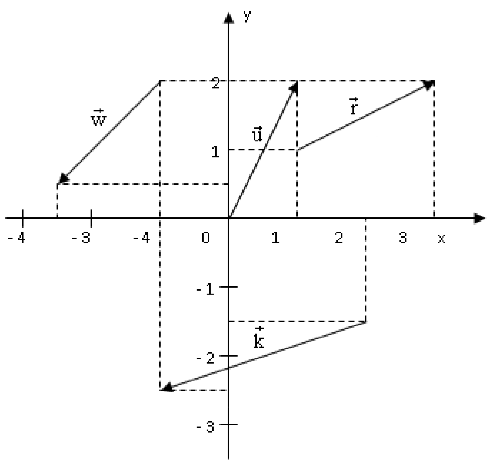
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Determinar* as coordenadas de um vector no SCO.
- *Representar* as coordenadas de um vector na forma matricial.
- *Determinar* o módulo de um vector.

Coordenadas de um vector

Como é representado o vector no SCO?



Para um dado vector v temos: $\vec{v}\,(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$

Exemplos: $\vec{u}$ (1-0; 2-0) $\Rightarrow$ $\vec{u}$ (1; 2)

$\vec{k}$ (-1-2; -2,5 – (-1,5)) $\Rightarrow$ $\vec{k}$ (-3; -1)

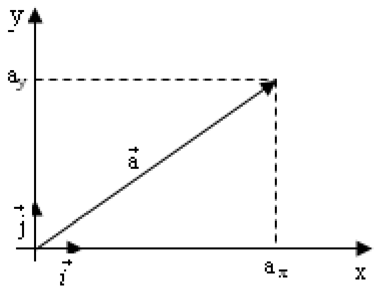
$\vec{r}$ (3-1; 2-1) $\Rightarrow$ $\vec{r}$ (2; 1)

$\vec{w}$ (-2,5+1; 0,5-2) $\Rightarrow$ $\vec{w}$ (-1,5; -1,5)

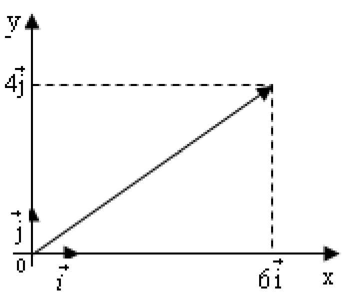
Ao par ordenado de números reais dá-se o nome de **coordenadas de um vector**, e para a sua determinação, basta projectá-los sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.

Por outro lado qualquer vector não nulo pertencente ao plano pode ser representado por meio das suas projecções na forma:

$$\boxed{\vec{a} = ax_i + ay_j}$$

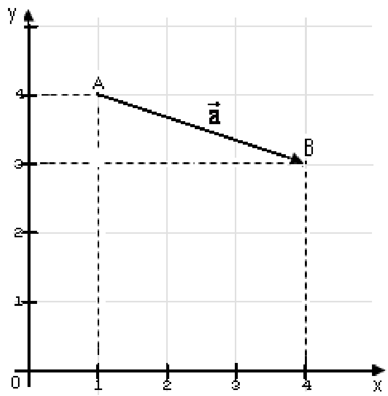


Os números a_x e a_y chamam-se Coordenadas do vector cuja representação na forma matricial é A (ax; a_y)



$\vec{a} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$; $6\vec{i}$ e $4\vec{j}$ são componentes do vector $\vec{a}$ no sistema Cartesiano Ortogonal 6 e 4 São coordenadas do vector no mesmo S.C.O

Se o vector for designado por $\overrightarrow{AB}$, onde A ($xA–y_A$) e B ($xB·yB$) então as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ serão: $\overrightarrow{AB} = (x_B – x_A ; y_B – y_A)$



Neste caso a = (4 – 1; 3 – 4) 0u a = (3; -1)

Outros exemplos

$\vec{a}$ = 5i + 3j ------------ $\vec{a}$ = (5, 3)

M (2, 1) e N (-3, 4) ------------ $\overrightarrow{MN}$ = (-5, 3)

$\vec{v}$ = 3j--------------------------------------- $\vec{v}$ = (0, 3)

$\vec{k}$ = -7i-------------------------------------- $\vec{k}$ (-7, 0)

Quando é que dizemos que dois vectores são iguais?

Simples, dados dois vectores $\vec{u}$ (a , b) e $\vec{v}$ (c , d) **são iguais** se e só se

a = c e b = d

Exemplo: determiner x e y de modo que os vectores $\vec{a}$ = (1; 5) e

$\vec{b}$ = (2-x; y) sejam iguais

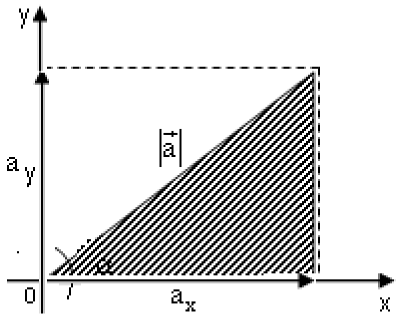
Resolução: condição 1 = 2-x e -5 = y então resolvendo a primeira equação teremos o valor de x, 1 = 2-x

x = 1

Resposta: os vectores serão iguais se x for 1 e y for -5

Avancemos

A relação entre um vector e seus componentes



Aplicando a definição de razões trigonométricas no triângulo rectângulo pintado teremos: AOB

$$sen\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{a_y}|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\overrightarrow{a_y}| = |\overrightarrow{a_y}|\,.\,\mathrm{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{a_x}|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\overrightarrow{a_x}| = |\vec{a}|.\cos\alpha$$

Fácil, pode-se concluir que a projecção de um vector é um escalar

Assim podemos deduzir a fórmula para o cálculo do módulo de um vector

Você já sabe o que é, o módulo de um vector mas vamos de novo recordar

Chama-se módulo ou norma de um vector v e representa – se $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$ Ao número que exprime a medida do comprimento do vector ou simplesmente, é a distância mais curta entre a origem e a extremidade desse vector.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Um par ordenado de números reais define um vector. O este par dá-se o nome de **coordenadas de um vector,** para a sua determinação, basta projectá-los sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.

- O vector pode ser representado pela forma:

$\vec{a}=6\vec{i}+4\vec{j}$

- Dois vectores $\vec{u}\ (a\ ,\ b\ )$ e $\vec{v}\ (\ c\ ,\ d\ )$ **são iguais** se e só se

  $a = c$ e $b = d$

- Chama-se módulo ou norma de um vector v e representa –se $|\vec{v}|$
  Ao número que exprime a medida do comprimento do vector
  ou simplesmente, é a distância mais curta entre a origem e a extremidade desse vector

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

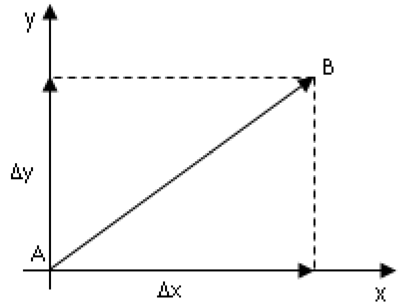
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

$$A(x_1;y_1) \text{ e } B(x_2;\ y_2)$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2 + (y_2\text{-}y_1)^2}$$

Este valor é sempre positivo

Para:

$$\vec{a}(x_1;y_1) \text{ e } \vec{b}(x_2;\ y_2)$$

Dados os vectores:

$$\vec{a}(3;4) \qquad \vec{b}(-3;-4)$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(\text{-}3)^2 + (\text{-}4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determine o módulo dos seguintes vectores

   a) $a = 3i - 3j$ b) $b = i + 3j$ c) $c = 8j$

   d) Vector $\overrightarrow{AB}$ se A (3, -1) e B (-2; 3)

2. Determine as restantes coordenadas de A e B sabendo que no vector AB (5; 2) a abcissa de A e a ordenada de B são respectivamente -2 e 3.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 3

Operação com vectores

Introdução

Nesta lição você vai aprender as diferentes operações que podem ser feitas com vectores. Ao definir o vector vimos que este pode ser representado geometricamente porque possui uma direcção, um sentido, módulo, origem e extremidade, isto significa que podemos efectuar operações pelo processo geométrico, por outro lado o vector tem a sua representação na forma matricial o que nos permite efectuar operações pelo processo analítico.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Adicionar* geometricamente vectores.
- *Adicionar* analiticamente vectores.
- *Multiplicar* um vector por um escalar.
- *Multiplicar* dois vectores .

Adição geométrica de vectores

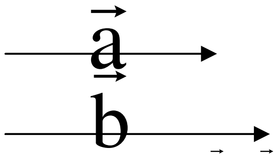
Para adição geométrica de vectores você só precisa de ser capaz de construir um paralelogramo ou um triângulo. Caro estudante, essa matéria você já vem tratando desde o ensino primário, desta vez vai associar a este conhecimento o vector que também é uma figura geométrica simples semelhante ao segmento de recta, acrescentando apenas uma característica específica que é o sentido do vector.

Portanto, na adição de vectores vamos ter em conta as suas características sobretudo o seu sentido pois, este determina o sentido do vector resultante que é construido com base na lei do paralelogramo ou lei do triângulo que consiste exactamente na construção destas mesmas figuras geométricas a partir de condições definidas para os vectores por adicionar.

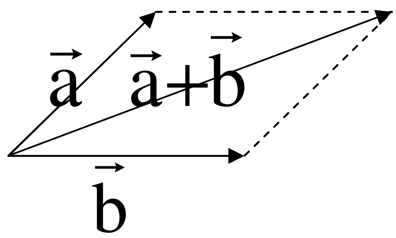
Como você já sabe construir o paralelogramo e o triângulovamos a nossa lição.

Considere o exemplo:

Dados

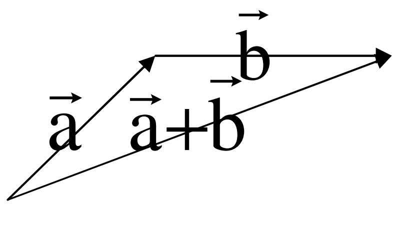


a) **Os vectores** $\vec{a}$ e $\vec{b}$ **têm, o mesmo ponto de aplicação**.Aplica-se a lei do paralelogramo. A saber:



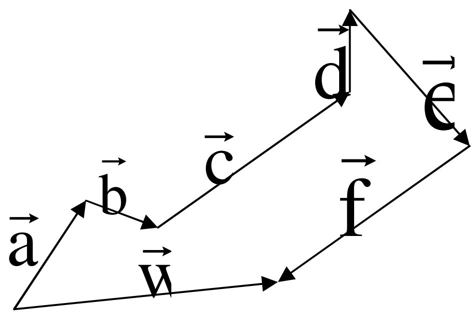
b) **Os vectores** $\vec{a}$ e $\vec{b}$ **não têm o mesmo ponto de aplicação.**Aplica-se a lei do triângulo. A saber

Neste caso, basta unir a origem do primeiro vector com a extremidade do Segundo.



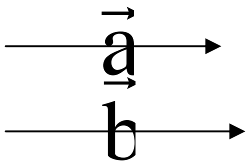
NB: Na adição de um número arbitrário de vectores, aplicará o mesmo princípio, e neste caso chama-se lei do polígono

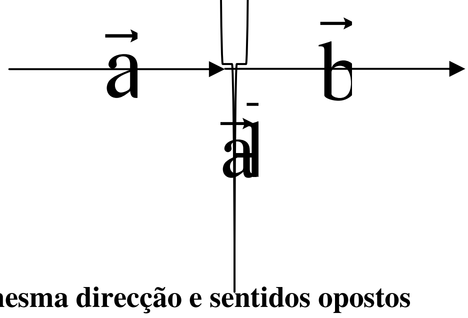
Exemplo



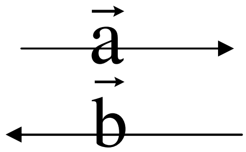
$\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$

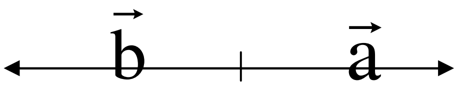
c) **Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direcção e mesmo sentido**





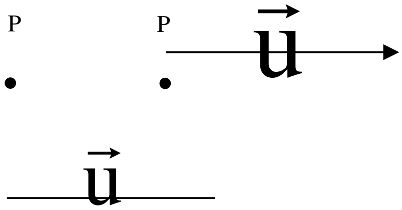
d) **Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direcção e sentidos opostos**





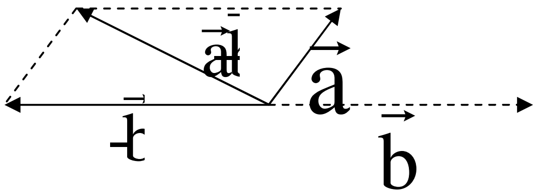
A resultante é um ponto

e) **Adição de um ponto com vector livre.**



A resultante é um vector fixo.

f) **Subtracção de vectores**



Pois, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

Propriedades das operações com vectores

b) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$ O vector nulo é elemento neutro da adição de vectores

c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$ Existência do vector simétrico

d) $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ A adição de vectores é associativa

e) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$ Produto de um vector por um escalar

(número real)

f) $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$ Distributividade do escalar (número real) k,

em relação à adição de vectores

Adição Analítica de vectores

Dados os vectores $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right) \\ &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \\ &= x_1\vec{i} + x_2\vec{i} + y_1\vec{j} + y_2\vec{j}\end{aligned}$$

Colocando em evidência o $\vec{i}$ e $\vec{j}$ temos:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

Observação: a base do conjunto de valores de um plano é o par ordenado ($\vec{i}$; $\vec{j}$) de vectores não-colineares.e x, y as coordenadas dos vectores

Multiplicação (produto) de vectores k por escalar

Dado um número real k e $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $k \in R$ com $k \neq 0$

Fórmula $k.\vec{a} = k\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = kx\vec{i} + ky\vec{j} = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j}$

a) se $k = 0 \wedge \vec{a} \neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ Diferente de vector nulo

b) $k > 0 \wedge \vec{a} \neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ Terá o mesmo sentido que $\vec{a}$

c) $k < 0 \wedge \vec{a} \neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ Terá sentido contrário do vector $\vec{a}$

Multiplicação (produto) de dois vectores

Dados dois vectores $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

Fómula

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right).\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = x_1.x_2\vec{i}.\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = x_1.x_2 + y_1y_2$$

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = x_1.x_2 + y_1y_2}$$

Para uma base ortonormada

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

A operação com vectores respeita as seguintes propriedades

a) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Propriedade comutativa da adição de vectores.

b) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$ Elemento neutro da adição de vectores

c) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ Existência do vector simétrico

d) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ Propriedade associativa da adição de vectores.

e) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{a}$, Elemento neutro

f) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ Distributividade do escalar, em relação à adição de vectores

Adição analítica de vectores

Dar os vectores $\vec{a}=x_1 i+y_1 j$; $\vec{b}=x_2 i+y_2 j$

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$$

Produto de dois vectores

$$\vec{a}.\vec{b}= x_1.x_2+y_1y_2$$

Produto de um vector por um escalar

a) se $k=0 \wedge \vec{a}\neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ Diferente de vector nulo

b) $k>0 \wedge \vec{a}\neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ terá o mesmo sentido que $\vec{a}$

c) $k<0 \wedge \vec{a}\neq 0 \Rightarrow k.\vec{a}$ terá sentido contrário do vector $\vec{a}$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Dados os vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$

Determine:

a) $\vec{a} + \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} = \vec{i} - 9\vec{j}$

2. Determine k para que os valores de u e v sejam iguais,Sendo:

$\vec{u} = 6\vec{i} + 5\vec{j}$ $\quad$ e $\quad \vec{b} = 6\vec{i} + (k+3)\vec{j}$

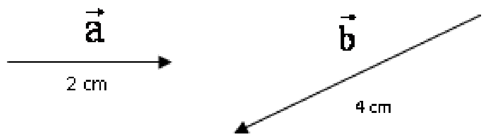
$\vec{u} = \vec{v} \quad sse \quad 6\vec{i} = 6\vec{i} \;\wedge\; 5\vec{j} = (k+3)\vec{j}$

$k + 3 = 5$

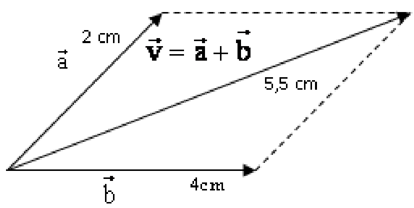
$k = 2$

3. Dados os vectores a e b calcule geometricamente

a) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

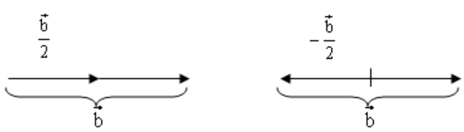


Resolução:



b) $\vec{t} = \dfrac{\left|\overrightarrow{-b}\right|}{2}$

Resolução:



4. Determine m e n de modo que os vectores $\vec{u}$ e $3\vec{v}$ sejam iguais sendo

$\vec{u} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ e $\vec{v} = (m+4)\vec{i} + (8+n)\vec{j}$

Resolução:

$$\vec{u} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow 3\vec{v} = 3(m+4)\vec{i} \ \text{-} 3(8+n)\vec{j}$$

$$\Rightarrow 3\vec{v} = ((3m+12))\vec{i} + (-24\text{-}3n)\vec{j}$$

$$\vec{u} = 3\vec{v} \quad \text{sse} \quad \Rightarrow 3m+12=6 \wedge -24\text{-}3n = 8$$

$$m = \text{-}2 \wedge n = \text{-}\frac{32}{3}$$

Fácil, bastou aplicar a definição de vectores iguais.

Agora , passemos para a fase de avaliação onde irá medir o seu nível de compreensão da matéria

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1.dados os vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ $\vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$,

Calcule

$a)\ \vec{a} + \vec{b}$

$b)\ \vec{b} - \vec{c}$

2. Determine o produto do número real $\sqrt{2}$ pelo vector $\vec{v}\left(-2;\sqrt{8}\right)$

3. Dados os vectores $\vec{u}\,(-3\,;4\,)$ e $\vec{v}\,(3;4\,)$ Determine

$a)\ 3\vec{u} - (5\vec{u} - 2\vec{v})$ $b)\ \vec{u} + 3\vec{v}$

De certeza, resolveu correctamente todos os exercícios pois, você é inteligente, mesmo assim é necessário conferir as suas respostas para ficar seguro

Lição 4

Produto interno de dois vectores (ou produto escalar)

Introdução

Já falamos de produto de vectores numa base ortonormada, você se

Recorda desta definição?

$\vec{u}.\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ Para dois vectores não nulos. Agora vamos

Definir o produto interno de vectores que depende do ângulo por eles formado.

Muito simples. Preste atenção à definiçào

Ao concluir esta lição você será capaz de:

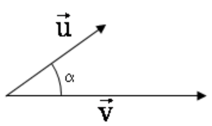
Objectivos

- *Calcular* o produto interno ou produto escalar de dois vectores .

Produto interno de dois vectores

Definição

Dados dois vectores não nulos, chama-se produto interno ou escalar Destes vectores, a um número real definido por:
$\vec{u}.\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \lvert\vec{v}\rvert .\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ Ou $\vec{u}.\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \lvert\vec{v}\rvert .\cos\alpha$



Onde α é o ângulo formado pelos dois vectores

Desta definição podemos deduzir que:

Repare que quando $\vec{u}.=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, o produto $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

(lei de anulamento do produto)

Para realizar a operação precisamos de certas regras ou propriedades.

Vamos definí-las com atenção, não se esqueça dos valores de co-senos de alguns ângulos notáveis

Propriedades

$\vec{u}.\vec{v} \in R$ (o produto interno é um escalar)

se $0 < \left(\vec{u},\vec{v}\right) < \frac{\pi}{2}$ $\left(\vec{u},\vec{v}\right) > 0$ (positivo)

se $\frac{\pi}{2} < \left(\vec{u},\vec{v}\right) < \pi$ $\left(\vec{u},\vec{v}\right) < 0$ (negativo)

se $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\pi}{2}$ $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$ (nulo)

se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, então:

$$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$$

$$\vec{u}.\vec{v}= -\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$$

Percebeu como é que o produto interno varia de sinal? Claro, você sabe muito bem da 10ª classe que:

Cos0° = 1, cos 90° = 0, cos 180° = -1

Estes ângulos determinam o sinal do produto interno.

se $\vec{u}.=\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}\,\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (comutatividade)

$$\left(\vec{u}.\vec{v}\right).\vec{w} = \vec{u}.\left(\vec{u}.\vec{w}\right)$$ (associatividade)

$$\vec{w}\left(\vec{u}.+\vec{v}\right)=\vec{u}\,\vec{w}+\vec{v}\vec{w}$$ (distributividade)

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Definição

Dados dois vectores não nulos, chama-se produto interno ou escalar destes vectores, a um número real definido por:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha}$$

Onde α é o ângulo formado pelos dois vectores

1) $\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$ (o produto interno é um escalar)

2) se $0<\left(\vec{u},\vec{v}\right)<\frac{\pi}{2}$; $\left(\vec{u},\vec{v}\right)>0$ (positivo)

3) se $\frac{\pi}{2}<\left(\vec{u},\vec{v}\right)<\pi$; $\left(\vec{u},\vec{v}\right)<0$ (negativo)

4) se $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}$; $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ (nulo)

5) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, então:

$$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \quad \text{ou} \quad \vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$$

6) se $\vec{u}.=\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}\,\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^{2}$

7) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (comutatividade)

8) $\left(\vec{u}.\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\left(\vec{u}.\vec{w}\right)$ (associatividade)

9) $\vec{w}\left(\vec{u}.+\vec{v}\right)=\vec{u}\,\vec{w}+\vec{v}\,\vec{w}$ (distributividade)

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. a) Dertminar o produto interno de dois vectores a ,b

$|\vec{a}| = 3 \quad |\vec{b}| = 4 \quad \alpha = 30^0$

Resolução:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|.\cos\,\alpha$ (Por definição de produto interno)

Substituindo os valores dados na expressão anterior

teremos: $\vec{a}.\vec{b} = 3.4.\cos\,30^0$ Como $\cos\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Então

$\vec{a}.\vec{b} = 3.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

Resposta: o produto interno é igual a $6\sqrt{3}$ Você pode confirmar que o valor é positivo pois o ângulo entre os vectores é positivo e menor que 90° conforme a propriedade (2) do número (I).

b) $|\vec{a}| = 10 \quad |\vec{b}| = 6 \quad \alpha = 135^0$

mas $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

porque o ângulo pertence ao segundo quadrante, os valores do co-seno

são negativos e leêm-se no eixo dos x (abcissas)

$\vec{a}.\vec{b} = -10.6\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -30\sqrt{2}$

Figura

Deste modo:

Resposta: o produto interno de é $\vec{a}.\vec{b}$ igual a como $-30\sqrt{2}$ pode ver é um número negativo porque a medida do ângulo está entre 90° e 180° pela propriedade (4) do número (I)

c) $|\vec{a}| = 3 \quad |\vec{b}| = 6\sqrt{3} \quad \vec{a}.\vec{b} = \sqrt{18}$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|.\cos\,\alpha \Rightarrow\ \sqrt{18}=3.6\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{3.6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{18}$$

Não se atrapalhe, use a mesma expressão da definição do produto interno, basta isolar a incognita, que neste caso é coseno do ângulo entre os vectores. Substituíndo os valores dados na equação teremos:

Logo

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|.\cos\,\alpha \Rightarrow\ \sqrt{18}=3.6\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{3.6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{18}$$

2. Considere os vectores

Determine

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|.\cos\,\alpha \qquad \vec{u}(2;1) \quad \vec{v}(2;1)$$

Resolução

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=$$

$$(2;1)(2;1)=\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{2^2+1^2}\ \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{(2;1)(2;1)}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=1\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0°$$

Logo: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 0° = 5.5.1=25$

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determine o produto interno dos vectores se $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$a)\quad |\vec{a}| = 8 \quad |\vec{b}| = 5 \quad \alpha = 180^0$

$b)\quad |\vec{a}| = 7 \quad |\vec{b}| = 2 \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$c)\quad |\vec{a}| = 3 \quad |\vec{b}| = 6 \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$

$d)\quad |\vec{a}| = 3 \quad |\vec{b}| = 6 \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \vec{a} \,.\, \vec{b} = \sqrt{18}$

2. Determine o ângulo entre os vectores $\vec{u}\,(2;1)\ \vec{w}(2;4)$ sabendo que $\vec{u}.\vec{w} = 8$

3. Determine o ângulo de cada par de vectores

   a) (-2; 2) e (2; 2)

   b) (0; 1) e (1; 3)

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 5

Colinearidade e perpendicularidade de vectores

Introdução

Caro estudante, nesta lição você vai estudar as relações entre dois vectores. Dois vectores no plano podem ter um ponto de intersecção, assim como podem não ter. No caso de existir um ponto de intersecção, estes vectores naturalmente formam um ângulo entre eles, esta é uma situação de relação entre vectores.

Para esta lição reservamos o estudo mais aprofundado sobre as relações entre os vectores. A colinearidade e perpendicularidade de vectores.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

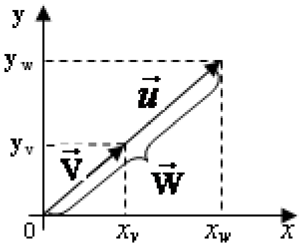
Objectivos

- *Aplicar* as condições de colinearidade de vectores na resolução de exercícios sobre o cálculo das coordenadas e módulo de vectores.
- *Aplicar* as condições de perpendicularidade de vectores na resolução de exercícios sobre o cálculo das coordenadas e módulo de vectores.

Colinearidade e perpendicularidade de vectores

Caro estudante, nesta lição, você vai estudar as relações entre dois vectores.

Observe bem a figura ao lado



Consideremos os vectores

Os vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ v e w como pode observar no plano S.C.O pertecem a mesma recta por isso dizem-se vectores colineares.

Que relaçào poderá existir entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ***?***

Muito simples, olhando para as suas coordenadas podemos estabelecer o seguinte:

$$\vec{v}\left(x_v;y_v\right) \text{ e } \quad \vec{w}\left(x_w;y_w\right)$$

A que conclusão se pode chegar?

É claro, dois vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dizem-se colineares se existir um número real k, tal que:

$$\vec{v}\left(x_v;y_v\right)=k\left[\vec{w}\left(x_w;y_w\right)\right]$$

Deste modo se:

K> 0 os vectores terão o mesmo sentido.

K <0 os vectores terão sentidos opostos (contrarios).

Daí, a condição de colinearidade, a saber: São colineares os vectores que formam entre si um ângulo 0° ou 180°

Exemplo: $\vec{u}$ (-3;4), $\vec{v}$ (3;4)

Determinar um vector colinear ao vector $\vec{v}+\vec{u}$ de comprimento igual a 5.

Resolução: $\vec{v}$ e $\vec{u}$

1° Passo: seja $\vec{w}$ o vector collinear ao vector $\vec{v}$ e $\vec{u}$, e

$\left|\vec{w}\right|$ =5 Pela condição de colinearidade temos w = k ($\vec{v}+\vec{u}$) e $\left|\vec{w}\right|$ =5 consequentemente $\left|\vec{w}\right| = \left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

2° Passo Pela adiçào de vectores temos que;

$\vec{u}$ (-3;4) + $\vec{v}$ (3;4) = (0;8)

3° Passo Assim: $\left|\vec{w}\right|$ = k $\left|(0;8)\right|$ como $\left|\vec{w}\right|$=5 pelos dados, teremos: $5 = k\sqrt{8}^2 \Rightarrow k = \frac{5}{8}$

Logo $\vec{w} = \frac{5}{8}$(0; 8) ------- $\vec{w}$ (0; 5)

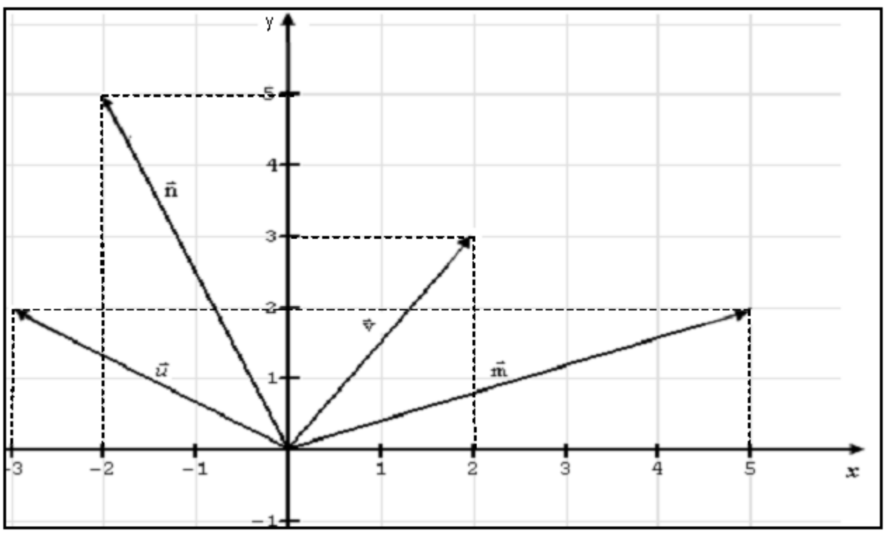
Note que: se os vectores são colineares, então formam entre si ângulos de 0° ou180°,consequentemente os produtos internos para cada caso serão definidos como:

Se o ângulo for de 0° $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|.\vec{b}\right|$

Se o ângulo for de 180° $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|\left|.\vec{b}\right|$

Estas duas condições são chamadas condições de colinearidade dos dois vectores.

II **Perpendicularidade entre dois vectores**



Observe os vectores considerados nos planos cartesianos, repare que em ambos os casos, os vectores são perpendiculares.

Qual será o produto interno nestes casos?

Recorde-se que os vectores perpendiculares formam entre si um ângulo recto (90^0)

Fórmula $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{sse} \quad \vec{a}.\vec{b} = 0}$

Esta é uma das propriedades do produto interno. Podemos verificar para os vectores a seguir:

$\vec{u}.\vec{v} = \; = (-3;2).\ (2;\ 3) = -6 + 6 = 0$

$\vec{m}.\vec{n} = \; = (5;\ 2).\ (-2;\ 5) = -10 + 10 = =0$

Claro que foi fácil porque você sabe como efectuar a multiplicação de vectores por isso aplicou a definição $\vec{u}.\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Que conclusão se pode tirar?

Fácil, você pode sem rodeios chegar a conclusão:

para obter um vector perpendicular a um vector dado não nulo, basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Dois vectores w e v são colineares se existir um número real k tal que:

$\vec{w} = k \cdot \vec{v}$

Dois vectores a e b são perpendiculares sse :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = o$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1.Encontre vectores perpendiculars aos seguintes

Você precisa de procurar vectores cujo produto com o vector seja igual a zero segundo a definição, você calcular mentalmente pois é bastante simples descobrir esses vectores. Primeiro os números procurados têm o mesmo valor absoluto das coordenadas do vector dado. Então e só procurar o sinal para estes, que vai tornar o produto nulo.Veja só:

a) (4;0) solução (0 ; 4) e (0 ; -4)

b) (0;-3) solução (-3 ; 0) e (3 ; 0)

c) (4; 3) solução (3 ; - 4) e (-3 ; 4)

d) (-1 ;1) solução (1 ; 1) e (-1 ; -1)

Óptimo, você acertou, mas antes deve verificar esse produto se de facto dá zero ou não com base na definição analítica do produto de vectoresDados os vectores $\vec{u}(2 ; 1)$, $\vec{z}(-1 ; 2)$, $\vec{v}(2 ; -1)$ e $\vec{w}(2 ; 4)$

Indique justificando pares de vectores perpendiculares.

Resolução

$\boxed{\vec{u} \perp \vec{z} \quad \text{sse} \quad \vec{u} . \vec{z} = 0}$

Como (2; 1). (-1; 2) = -2 + 2 = 0 então os dois vectores são perpendiculares

$\boxed{\vec{v} \perp \vec{w} \quad \text{sse} \quad \vec{v} . \vec{w} = 0}$ V é perpendicular w

Porque v.w = 0

Como (2; -1) (2; 4) = 4 - 4= 0 então v e w são perpendiculares

1. Para que valores de <u>a</u>, (2a - 1; a + 5) é perpendicular a

2. (6 – 6a; 2a + 6)?

Resolução:

<u>1° Passo</u>

(2a - 1; a + 5) (6 – 6a; 2a + 6) = 0 (pela

Definição de perpendicularidade)

2° Passo

(2a - 1). (6-6a) + (a+ 5). (2a + 6) = 0

$$\left[(2a-1)(6-6a)\right]+\left[(a+5)(2a+6)\right]=0$$
$$12a-12a^2-6+6a+2a^2+6a+10a+30=0$$
$$-10a^2+34a+24=0 \ /(-2)$$
$$5a^2-17a-12=0$$

3° Passo

Resolver a equação quadrática obtida com base na fómula resolvente

$$\Delta=289-4.5.(-12)=52$$
$$a_1=\frac{17-23}{10}=-\frac{3}{5}$$
$$a_2=\frac{17+23}{10}=4$$

Vamos agora verificar qual das soluções a_1 ou a_2 portanto $-\frac{3}{5}$ ou 4 obtidas, satisfaz a condição de perpendicularidade.

para a=-3/5 temos:

Condição de perpendicularidade:

(2a - 1 ; a + 5) (6 – 6a ; 2a + 6) =0

$$\left[2.\left(-\frac{3}{5}\right)-1\ ;\ \left(-\frac{3}{5}\right)+5\right]\left[6-6.\left(-\frac{3}{5}\right)\ ;\ 2.\left(-\frac{3}{5}\right)+6\right]=$$
$$=\left[\left(\left(-\frac{6}{5}\right)-1\right)\left(6+\frac{18}{5}\right)\right]+\left[\left(-\frac{3}{5}+5\right)\left(-\frac{6}{5}+6\right)\right]=$$

$$=\left(-\frac{11}{5}\right)\left(\frac{48}{5}\right)+\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)=\frac{528}{25}+\frac{168}{25}\neq 0$$

para a=4 temos:

(2a - 1; a + 5) (6 – 6a; 2a + 6) =0

$$(2.4-1;4+5)(6-6.4;2.4+6)=(7;9)(-18;14)=-126+126=0$$

Resposta: o valor de a é 4

Isso mesmo, é preciso muita concentração durante os cálculos para não falhar, você conseguiu isso. Está de parabéns.

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Que condições se devem impor aos vectores a e b de modo que $\vec{a} \perp \vec{b}$?

2. Considere os vectores $\vec{u}(-3;4)$ $\vec{v}(3;4)$ e $\vec{w}\left(-1;\frac{4}{3}\right)$

   a) Selecione dois vectores que sejam colineares.

   b) Determine um vector colinear a $\vec{u}$ cujo comprimento é 10.

   c) Determine um vector colinear com $\vec{u}+\vec{v}$ de comprimento igual a 5.

3. Determine as coordenadas de um vector $\vec{v}$ colinear com $\vec{u}(-4;3)$ $cujo$ $\left|\vec{v}\right|=12$

4. Determine um vector de módulo igual a 10 e perpendicular a $\vec{v}(3;-4)$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 6

Divisão de segmentos numa razão dada ou em partes proporcionais

Introdução

Nas aulas de geometria analítica das classes anteriores aprendeu a dividir geometricamente, um segmento de recta em partes iguais usando a regua e compasso. Chegou o momento de usar um processo analítico para dividir o segmento numa dada razão:

É um processo não complicado, vamos deduzir as equações que nos permitem calcular as coordenadas do ponto que vai dividir o segmento numa razão dada. Fique atento, você vai entender com muita facilidade.

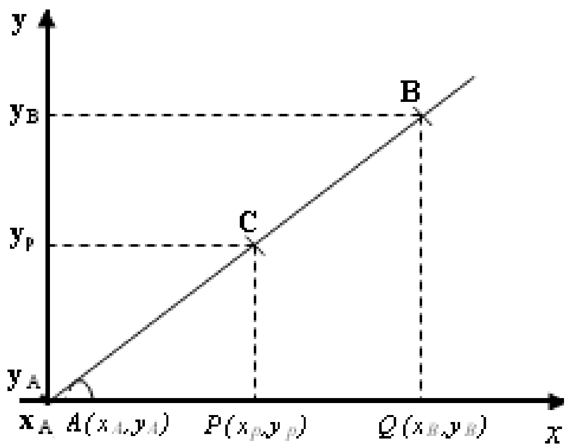
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Determinar* as coordenadadas de um ponto que divide um segmento numa razão dada.

Divisão de segmentos numa razão dada

Observe a figura



Depois de observar a figura o nosso objectivo é determinar as coordenadas do ponto $P(x_p ; y_p)$ que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes:

$$P(x_p ; y_p) \qquad A(x_A ; y_A) \text{ e } B(x_B ; y_B)$$

1º. Passo Calcular as distâncias

$|AC| = x_p - x_A \qquad (1)$

$|CD| = x_B - x_P \qquad (2)$

Por outro lado

$|DQ| = y_p - y_A \qquad (3)$

$|QB| = y_B - y_P \qquad (4)$

$\overrightarrow{AC}$ é colinear a $\overrightarrow{CD}$ logo $\left|\overrightarrow{AC}\right| = r\left|\overrightarrow{CD}\right| \qquad (5)$

DQ é colinear a QB logo $\left|\overrightarrow{DQ}\right| = r\left|\overrightarrow{QB}\right| \qquad (6)$

Considerando as equações (5) e (6) e substituíndo

Das equações (1) (2) (3) e (4) teremos :

$\left|\overrightarrow{AC}\right| \;;\; \left|\overrightarrow{CD}\right| \;;\; \left|\overrightarrow{DQ}\right| \;;\; \left|\overrightarrow{QB}\right|$

De

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = r\left|\overrightarrow{CD}\right| \qquad (5)$$

$$x_P - x_A = r\,(x_B - x_P)$$

$$x_P - x_A = rx_B - rx_P$$

$$x_P + rx_P = rx_B + x_A$$

$$x_P\,(1+r) = rx_B + x_A$$

$$x_P = \frac{rx_B + x_A}{1+r}$$

Abcissas do ponto P

De

$$\left|\overline{DQ}\right| = r\left|\overline{QB}\right| \qquad (6)$$

$$y_P - y_A = r\,(y_B - y_P)$$

$$y_P - y_A = r\,y_B - r\,y_P$$

$$y_P + r\,y_P = r\,y_B + y_A$$

$$y_P\,(1+r) = r\,y_B + y_A$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r}$$

Ordenada do ponto P

Portanto as coordenadas do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes são dadas por:

$$P\left(x_p ; y_p\right) \quad \Leftrightarrow \quad P\left[\frac{x_A + r\,x_B}{1+r} ; \frac{y_A + r\,y_B}{1+r}\right]$$

Exemplo

Dados os pontos A (3; -4), B (12; 8). Determinar as coordenadas do do P que dividem AB na razão $|AP| = 6|PB|$

Resolução:

Sabe-se que r = 6

Substituíndo as coordenadas de P teremos:

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-6+6.2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{4+6.(-3)}{7} = -2$$

Logo: $P\left(\frac{6}{7};-2\right)$

5. $|AC|$

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$$

$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$M_{|AC|}(-4;-1)$$

$|AB|$

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

$$M_{|AB|}\left(\frac{3}{2};5\right)$$

$|BC|$

$$x_P = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_P = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$M_{|BC|}\left(\frac{1}{2};4\right)$$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

As coordenadas do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes são dadas por:

$$P(x_p;y_p) \quad \Leftrightarrow \quad P\left[\frac{x_A + r\,x_B}{1+r};\frac{y_A + r\,y_B}{1+r}\right]$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Dados os pontos A (3; -4) e B (12; 8) 'calcule as coordenadas do ponto P tais que:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 3\left|\overrightarrow{PB}\right|$$

Como r = 3 então

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{3+3.12}{1+3} = \frac{39}{4}$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{-4+3.8}{1+3} = 5$$

Logo P (39/4,5)

b) $\left|\overrightarrow{PB}\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{PA}\right| \qquad r = \frac{1}{4}$

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{3+\frac{1}{4}.12}{1+\frac{1}{4}} = \frac{24}{5}$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{-4+\frac{1}{4}.8}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}$$

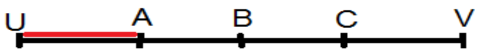
Logo: P (24/5; -8/5)

2. Dados os pontos U (-5; 18) e V (15; 6). Determinae as coordenadas dos pontos A, B e C que dividem o segmento UV em partes iguais.

Resolução: U______________________________V

É necessário achar a razào r em cada caso

1° caso fórmula $\left|\overrightarrow{UA}\right| = r\left|\overrightarrow{AV}\right| \quad \Rightarrow r = \dfrac{1}{3}$



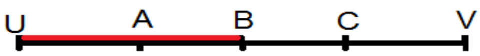
U________________________________V

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-5+\frac{1}{3}.15}{1+\frac{1}{3}} = 0$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{18+\frac{1}{3}.6}{1+\frac{1}{3}} = 15$$

Logo: A (0 ; 15)

2º caso: formula $\left|\overrightarrow{UB}\right| = r\left|\overrightarrow{BV}\right| \quad \Rightarrow 2 = r.2 \Rightarrow r = 1$



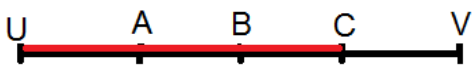
U ________________________________V

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-5+15}{2} = 5$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{18+6}{2} = 12$$

Logo: B (5; 12)

3º caso: fórmula $\left|\overrightarrow{UC}\right| = r\left|\overrightarrow{CV}\right| \quad \Rightarrow 3 = r.1 \;\Rightarrow r = 3$



U______________________________V

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-5+3.15}{4} = 10$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{18+3.6}{4} = 9$$

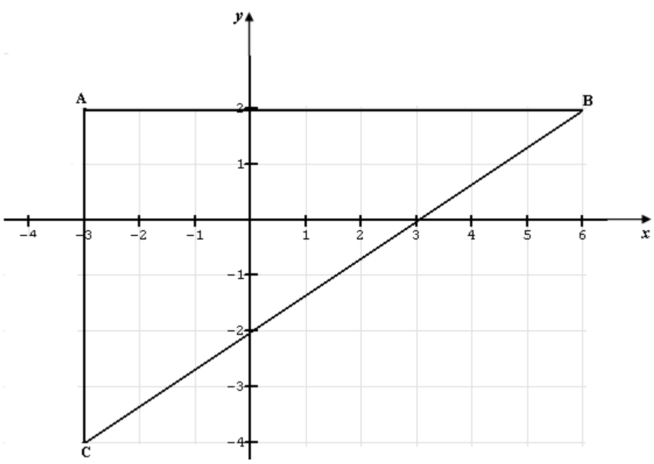
Logo: C (10; 9)

3. Marque no sistema cartesiano Ortogonal (S.C.O) os seguintes

Pontos: A (-3; 2): B (6; 2) e C (-3 ; -4)

Classifique o triângulo obtido quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Resolução:



Resposta: Quanto aos lados é triângulo escaleno

Pois, $|AB| \neq |BC| \neq |AC|$ Como chegou a esta resposta

Quanto aos ângulos é triângulo rectângulo pois $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$

Se M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$, determine $\overline{AM}$.

Resolução:

1° Passo

Calcular as coordenadas do ponto M pelas expressões dadas para o efeito, considerando a razão igual a 1 porque M é ponto médio do segmento

Assim:

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{-4+2}{2} = -1$$

Logo: M (3/2 ; -1)

2° Passo

Achar $\overline{AM}$ através da fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distância entre dois pontos no plano S.C.O

$$|AM| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AM| = \sqrt{\left((-3) - \frac{3}{2}\right)^2 + (2+1)^2}$$

$$|AM| = \sqrt{\frac{81}{4} + 9}$$

$$|AM| = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}$$

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Dados os pontos A (3; -4) e B (12; 8), determine (xp; y_p), tal que;

$a)\ \left|\overline{AP}\right| = 3\left|\overline{PB}\right|$ $\qquad b)\ \left|\overline{PB}\right| = \frac{1}{4}\left|\overline{PA}\right|$

2. Sendo A (-6; 14) e B (m; n) determine m, n para que o ponto

P (-1; 4) divida $\overline{AB}$ na proporção $|AP| = 2|PB|$

3. Determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$ se $A(1;3)$ $B(-1;7)$

4. M é o ponto médio de AB.Determine as coordenadas do ponto A, se $M(-1;1)\ e\ B(2;3)$

5. São dados os pontos A (0;5) B(3; 5) e C(-2; 3).

   Determine as coordenadas do ponto médio de cada um dos segmentos que se seguem:

   $\overline{AB};\ \overline{AC};\overline{CB}$.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 7

Equação geral da recta

Introdução

Nesta lição, você vai relaxar pois, a matéria é facílima.

Não se atrapalhe porque já possui bons requisitos para entender com facilidade os conteúdos da lição.

Fez o estudo da função linear ou função do primeiro grau, mesmo assim vamos resolver alguns exercícios para que se recorde.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

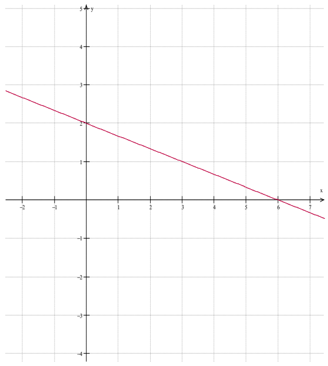
Objectivos

- *Expliar* o significado dos coeficientes **a** , **b** e **c** na expressão analítica da recta.
- *Determinar* a equação geral da recta.
- *Determinar* equação reduzida da recta.

Equação geral a recta,

Caro estudante, sabe que o gráfico da função é uma recta cuja inclinação e os pontos de intersecção com os eixos coordenados (SCO) depende dos coeficientes da expressão que representa a função.

Por exemplo:



Sabendo que a forma geral da função linear é f(x)= y= ax+b reflicta e responda as questões para o gráfico representado:

a) Quais são os coeficientes na expressão anlítica do gráfico representado? $-\frac{1}{3}$

b) Qual é o valor b? b é igual a 2

c) Porquê é que a recta não passa pela origem? Porque b é diferente de zero

d) Quais os valores de x que anulam a função? x é igual a 6

e) Qual é expressào analítica? $f(x) = -\frac{x}{3} + 2$

Isso mesmo, você está recordado sobre a matéria, podemos a partir daqui falar da equação da recta:

A equação geral da recta é uma expressão do tipo:

$\boxed{ax + by + c = 0}$ Onde a, b e c perctencem a R

Exemplo: $-4x + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow a = -4;\ b = 1\ c = -2$

2x + y = 0 --------------- (c = 0)

y = 3 --------------------- (a recta é paralela ao eixo dos x)

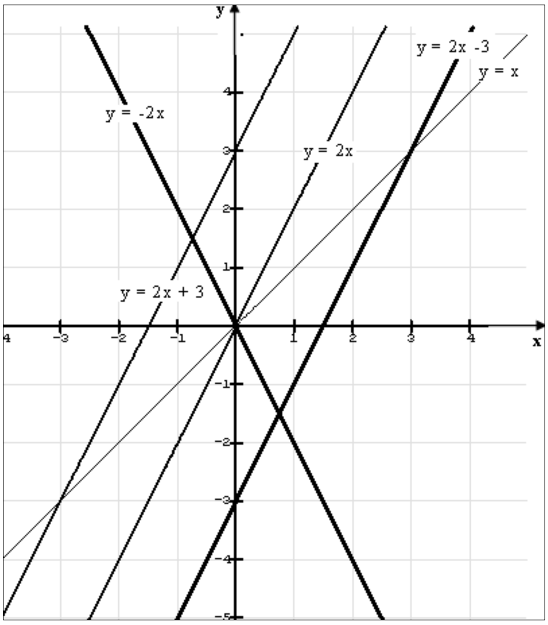
x = -2 (a recta é paralela ao eixo dos y)

Se b = 1 a equação geral da recta reduz-se à forma:

y= ax + c chama-se forma reduzida da recta

Significado dos coeficientes a e c

Você já conhece o significado destes coeficientes na equação, apenas para recordar, faça a representação gráfica das funções que se seguem no mesmo S.C.O



y = x , y = 2x , y = 2x + 3 y = -2x e y = 2x -3

Pela leitura dos gráficos

c = 0

c = 0

c = 3

c = 0

c = 3

c = -3

c chama-se ordenada na origem

Os ângulos de inclinação variam conforme o valor e sinal de a

Se a> 0 ---------------- $\alpha \in$ IQ (alfa pertence ao primeiro quadrante) e f(x) é crescente

Se a < 0 ------------------- $\alpha \in$ IIQ (alfa pertence ao Segundo quadrante) e f(x) decrescente

<u>**a**</u> chama-se declive ou coeficiente angular e representa-se pela letra <u>m</u>

também é definido como tg α

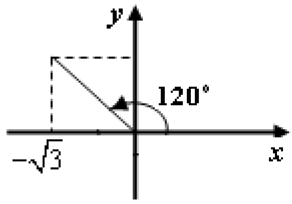
m = a =tg α = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Exemplo$_1$: Determinar m da recta que forma com o eixo *ox* um ângulo de 30˚.

Fácil, m = tg α = tg30˚

Supondo que o ângulo é de 120˚ (pertence ao II quadrante)

Teremos que fazer as transformações trigonométricas que já são do seu domínio.



m = tg120˚= tg (180˚ – 60˚) = -tg60˚ = $-\sqrt{3}$

E pronto.

Vamos fazer o resumo da matéria que acabamos de ver, para resolver mais exemplos.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

A equação geral da recta é dada pela expressão:

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{com } a = 0 \text{ e } b = 0 \quad m = -\frac{a}{b} \qquad c" = -\frac{c}{b}$$

equação geral da recta reduz-se para b=1 à forma:

y=ax +b equação reduzida da recta

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Indicar o declive e a ordenada na origem nas seguintes rectas

   a) y = 8x – 5   b) 2x = 4y + 1

Resolução

a) y = 8x – 1

$$8x - y - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = \frac{-8}{-1} = 8$$

b) 2x = 4y + 1

$$2x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

2. Qual é o valor de k para que o declive da recta -3x + ky – 5 = 0

   Seja $\frac{1}{4}$?

Resolução:

-3x + ky – 5 = 0

$$\Rightarrow ky = 3x + 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+5}{k} \quad \Leftrightarrow y = \frac{3}{k}x + \frac{5}{k} \Leftrightarrow \quad \frac{3}{k}x - y + \frac{5}{k} = 0$$

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{-\frac{3}{k}}{-1} = \frac{3}{k} \qquad e \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{k} \quad \text{teremos}$$

Resposta K = 12

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determine m da recta que forma com o eixo ox o ângulo de:

   a) 45°

   b) 120°

2. Indique o declive e a ordenada na origem das rectas:

   a) $y = 8x-1$ b) $2x = 4y-10$ c) $-3x+5-2y = 0$

3. Determine o declive da recta que passa pelos pontos:

   a) $A(0;0)$ e $B(1;3)$
   b) $A(2;0)$ e $B(5;6)$

4. Qual é o declive da recta que divide o terceiro quadrante em dois ângulos iguais?

5. Qual é o ângulo que a recta forma com o eixo OX passando pelos pontos

   a) A (3; 1) e B (5; 3)

   b) A ($-2\sqrt{3}$; 5) e B ($-\sqrt{3}$; 4)

6. Determine a equação reduzida da recta que passa pelo ponto:

   a) (5 ; 0) e tem declive 3.

   b) (-3 ; 1) e tem inclinação de 45°

7. Escreva a equação reduzida e geral da recta cujo coeficiente ângular e a inclinação são -2 e 60°.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 8

Equaçã da recta dados um ponto e o seu declive

Introdução

Você já domina o conceito de declive de uma recta, vamos deduzir a partir deste, a equação da recta sendo dados um ponto e o seu declive

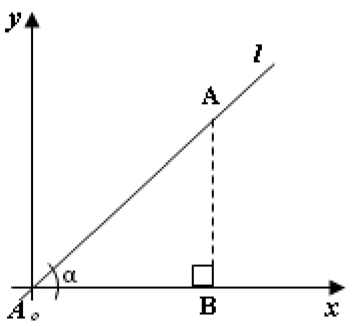
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Determinar* a equação da recta dados um ponto, e o seu declive.

Equação da recta dados um ponto e seu declive

Você já domina o conceito de declive de uma recta vamos deduzir a partir deste, a equação da recta sendo dados um ponto e o seu declive:



Consideremos qualquer recta no plano e nela é dado o ponto A $(x_0; y_0)$

Se o triângulo A0B é rectângulo então $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_0B}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$ Da equação anterior se pode deduzir que:

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

Conclusão: Esta é equação da recta que passa por um ponto sendo dado o seu declive m.

Prossigamos

Consideremos agora alguns exemplos:

Escreva a equação da recta que passa por A (1;5) com declive igual a 2.

Muito simples, na equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ (1)

Vamos substituir os valores conhecidos

Dados $x_0 = 1$, $y_0 = 5$ $m = 2$

Então: da expressão (1) teremos: $y - 5 = 2\,(x - 1)$

Reduzir a equação à forma canónica da equação geral da recta

$y - 5 = 2x - 2 \rightarrow y - 5 - 2x + 2 = 0 \rightarrow y - 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x - y + 3 = 0$

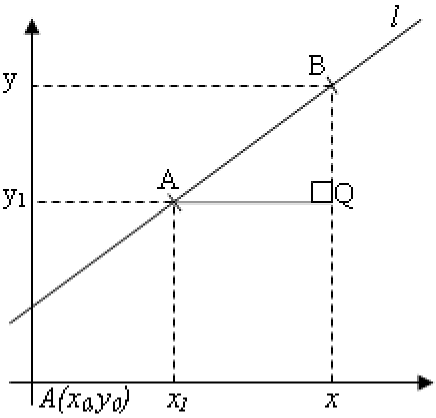
$$\boxed{2x - y + 2 = 0}$$

Forma canónica da equação geral da recta

No caso em que são dados dois pontos da recta, teremos uma nova equação, a saber:

Equação da recta que passa por dois pontos dados

Considere a figura



São dados dois pontos da recta $A_0(x_0;\, y_0)$ e $A_1(x_1;\, y_1)$ da recta considerada.

O declive desta recta sera dada pela expressão:

$$tg\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_0B}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m \qquad (1)$$

Na equação $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$

Podemos substituir o declive m pela expressão (1) terá:

$$y_1 - y_0 = m\left(x_1 - x_0\right) \Leftrightarrow y_1 - y_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0}\left(x_1 - x_0\right)$$

Que também pode ser escrita na forma mais cómoda como:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad (2)$$

Esta é a forma mais usual de escrever a equação da recta que passa por dois pontos dados.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O declive ou coeficiente angular representa-se por
  $$m = a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- A Equação da recta que passa por um ponto $P_0\left(x_0\,;y_0\right)$ sendo dado o seu declive é dada pela expressão: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

A equação da recta que passa por dois pontos é dada pela

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Qual é a equação da recta que passa pelos pontos A (2; 0) e B (0;6)

Resolução:

Muito simples, basta identificar as coordenadas dos pontos dados $x_0 = 2$

$y_0 = 0$, $x_1 = 0$ $y_1 = 6$ e substituí-las na expressão (2) teremos:

Equação

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-2}=\frac{6-0}{0-2} \Leftrightarrow -2y=6(x-2) \Leftrightarrow -2y-6x+12=0$$

Lindo, mais um exemplo

Determinar o ângulo que a recta que pssa pelos pontos A (-3; 2)

B (7; -3) forma com o eixo ox.

Facílimo, Aplicamos imediatamente a expressão que nos dá a definição do declive da recta. Assim:

$$\alpha = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{-3-2}{7+3} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$m = tg\alpha$

Se $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ estamos à procura da medida do ângulo alfa, este

Será $\alpha = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Logo $\alpha = 150^\circ$ e $30'$

Agora chegou o momento de medir o seu grau de compreensão da material. De certeza, leu com atençao os conteúdos da lição a seguir resolva os exercícios que se seguem:

Avaliação

Avaliação

1. Escreva a equações das rectas que passam pelos pontos A e B sendo:

$$a)A\left(0;\frac{2}{3}\right) \quad e \; B\left(1;\frac{5}{2}\right)$$

$$b)A(1;-3) \quad e \quad B(4;0)$$

c) A (1, -3) e B (4, 0)

2. Determine o declive da recta definida pelas equações:

$$x=1-3t \quad e \quad y=2+t$$

3. Escreva a equação reduzida da recta que contém o ponto *P(2;3)* e tem declive igual a 3.

4. Determine a equação reduzida de cada uma das rectas:

a) 2x -3y+7=0

b)Tem declive 3 e passa por *Q (-2; 1)*

5. Determinar as equações gerais das rectas que:

a) Passa por A (-2; 5) e tem a direcção de $\vec{u}(-2;1)$

b) Passa por (5; -1) e (3; 2)

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 9

Posição relativa de duas rectas no plano

Introdução

O nosso tema nesta lição vai ser sobre posições que as rectas podem tomar no plano. Mais tarde, você vai estudar a posição de rectas no espaço por isso não pare po aqui para saber mais.

As rectas no plano podem ser perpendiculares, paralelos, coincidentes, concorrentes. Vamos primeiro recordar lhe estes conceitos. Depois iremos avançar para outras novidades sobre a posição de duas rectas no plano.

O objectivo da nossa lição, é estudar as relações entre os declives das rectas, considerando as diferentes posições que elas podem tomar no plano.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

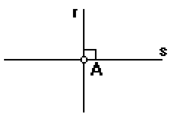
Objectivos

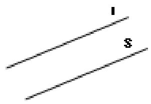
- *Determinar* declive duma recta a partir da sua expressão analítica.
- *Determinar* o ângulo formado por duas rectas aplicando as condições definidas para diferentes posições que as rectas podem tomar.
- *Determinar* equação duma recta dada a expressão analítica de uma outra que é perpendicular ou paralela à recta dada. .

Posição relativa de rectas no plano

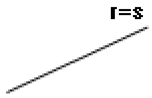
__**conceitos elementares sobre a posição de rectas no plano**__:

Rectas perpendiculares – são aquelas que se intersectam formando ângulos rectos.



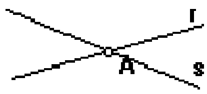


Rectas paralelas – são aquelas que não se intersectam e mantem a distância entre elas.



Rectas coincidentes – são aquelas que se sobrepõem.

Rectas concorrentes – são aquelas que se intersectam formando ângulos diferentes.



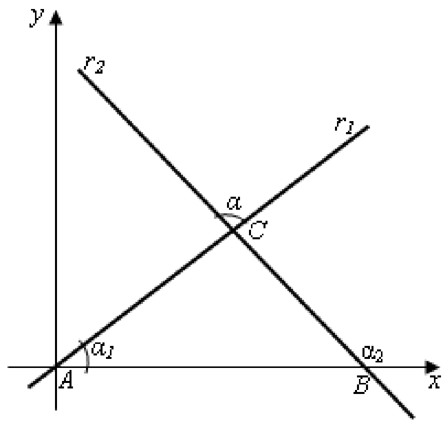
Vamos primeiro definir o angulo entre elas

Definição

Chama-se ângulo entre duas rectas ao menor ângulo não negativo que elas determinam no plano.

E como se determinar a medida do ângulo formado por estas rectas e qual será a relação entre os seus declives considerando as diferentes posições no plano?

Consideremos a figura e observe as rectas: r_1 e r_2 que formam entre si o ângulo alfa.



α_1 e α_2 são ângulos formados pelas rectas e o eixo *ox*

α é ângulo entre as duas rectas r_1 e r_2

α_2 é o ângulo externo no triângulo ABC ,logo a sua medida é igual a soma dos dis ângulos internos não adjacentes,este teorema você já demonstrou nas classes anteriores.

$$\alpha_1 + ACB = \alpha_2$$

Donde se pode deduzir que $\alpha = ACB$ porque são opostos pelo vértice, assim: $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

Aplicando a razão trigonométrica tangente nos dois membros teremos:

$$tg\alpha = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)$$

A tangente da diferença de dois ângulos é dada pela fórmula

$$tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 . tg\alpha_2}$$

Ou simplesmente

$$tg\alpha = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 . tg\alpha_2}$$

Esta fórmula trigonométrica também que já é do seu domínio permite-nos determinar a medida do ângulo entre duas rectas quaisquer no plano.

Por outro lado, sabe-se que: $tg\ \alpha_1 = m_1$ e $tg\ \alpha_2 = m_2$ fazendo a substituição na fórmula acima teremos:

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2}$$

Consideremos agora as diferentes posições para estudar a relação entre os seus declives

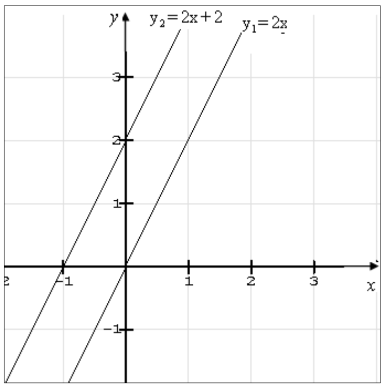
Dadas duas rectas quaisquer dadas pelas equações:

y_1 : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ou $y = a_1x + b_1$ (equação reduzida)

y_2 : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ou $y = a_2x + b_2$ (equação reduzida)

1. Rectas paralelas

O ângulo entre as rectas paralelas é de 0°



Consideremos os gráficos de $y_1 = 2x$; $y_2 = 2x + 2$ a relação entre os

Declives será: 2x – $y_1 = 0$ e $2x - y_2 - 2 = 0$

m1 = 2 e m_2 = 2

Conclusão:

$\boxed{m_1 = m_2}$ Chama-se condição de paralelismo de duas rectas

Por outro lado, os vectores associados às direcções destas rectas serão colineares isto é, se

$\vec{a}(a_1;a_2)$ e $\vec{b}(b_1;b_2)$

e se tiverem a direcção da recta b e elas sào paralelas se e só se :

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

2. Rectas coincidentes

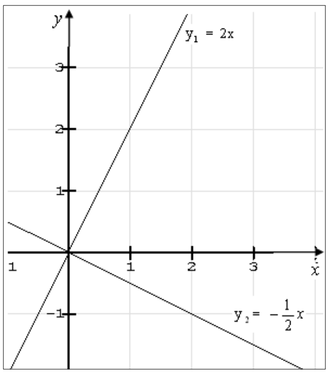
O ângulo entre as rectas coincidentes é um ângulo nulo.

Trata-se de um caso particular de rectas paralelas logo terão declives iguais e coeficientes angulares iguais.

$\mathbf{m_1 = m_2}$	**e**	$\mathbf{c_1 = c_2}$

3. Rectas perpendiculares

O ângulo entre duas rectas perpendiculares, é igual a 90°



Observe os gráficos de $y_1 = 2x$ e $y_2 = -\frac{1}{2}x$ Os seus declives são

$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$ para $2x - y_1 = 0$

A que conclusão se pode chegar?

A relação entre os declives pode ser dada por:

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ Ou $m_1 \, . \, m_2 = -1$

Chama-se **condição (critério) de perpendicularidade** das duas rectas

Isto é, duas rectas são perpendiculares se e só se o produto dos seus declives igual a menos um (-1).

Por outro lado, os vectores associados às direcções destas rectas terão o produto interno nulo (igual a zero).

Isto é, se $\vec{a}(a_1;a_2)$ e $\vec{b}(b_1;b_2)$ então:

Aplicando a definição do produto de vectores

$$(a_1;a_2).(b_1;b_2)=0 \quad \Leftrightarrow a_1.b_1+a_2b_2=0 \quad \text{ou} \quad a_1.b_1=-a_2b_2$$

4. Rectas concorrentes

As rectas concorrentes pela definição formam ângulos diferentes entre si

Consequentemente terão declives diferentes

Portanto: $m_1 \neq m_2$

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Duas rectas 1e 2 são coincidentes se $m_1 = m_2 \quad \wedge \quad c_1 = c_2$

Duas rectas 1 e 2 são concorrentes se $m_1 \neq m_2$

Duas rectas 1 e 2 são paralelas se m1=m2 (condição de paralelismo)

Duas rectas a e b são paralelas sse os vectores associados às suas direcções forem colineares $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Duas rectas 1 e 2 são perpendiculares se $m_1 . m_2 = -1$ (condição de perpendicularidade)

Duas rectas a e b são perpendiculares sse os vectores associados ãs suas direcções têm o produto interno igual a zero. $a_1 . b_1 + a_2 . b_2 = 0$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Determinar a equação da recta s perpendicular à recta r , cuja equação é 2x + 3y = 5 que passa pelo ponto A(1 ; -2).

Resolução:

1. Passo: Calcular o declive mr da recta cuja equação é conhecida.

Se r: 2x + 3y – 5 = 0 $\quad m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$

2. Passo: s e r são rectas perpendiculares logo

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \quad \text{ou} \quad m_s . m_r = -1$$

Assim,

$$m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

3. Passo: Já temos m e o ponto por onde passa a recta s A (1;-2)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y + 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$
$$2y + 4 = 3x - 3$$
$$3x - 2y - 7 = 0$$

Esta é a equação da recta s.

2. Determinar k na equaçào 3x – (2k + 1) y + 2k = 0 de modo que a recta representada:

a) Passe pelo ponto (3; - 1)

b) Seja paralela à recta 3x + 5y = 0

Resolução:

a) Basta substituir x e y na equação pelas coordenadas do ponto dado teremos:

$3 - (2k + 1).(-1) + 2k = 0$

$9 + 2k + 1 + 2k = 0$

$4k = -10$

$K = -5/2$

b) $m_1 = m_2$ Pela condição de paralelismo, logo:

$3x + 5y = 0$ $\quad m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}$

$3x - (2k + 1)y + 2k = 0$ $\quad m_2 = -\frac{a}{b} = \frac{3}{2k} + 1$

Então:

$$-\frac{3}{5} = \frac{3}{2}k + 1 \quad \Rightarrow \quad -6k - 3 = 15$$

$$-6k = 15 + 3$$

$$k = \frac{18}{-6} = -3$$

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determine k na equação 3kx + y – 2ky + k + 2= 0 de modo que a recta

Representada:

   a) Seja paralela à recta 3x – y =- 5

   b) Contenha a origem

2. Uma recta l passa por (2; -3) e é paralela à recta m: y = -2x + 10 = 0

   Determina a expressào analítica da recta l.

3. Encontre a equação da recta que passa por (2; 3) e é perpendicular à recta y = 2/3x + 1

4. Diga qual é a posição das rectas definidas pelas equações abaixo.

a) y = 2x – 1	b) 3x + y – 1 = 0
4x -2y + 8 = 0	2x + 3y – 12 = 0

5. Uma recta l passa por (2;-3) e é paralela à recta m tal que y=-2x+10.

   Determine a expressão analítica da recta l.

6. Encontre a equação da recta que passa por (2;3) e é perpendicular à recta y=2/3x+1.

7. Obter a equação da recta l perpendicular que passa por (4;1) e é perpendicular à recta m que passa pelos pontos (-1;0) e (3;- 2).

8. Determine m e n para que sejam coincidentes as rectas 2x-3y-6=0 e mx+ny+18=0.

9. Determine caso exista o ponto de intersecção das rectas

a) -3x+y-1=0	b) x-y+5=0	c) x-y-2=0
2x-y+3=0	3x-2y+10	x+y=8

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 10

Equação da Bissectriz

Introdução

Nas classes anteriores ou mesmo nas aulas da disciplina de Desenho aprendemos a construir a bissectriz sem no entanto nos preocupar com a equação que produz essa bissectriz, nesta lição vamos determinar a equação da bissectriz de um ângulo qualquer, espero que ainda se recorde como se define uma bissectriz de um ângulo, se não vamos recordar.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Determinar* a equação da bissectriz de um ângulo.

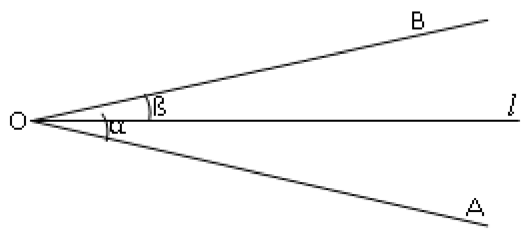
Objectivos

Equação da Bissetriz

Antes de mais nada vamos definir a bissectriz de um ângulo

Definição

Chama-se bissectriz de um ângulo ao segmento que devide um ângulo dado em duas partes iguais. Veja a figura a baixo:



$\alpha = ß$

A nossa tarefa é encontrar a equação da bissectriz de um ângulo formado por duas rectas.

São dadas duas rectas cujas as equações:

R: ax + by + c = 0

S: a’x + b”y + c” = 0

Como determiner as bissectrizes dos ângulos que elas formam entre si?

Como conhecemos a equação que nos permite calcular a distância de um ponto à uma recta dada

$$(1)\ d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Mas quando a recta é dada na forma geral ax + by + c = 0 a distância de um ponto à uma recta será dada por:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Simples, preste atenção, bastará que um ponto p (x; y) pertencente à bissctriz do ângulo esteja à mesma distância em relação as duas rectas, portanto:

$$d_1 = d_2$$

$$d_1=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d_2$$

Esta equação pode se desdobrar em duas:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a^{'}x_0+b^{'}y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou}$$

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{|a^{'}x_0+b^{'}y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Correspondendo cada uma à sua bissectriz

Pronto, vamos fazer um pequeno resumo

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A definir a bissectriz de um ângulo como o segmento que devide um ângulo dado em duas partes iguais.

- A equação para determinação da equação da bissectriz de um ângulo desdobra-se em duas partes:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a' x_0+b' y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou}$$

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{|a' x_0+b' y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Defina analiticamente as rectas que bissectam os ângulos determinados pelas rectas 3x -4y = 2 e 4x + 3y = 11

Resolução:

$d_1 = \ d_2$

$$\frac{|3x-4y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4x+3y-11|}{\sqrt{9+16}}$$

$$|3x-4y-2| = |4x+3y-11|$$

Esta igualdade implica que se estabelece a que

$|3x-4y-2| = |4x+3y-11|$

Assim: 3x – 4y -2 = 4x + 3y – 11

3x – 4y – 2 – 4x – 3y + 11 = 0

-x - 7y + 9 = 0

x + 7y – 9 = 0

Ou:

$$\frac{|3x-4y-2|}{\sqrt{9+16}} = -\frac{|-4x+3y-11|}{\sqrt{9+16}}$$

Donde se concluir que: 3x – 4y – 2 = - (4x + 3y – 11)

3x – 4y – 2 = 4x – 3y + 11

3x -4y – 2 + 4x + 3y – 11 = 0

7x –y – 13 = 0

Vamos verificar a nossa solução

Como as duas bissectrizes devem ser perpendiculares e o ponto de ntersecção pretence as duas rectas.

b_1 : x + 7y – 9 = 0 e b_2 : 7x – y – 13 = 0

$$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{7} \qquad m_2 = -\frac{a}{b} = 7$$

Logo: $m_1.m_2 = \frac{-1}{7}.7 = -1$ (c.q.d) pela condição de

Perpendicularidade

Calculemos o ponto de intersecção resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x+7y-9=0 \\ 7x-y-13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9-7y \\ x=\dfrac{13+y}{3} \end{cases} \Rightarrow 9-7y=\frac{13+y}{7}$$

$$63-49y=13+y \Rightarrow -49y-y=13-63 \Rightarrow -50=-50$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=9-7=2 \end{cases}$$

Conclusão: o ponto de intersecção tem como coordenadas P (2; 1)

2. Achar as equações das bissctrizes dos ângulos formados pelas rectas l: 3x + 4y = 0 e t: x = 0

Resolução:

$d_1 = d_2$

$$\frac{|3x+4y|}{\sqrt{9+16}} = x \quad v \quad \frac{|3x+4y-11|}{\sqrt{9+16}} = -x$$

3x + 4y = 5x V 3x + 4y = -5x

-2x + 4y = 0/ : (-2) V 8x + 4y = 0 / : 4

X – 2y = 0 ou 2x + yb = 0

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determinar as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas r: $3x + 4y + 3 = 0$ e s : $4x + 3y = -5$.

2. Achar as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas

   r : $3x – 4y \quad y = -1$ e s : $4x – 3y = 1$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 11

Mediatriz de um segmeto

Introdução

Caro estudante, deve se recordar de certeza da definição da mediatriz de um segmento

É claro, que já definiu várias vezes da seguinte maneira:

Dado um segmento AB chama-se mediatriz do segmento AB à recta perpendicular a este segmento e que passa pelo seu ponto médio.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Determinar* a equação da mediatriz de um segmento.

Mediatriz de um segmento

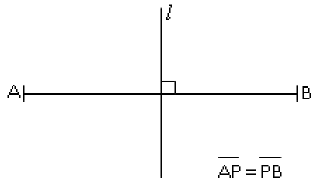
Você deve se recordar da definição da mediatriz de um segmento

Definição

Mediatriz de um segmento

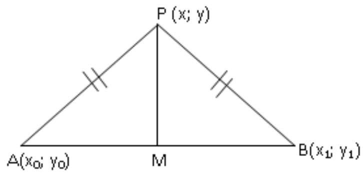
É claro, que já definiu várias vezes da seguinte maneira:

Dado um segmento AB chama-se mediatriz do segmento AB à recta perpendicular a este segmento e que passa pelo seu ponto médio.



Agora a nossa tarefa é deduzir a equação para esta m, ediatriz siga co atenção os passos seguintes

Considerando o triângulo ABP temos que



$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

$$\left|P - A\right| = \left|P - B\right|$$

$$\left|(x - x_0);(y - y_0)\right| = \left|(x - x_1);(y - y_1)\right|$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}$$

É a equação que nos permite calcular a equação da mediatriz de um segmento.

Resumo

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

É claro, que já definiu várias vezes da seguinte maneira:

Dado um segmento AB chama-se mediatriz do segmento AB à recta perpendicular a este segmento eque passa pelo seu ponto médio.

$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}$$

É a equação que nos permite calcular a equação da mediatriz de um segmento.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Determine analiticamente a mediatriz do segmento AB sendo A (-2; 1) e B (4; -5)

Resolução

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2}$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x-4)^2+(y+5)^2$$
$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=x^2-8x+16+y^2+10y+25$$
$$4x-2y+5=-8x+10y+41$$
$$12x-12y-36=0 \quad /:12$$

$$\boxed{X-y-3=0}$$

Outro procedimento:

1. **Passo:** Encontrar a recta que passa por A e B

$$M_x=\frac{-2+4}{2}=1$$
$$M_y=\frac{1-5}{2}=-2$$
$$M(1;-2)$$

2. **Passo:** Determinar a recta perpendicular ao segmento passando pelo ponto médio do segmento;

$$\frac{y-1}{x+2}=\frac{-5-1}{4+2}=\frac{-6}{6}\Leftrightarrow\frac{y-1}{x+2}=-1\Rightarrow x+2=-y+1$$

r: $x+y+1=0$

$s\perp r$ passando por $M(1;-2)$ $\Rightarrow m_s=1$

$$y+2=1(x-1)$$
$$y=x-1-2$$
$$y=x-3 \quad \text{ou} \quad x-y-3=0$$

1.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-10y+25$$
$$-2x+8y+19=0$$
$$2x-8y-19=0$$

R: 2x – 8y + 19 = 0

2.

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$x^2+8x+16+y^2-6x+9=x^2-4x+4+y^2-6x+9$$
$$12x+12=0$$
$$x+1=0$$

R: x = -1

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. Determine uma equação da mediatriz do segmento AB sendo A(3 ; 1) e B (2 ; 5)

2. Determine uma equção da mediatriz do segmento PQ, sendo P(-4 ; 3) e Q (2 ; 3).

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Soluções Módulo 1

Soluções do Modulo 1

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

Lição 1

1.Definições

- ✓ Vectores colineares são vectores que estão na mesma linha de acção e também são paralelas, vectores simétricos têm a mesma direcçào, o mesmo módulo e sentidos opostos.
- ✓ Grandezas escalares são dadas por um número associado a unidade de medição correspondente ex: 5kg de arroz
- ✓ Grandezas vectoriais são grandezas que se apresentam um sentido, direcção e módulo. Ex: o campo magnético na física, velocidade, e força.

2.Relação entre vectores

- ✓ **Vectores opostos (simétricos)** - são vectores que têm o mesmo ponto de aplicação a mesma direcção, mesmo módulo e sentidos contrários.
- ✓ Vectores paralelos Para os 2 vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ que não são nulos, se as direcções são mesmas e os sentidos são mesmos ou inversos, podemos dizer que $\vec{a}$ é paralelo ao $\vec{b}$,e escrevemos $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- ✓ **Vectores colineares-** são vectores que estão sobre a mesma linha de acção (os vectores paralelos são colineares).
- ✓ **Vectores coplanares-** São vectores estão sobre o mesmo plano ou em planos paralelos

Lição 2

1 a) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{(-2-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{41}$

2 A (-2 ; 1) e B (3 ; 3)

Lição3

1. a)

$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{i} + 3\vec{j} = 4\vec{i} + 0\vec{j} = 4\vec{i}$

b)

$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{b} - \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - (-\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{i} + 3\vec{i} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$

2. $\sqrt{2}\left(-2; \sqrt{8}\right) = \left(-2\sqrt{2}; 4\right)$

3. a) (3; 12) b) (12 ; 0)

Lição 4

1 $a)$ $\left|\vec{a}\right| = 8$ $\left|\vec{b}\right| = 5$ $\alpha = 180^0$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\alpha = 8.5(-1) = -40$$

$b)$ $\left|\vec{a}\right| = 7$ $\left|\vec{b}\right| = 2$ $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\alpha = 7.2\cos\frac{3\pi}{2}. = 14\cos\frac{3\pi}{2}$$

$c)$ $\left|\vec{a}\right| = 3$ $\left|\vec{b}\right| = 6$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\alpha = 3.6\cos\frac{\pi}{3} = 3.6.\frac{1}{2} = 9$$

$d)$ $\left|\vec{a}\right| = 3$ $\left|\vec{b}\right| = 6$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \sqrt{18}$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\alpha \Rightarrow \sqrt{18} = 3.\,6\sqrt{3}\,.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow .\cos\alpha = \frac{\sqrt{18}}{3.\,6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{3.6\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = ar\cos\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2. $(2;1)(2;4) = \sqrt{2^2+1^2}\,.\sqrt{2^2+4^2}\,\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{2^2+1^2}\,.\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = ar\cos\frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 37^0$$

3. a) $(-2;2)(2;2) = \sqrt{(-2)^2+2^2}\,.\sqrt{2^2+2^2}\,\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{32}{\sqrt{2^2+2^2}\,.\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{32}{\sqrt{64}} = \frac{32}{8} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = ar\cos 4 \Rightarrow \alpha = 90^0\ ?$$

3.b) $(0;1)(1;3)=\sqrt{0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}\ \cos\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=ar\cos\frac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=18^0 45'$$

Lição5

1. Para que os dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ seja perpendiculares , o produto interno $\vec{a}\cdot\vec{b}$ deve ser nulo (igual a zero $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$)

2. a) k = -3 b) k = 2 --- v(6 ; - 8)

   c) k = 5/8---- w (0 ; 5)

$$\vec{u}=-3\vec{w}\Rightarrow\vec{u}(-3;4)=-3\left(1;-\frac{4}{3}\right)=-3\vec{u}\Rightarrow k=-3$$

$\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares

$$\vec{v}=k\vec{u}\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=k\left|\vec{u}\right|\Rightarrow 12=k\sqrt{(-4)^2+3^2}\Rightarrow 12=k.5$$

$$\Rightarrow k=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow\vec{v}=\frac{12}{5}(-4;3)=\left(-\frac{48}{5};\frac{36}{5}\right)\quad\text{ou}\quad\left(\frac{48}{5};-\frac{36}{5}\right)$$

c) $\begin{cases} \overrightarrow{w} = k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \\ \left|\overrightarrow{w}\right| = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{w} = k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \\ \left|\overrightarrow{w}\right| = k\left|(0;8)\right| \end{cases} \Rightarrow 5 = k\sqrt{8^2} \Rightarrow$

$k = \frac{5}{8}$ mas

$\begin{cases} \vec{u}(-3;4)+\vec{v}(3;4) \\ \vec{u}+\vec{v} = (0;8) \end{cases}$ logo $\overrightarrow{w} = k(0;8) \Rightarrow \overrightarrow{w} = \frac{5}{8}(0;8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{w}\ (0;5)$

3. $\overrightarrow{v} = k\vec{u} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v}\right| = k\left|\vec{u}\right|$

$\Rightarrow 12 = k\sqrt{(-4)^2+3^2} \Rightarrow 12 = k.5 \Rightarrow k = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow \overrightarrow{v} = \frac{12}{5}(-4;3) = \left(-\frac{48}{5};\frac{36}{5}\right)$ ou

$\left(\frac{48}{5};-\frac{36}{5}\right)$

4. $(4;3)$ perpendicular a $(3;-4)$ porque

$(4;3).(3;-4) = 12-12 = 0$ e $k(4;3) = (4k;3k)$

para $k \neq 0$ trata-se de familia de vectores perpendiculares a $(3;-4)$

como $\left|\vec{u}\right| = 10$ entao $\sqrt{16k^2+9k^2} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{25k^2}\right)^2 = 10^2$

$\Rightarrow 25k^2 = 100$

$\Rightarrow k^2 = \frac{100}{25}$

$\Rightarrow k = \pm 2$

$\begin{cases} \text{para } k = 2 \Rightarrow \vec{u} = 2(3;-4) = (6;-8) \\ \text{para } k = -2 \Rightarrow \vec{u} = -2(3;-4) = (-6;8) \end{cases}$

São também vectores perpendiculares a $\vec{v}$

Pode ser usado um outro caminho para resolver o mesmo problema tambem bastante simples:

$$\begin{cases} (3;-4)\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0 \\ \left|(a;b)\right|=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-4b=0 \\ \sqrt{a^2+b^2}=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=4b \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3}b \\ \frac{16b^2}{9}+b^2=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \frac{25b^2}{9}=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ b^2=\frac{900}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ b=\pm 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3}.6 \\ b=6 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a=\frac{4}{3}.(-6) \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-6 \end{cases} \qquad (-8;-6)$$

Existem dois vectores possiveis perpendiculares a

$(3;-4)$ que sao $(-8;-6)$ e $(-8;-6)$

Lição 6

$$P\left(x_P\,;y_P\right)\Leftrightarrow P\left(\frac{x_A+kx_B}{1+k};\frac{y_A+ky_B}{1+k}\right)$$

$a)\ \left|\overline{AP}\right| = 3\left|\overline{PB}\right|$

$x_p = \dfrac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \dfrac{3+3.12}{1+3} = \dfrac{39}{4}$

$y_P = \dfrac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \dfrac{4+3.8}{1+3} = \dfrac{20}{4} = 5$

$P\left(\dfrac{39}{4};5\right)$

$b)\ \left|\overline{PB}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\overline{PA}\right|$

$x_p = \dfrac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \dfrac{3+\frac{1}{4}.12}{1+4} = \dfrac{24}{5}$

$y_P = \dfrac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \dfrac{-4+\frac{1}{4}.8}{1+\frac{1}{4}} = -\dfrac{8}{5}$

$P\left(\dfrac{24}{5};-\dfrac{8}{5}\right)$

2.

$\mathrm{r}=2$

$x_p = \dfrac{x_A + r\,x_B}{1+r} \Rightarrow -1 = \dfrac{-6+2\mathrm{m}}{1+2} \Rightarrow -3 = -6+2\mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{m} = \dfrac{3}{2}$

$y_P = \dfrac{y_A + r\,y_B}{1+r} \Rightarrow 4 = \dfrac{14+2n}{1+2} \Rightarrow 12 = 14+2\mathrm{n} \Rightarrow 2\mathrm{n} = -2 \Rightarrow \mathrm{n} = -1$

$\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2};-1\right)$

3.

$x_p = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

$y_P = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+7}{2} = 5$

$\mathrm{P}(0;5)$

4. $x_p = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \dfrac{x_A + 2}{2} \Rightarrow x_A = -4$

$y_p = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{y_A + 3}{2} \Rightarrow y_A = -1$

$A(-4; -1)$

5. $|AC|$

$x_p = \dfrac{x_A + x_c}{2} = \dfrac{0-2}{2} = -1$

$y_p = \dfrac{y_A + y_c}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4$

$M_{|AC|}(-4; -1)$

$|AB|$

$x_p = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$y_p = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+5}{2} = 5$

$M_{|AB|}\left(\dfrac{3}{2}; 5\right)$

$|BC|$

$x_p = \dfrac{x_B + x_c}{2} = \dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$

$y_p = \dfrac{y_B + y_c}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$

$M_{|BC|}\left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$

Lição7

1. a) $m = tg45° = 1$

b) $m = tg\ 120° = -\sqrt{3}$

2. a) $8x - y - 1 = 0$ $m = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-8}{-1} = 1$; $c" = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

R: y = 8x – 1 $\quad m = 8$ e $c" = -1$

b) 2x – 4y + 10 = 0 $\quad m = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad c" = -\frac{c}{b} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$

R: 2x – 4y + 10 = 0 $\quad m = ½$ e $c" = 2,5$

c) -3x – 2y +5 = 0 $\quad m = -\frac{a}{b} = \frac{-(-3)}{-2} = -\frac{3}{2} \quad c" = -\frac{c}{b} = \frac{5}{2}$

R: -3x – 2y +5 = 0 $\quad m = -3/2$ e $c" = 5/2$

3. a) $m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{1-0} = 3$

b) $m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-0}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$

4. $m = tg\, 225^\circ = tg\, 45^\circ = 1$

5. a) $m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{5-3_1} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad \alpha = arctg1 = 45^\circ$

b) $m = tg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \alpha = arctg\ -\frac{\sqrt{3}}{3} = 150^\circ$

6. a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = 3(x - 5)$

$y = 3x - 15$

R: y = ax + b $\quad$ y = 3x – 15

b) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = tg45^0(x + 5)$

$y - 1 = x + 3$

$y = x + 4$

R: y = x + 4

7. m = $tg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.2 = \sqrt{3}$

Equação reduzida $y = \sqrt{3}\,x - 2$

Equação geral $\sqrt{3}\,x - y - 2 = 0$

Lição 8

1. $a)\ \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{y-\frac{2}{3}}{x-0} = \frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}{1-0} \Rightarrow \frac{3y-2}{3x} = \frac{15-4}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 18y-12 = 45x-12x \Rightarrow 18y-12 = 33x \Rightarrow$

R: $y = \frac{33}{18}x + \frac{12}{18}$ ou $y = \frac{11}{6}x + \frac{2}{3}$

$a)\ \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{y-\frac{2}{3}}{x-0} = \frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}{1-0} \Rightarrow \frac{3y-2}{3x} = \frac{15-4}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 18y-12 = 45x-12x \Rightarrow 18y-12 = 33x \Rightarrow$

R: $y = \frac{33}{18}x + \frac{12}{18}$ ou $y = \frac{11}{6}x + \frac{2}{3}$

$b)\ \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{2+1}{-1} \Rightarrow \frac{-y+1}{x-1} = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x+3 = y+1 \Rightarrow y = -3x+2$

R: $y = -3x+2$

$c)\ \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{y+3}{x-1}=\frac{0+3}{4-1} \quad \Rightarrow \frac{y+3}{x-1}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y+3=x-1 \Rightarrow \quad y=x\ +4$

R : $y=x\ +4$

2. a) se y = 2 + t então t = y – 2 e x = 1 – 3t então $t=\frac{x-1}{-3}$ logo

teremos:

$$\frac{x-1}{-3}=y-2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x-1}{-3}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y=x-1-6 \Rightarrow \quad 3y+x\ -7=0$$

R : $a=1$; $b=3$ e $m=-\frac{1}{3}$

3. $y-y_0 = m\left(x-x_0\right) \Rightarrow y-3=3\left(x-2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y=3x-6+3 \quad \Rightarrow \quad y=3x-3$

R: y = 3x – 3

4. a) - 3y = - 2x – 7

R: y = $\frac{2}{3}$ x + $\frac{7}{3}$

b) y – 1 = 3 (x + 2)

R: y = 3x + 7

5a) $\begin{cases}(x;y)=(-2;5)+k(-2;1)\\(x;y)=(-2-2k;5+k)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2-2k\\y=5+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{-2-x}{2}\\k=y-5\end{cases}$

$$\frac{-2-x}{2}=y-5 \quad \Rightarrow 2y-10=-2-x \Rightarrow$$

$R: x+2y-8=0$

$$b)\ y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \Rightarrow y+1=\frac{2+1}{3-5}(x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}(x-5)=y+1 \Rightarrow 2y+2=-3x+15 \Rightarrow$$

$R: 3x+2y-13=0$

Lição 9

$1.a)\ 3kx+y-2ky+k+2=0$

$$\begin{cases}3kx+(1-2k)y+k+2=0 & (1)\\3x-y=5 & (2)\end{cases}$$

$$m_1=-\frac{a}{b}=\frac{-3k}{1-2k} \quad e \quad m_2=-\frac{a}{b}=\frac{3}{1}=3$$

$m_1=m_2$ condicao de paralelismo

$$\frac{-3k}{1-2k}=3 \quad \Rightarrow 3-6k=-3k \Rightarrow -3k=-3 \Rightarrow k=1$$

$b)\ 3.k.0+0-2k.0+k+2=0$

$k+2=0$

$k=-2$

3) $m_1.m_2 = -1$ condicao de perpendicularidade

$$\text{sendo } r_1 : \frac{2}{3}x+1 \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{mas} \quad m_1.m_2 = -1 \Rightarrow \frac{2}{3}.m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_0 = m_2(x - x_0) \Rightarrow y-3 = -\frac{3}{2}(x-2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x+3 \quad \text{Expressao analitica da recta } r_2$$

4. a) $\begin{cases} y = 2x-1 \\ 4x-2y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ y = 2x+4 \end{cases} \Rightarrow m_1 = m_2 \quad e \quad c_1 \neq c_2$

As rectas são paralelas porque $m_1 = m_2$ $c_1 \neq c_2$

b) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 2x+3y-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x-3y=-3 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

$$-7x+0=9$$

$$x = -\frac{9}{7}$$

$$3\left(\frac{-9}{7}\right)+y=1 \Rightarrow -\frac{27}{7}+y=1 \Rightarrow y=\frac{34}{7}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = \frac{34}{7} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{9}{7}; \frac{34}{7}\right)$$

As rectas são concorrentes porque existe ponto de intersecção que é

$$P\left(-\frac{9}{7}; \frac{34}{7}\right)$$

5. Condição de paralelismo:

$$m_1 = m_2 = -2$$

$$l\text{: } y - y_0 = -2(x - x_0) \Rightarrow y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x - 1$$

Expressão da recta l: y = -2x - 1

6. $$l \perp m \Rightarrow m_l = -\frac{1}{m_m} = -\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{(3+1)}{(-2-0)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m_m = -\frac{1}{2} \qquad m_l = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 8 + 1 \Rightarrow y = 2x - 7$$

Equação da recta l: 2x – y – 7 = 0

7.

condicao de coincidencia $\begin{cases} m_1 = m_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1 = m_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = -\frac{m}{n} \\ -2 = \frac{-18}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{2m}{3} \\ -2n = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-2.9}{3} \\ n = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = 9 \end{cases}$$

logo: $m_1 = m_2 = -\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

7. Condição de coincidência $\begin{cases} m_1 = m_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1 = m_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = -\frac{m}{n} \\ -2 = \frac{-18}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{2m}{3} \\ -2n = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-2.9}{3} \\ n = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = 9 \end{cases}$$

logo: $m_1 = m_2 = -\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

$$8.\ a)\ \begin{cases} y-3x-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ y=2x+3 \end{cases} \Rightarrow\ 1+3x=3+2x \Rightarrow x=2 \quad ; \quad y=1+3.2=7$$

$$b)\ \begin{cases} x-y+5=0 \\ 3x-2y+10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x+5 \\ 2y=\frac{3}{2}x+5 \end{cases} \Rightarrow x+5-\frac{3}{2}x\text{-}5=0$$

$$2x-3x=0 \Rightarrow x=0;\ y=0+5=5$$

$$c)\ \begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-2=0 \\ y=-x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ y=-x+8 \end{cases} \Rightarrow x-2+x-8=0$$

$$\Rightarrow 2x-10=0 \Rightarrow x=5$$

$$y=5-2 \Rightarrow y=3$$

Resposta:

a) A (2; 7)

b) B (0; 5)

c) B (5; 3)

Lição 10

$$1.\quad \frac{3x-4y+3}{5}=\frac{4x+3y-5}{5} \vee \frac{3x-4y+3}{5}=\frac{-(4x+3y-5)}{5}$$

$$3x-4y+3-4x-3y+5=0 \vee 3x+4y+3+4x+3y-5=0$$
$$-x-7y-8=0 \vee 7x-7y-2=0$$

R: x + 7y -8 = 0 ou 7x -7y – 2 = 0

2. $$\frac{3x-4y+1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \quad \vee \quad \frac{3x-4y+1}{\sqrt{9+16}} = -(4x-3y-1)$$

$$3x-4y+1 = 4x-3y-1 \ \vee \ 3x-4y+1 = -4x+3y+1$$
$$-x-y+2=0 \ \vee \ 7x-7y = 0$$
$$x+y-2=0 \ \vee \ x-y=0$$

R: x + y – 2 = 0   ou   x – y = 0

Lição 11

1. $$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1 = x^2-4x+4+y^2-10y+25$$
$$-2x+8y+19=0$$
$$2x-8y-19=0$$

R: 2x – 8y + 19 = 0

2. $$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$x^2+8x+16+y^2-6x+9 = x^2-4x+4+y^2-6x+9$$
$$12x+12=0$$
$$x+1=0$$

R: x = -1

Módulo 4 de Matemática

Teste Preparação de Final de Módulo

Este teste, querido estudante, seve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1. Determine o módulo dos seguintes vectores.

   a) a = i – 2j b) $\overline{MN}$ se M(3 ,-1) e N (-2 ; 3)

2. Dados os vectores: $\vec{a}(3;4)$ e $\vec{b}(-3;-4)$ calcule $\left|\vec{a}\right|$ e $\left|\vec{b}\right|$

3. Dados; $\vec{u}(4;2)$, $\vec{v}(4;-2)$, $\vec{w}(4;8)$ e $\vec{z}(-2;4)$

   a) $\vec{u}.\vec{v}$

   b) Determine $\left(\widehat{\vec{u},\vec{w}}\right)$ se $\vec{u}.\vec{w} = 8$

4. Determine o produto interno dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ se :

   a) $\left|\vec{a}\right| = 3$ $\left|\vec{b}\right| = 2$ $\alpha = 60^0$

   b) $\left|\vec{a}\right| = 6$ $\left|\vec{b}\right| = 3$ $\alpha = 30^0$

$\vec{u}.\vec{w} = 8$

5. Determine o ângulo entre os vectores

$\vec{u}\,(2;1)\ \vec{w}(2;4)$

Sabendo que

6. Determine o ângulo de cada par de vectores.

a) (-2; 2) e (2; 2)

b) (0; 1) e (1; 3)

7. Para que valores de $\underline{a}$, $(a - 1\ ;\ 2a + 10)$ é perpendicular a $(3 - 3a\ ;\ 4a + 12)$.

8. Considere os vectores $\vec{u}(-3;4);\ \vec{v}(3;4)\ e\ \vec{w}\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ Determine um vector colinear com $\vec{u}+\vec{v}$ de comprimento igual a 5.

9. Determine um vector de módulo igual a 10 e perpendicular a $\vec{v}(3;-4)$

10. Dados os pontos U (-5; 18) e V (15; 6). Determine as coordenadas dos pontos A, B e C que dividem o segmento UV em partes iguais.

11. Determine <u>m</u> da recta que forma com o eixo ox o ângulo de:

a) 45°

b) 120°

12. Qual é o ângulo que a recta forma com o eixo OX passando pelos pontos.

13. Determine a equação reduzida da recta que passa pelo ponto:

a) (5; 0) e tem declive 3.

b) (-3; 1) e tem inclinação de 45°

14. Escreva as equações das rectas que passam pelos pontos A e B sendo:

$a) A\left(0;\frac{2}{3}\right) \quad e \; B\left(1;\frac{5}{2}\right)$

$b) A(1;-3) \quad e \quad B(4;0)$

c) A (1, -3) e B (4, 0)

15. Defina analiticamente as rectas que bissectam os ângulos determinados pelas rectas

3x -4y = 2 e 4x + 3y = 11

16. Determinar as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas

r: 3x + 4y + 3 = 0 e s : 4x + 3y = - 5.

Soluções do teste de preparação do Módulo 4

1. Determine o módulo dos seguintes vectores

a) a = i – 2j b) $\overline{MN}$ se M(3 ,-1) e N (-2 ; 3)

Resolução

a) $|a| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

b) $|\overline{MN}| = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

2. Dados os vectores: $\vec{a}(3;4)$ e $\vec{b}(-3;-4)$ calcule $|\vec{a}|$ e $|\vec{b}|$

Resolução

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

3. Dados; $\vec{u}(4;2)$, $\vec{v}(4;-2)$, $\vec{w}(4;8)$ e $\vec{z}(-2;4)$

a) $\vec{u}.\vec{v}$

Resolução

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|.\cos\alpha$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2}.\cos\alpha = 5\cos\alpha$$

b) Determine $\left(\vec{u},\overrightarrow{w}\right)$ se $\vec{u}.\overrightarrow{w} = 8$

Resolução

$$\vec{u}.\vec{w} = |\vec{u}||\vec{w}|\cos\left(\vec{u};\vec{w}\right)$$

$$(2;1)(2;4) = \sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{2^2+4^2}.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{5}.\sqrt{20}} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = \arccos\frac{4}{5}$$

$$\bar{\alpha} = 37^0$$

4. Determine o produto interno dos vectores $\overrightarrow{a}$ e $\vec{b}$ se :

a) $|\vec{a}| = 3 \quad |\vec{b}| = 2 \quad \alpha = 60^0$

b) $|\vec{a}| = 6 \quad |\vec{b}| = 3 \quad \alpha = 30^0$

Resolução

a) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^0 = 3.2.\frac{1}{2} = 3$

b) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 30^0 = 6.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

5. Determine o ângulo entre os vectores $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$, sabendo que:

$\vec{u}\,(2;1)\ \overrightarrow{w}(2;4)$

Resolução

$$\vec{u}.\vec{w} = |\vec{u}|.|\vec{w}|.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}|.|\vec{w}|} = \frac{8}{\sqrt{(2)^2+1^2}.\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{5.20}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = \arccos\frac{4}{5}$$

6. Determine o ângulo de cada par de vectores

a) (-2; 2) e (2; 2)

b) (0; 1) e (1; 3)

Resolução

$$\text{a) } \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2-2}{2+2} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0^0$$

$$\text{b) } \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3-1}{1-0} = 2 \quad \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}2$$

7. Para que valores de a, (a – 1; 2a + 10) é perpendicular a

(3 – 3a; 4a + 12).

Resolução:

1° Passo

(2a - 1; a + 5) (6 – 6a; 2a + 6) = 0 (pela

Definição de perpendicularidade)

2° Passo

(2a - 1).(a+ 5) + (6-6a). (2a + 6) = 0

$$\left[(2a-1)(6-6a)\right]\left[(a+5)(2a-6)\right]=0$$

$$12a-12a^2-6+6a+2a^2+6a+10a-30=0$$

$$-10a^2+34a+24=0 \quad /(-2)$$

$$5a^2-17a-12=0$$

3° Passo

Resolver a equação quadrática obtida com base na fómula resolvente

$$\Delta=289-4.5.(-12)=52$$

$$a_1=\frac{17-23}{10}=-\frac{3}{5}$$

$$a_2=\frac{17+23}{10}=4$$

8. Considere os vectores $\vec{u}(-3;4)$; $\vec{v}(3;4)$ e $\overrightarrow{w}\left(-1;\frac{4}{3}\right)$.

Determine um vector colinear com $\vec{u}+\vec{v}$ de comprimento igual a 5.

$$\begin{cases}\overrightarrow{w}=k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ \left|\overrightarrow{w}\right|=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{w}=k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ \left|\overrightarrow{w}\right|=k\left|(0;8)\right|\end{cases} \Rightarrow 5=k\sqrt{8^2} \Rightarrow$$

$k=\frac{5}{8}$ mas

$$\begin{cases}\vec{u}(-3;4)+\vec{v}(3;4)\\ \vec{u}+\vec{v}=(0;8)\end{cases} \quad \text{logo } \overrightarrow{w}=k(0;8)\Rightarrow \quad \overrightarrow{w}=\frac{5}{8}(0;8)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{w}\ (0;5)$$

9. Determine um vector de módulo igual a 10 e perpendicular a $\vec{v}(3;-4)$

Resolução

$(4;3)$ perpendicular a $(3;-4)$ porque

$(4;3).(3;-4)=12-12=0$ e

$k(4;3)=(4k;3k)$

para $k \neq 0$ trata-se de familia de vectores perpendiculares a $(3;-4)$ como $\left|\vec{u}\right|=10$

entao $\sqrt{16k^2+9k^2}=10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{25k^2}\right)^2=10^2$

$$\Rightarrow 25k^2=100$$

$$\Rightarrow k^2=\frac{100}{25}$$

$$\Rightarrow k=\pm 2$$

$$\begin{cases} \text{para } k=2 \Rightarrow \vec{u}=2(3;-4)=(6;-8) \\ \text{para } k=-2 \Rightarrow \vec{u}=-2(3;-4)=(-6;8) \end{cases}$$

São também vectores perpendiculares ao vector v.

10. Dados os pontos U (-5; 18) e V (15; 6).

Determine as coordenadas dos pontos A, B e C que dividem o segmento UV em partes iguais.

Resolução:

U______________________________V

É necessário achar a razão r em cada caso

1º caso: fórmula $\left|\overrightarrow{UA}\right|=r\left|\overrightarrow{AV}\right| \Rightarrow r=\frac{1}{3}$

U______________________________V

$$x_P=\frac{x_A+r\,x_B}{1+r}=\frac{-5+\frac{1}{3}.15}{1+\frac{1}{3}}=0$$

$$y_P=\frac{y_A+r\,y_B}{1+r}=\frac{18+\frac{1}{3}.6}{1+\frac{1}{3}}=15$$

Logo: A (0; 15)

2º caso: formula $\left|\overrightarrow{UB}\right| = r\left|\overrightarrow{BV}\right| \quad \Rightarrow 2 = r.2 \Rightarrow r = 1$

U ______________________________ V

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-5+15}{2} = 5$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{18+6}{2} = 12$$

Logo: B (5; 12)

3º caso formula $\left|\overrightarrow{UC}\right| = r\left|\overrightarrow{CV}\right| \Rightarrow 3 = r.1 \Rightarrow r = 3$

U____________________________V

$$x_P = \frac{x_A + r\,x_B}{1+r} = \frac{-5+3.15}{4} = 10$$

$$y_P = \frac{y_A + r\,y_B}{1+r} = \frac{18+3.6}{4} = 9$$

Logo: C (10; 9)

11 . Determine <u>m</u> da recta que forma com o eixo ox o ângulo de:

a) 45°

Resolução

$tg45^0 = 1$

a) 120°

Resolução

$tg120^0 = -\sqrt{3}$

12. Qual é o ângulo que a recta forma com o eixo OX passando pelos Pontos.

Resolução

a) A (3 ; 1) e B (5 ; 3)

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{5-3} = 1$$

b) A ($-2\sqrt{3}$; 5) e B ($-\sqrt{3}$; 4)

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-5}{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

13. Determine a equação reduzida da recta que passa pelo ponto:

a) (5; 0) e tem declive 3.

b) (-3; 1) e tem inclinação de 45°

Resolução

a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 0 = 3(x - 5)$$
$$y = 3x - 15$$

Como, y = ax + b então y = 3x – 15

b)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = \text{tg}45^0\,(x + 5)$$
$$y - 1 = x + 3$$
$$y = x + 4$$

14. Escreva as equações das rectas que passam pelos pontos A e B

Sendo:

$a) A\left(0; \frac{2}{3}\right) \quad e \; B\left(1; \frac{5}{2}\right)$

$b) A(1; -3) \quad e \quad B(4; 0)$

c) A (1, -3) e B (4, 0)

Resolução

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

a)

$$\frac{y-\frac{2}{3}}{x-0}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}{1-0}\Rightarrow\frac{y-\frac{2}{3}}{x-0}=\frac{\frac{11}{6}}{1}\Rightarrow y-\frac{2}{3}=x\,\frac{11}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-4=11x\Rightarrow 11x-6y+4=0$$

b)

$$\frac{y+3}{x-1}=\frac{0+3}{4-1}\Rightarrow\frac{y+3}{x-1}=1\Rightarrow y+3=x-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+3-x+1=0\Rightarrow y-x+4=0$$

c) A (1, -3) e B (4, 0)

$$\frac{y+3}{x-1}=\frac{0+3}{4-1}\Rightarrow 3\left(y+3\right)=3\left(x-1\right)\Rightarrow 3y+9-3x+3=0$$

$$\Rightarrow 3y-3x+12=0$$

15. Defina analiticamente as rectas que bissectam os ângulos

Determinados pelas rectas

3x -4y = 2 e 4x + 3y = 11

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|3x-4y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|4x+3y-11|}{\sqrt{9+16}}$$

$$|3x-4y-2|=|4x+3y-11|$$

Esta igualdade implica que se estabelece a que $|3x-4y-2|=|4x-3y-11|$

Assim: 3x – 4y -2 = 4x + 3y – 11

3x – 4y – 2 – 4x – 3y + 11 = 0

$-x - 7y + 9 = 0$

$X + 7y - 9 = 0$

$$\frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{9+16}} = -\frac{|4x - 3y - 11|}{\sqrt{9+16}}$$

Donde se concluir que: $3x - 4y - 2 = -(4x + 3y - 11)$

$3x - 4y - 2 = 4x - 3y + 11$

$3x - 4y - 2 + 4x + 3y - 11 = 0$

$7x - y - 13 = 0$

Vamos verificar a nossa solução:

Como as duas bissectrizes devem ser perpendiculares e o ponto de ntersecção pretence as duas rectas:

b1 : $x + 7y - 9 = 0$ e b2 : $7x - y - 13 = 0$

$$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{7} \qquad m_2 = -\frac{a}{b} = 7$$

Logo: $m_1 . m_2 = \frac{-1}{7} . 7 = -2$ (c.q.d) pela condição de

Perpendicularidade

Calculemos o ponto de intersecção resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + 7y - 9 = 0 \\ 7x - y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 7y \\ x = \frac{13+y}{3} \end{cases} \Rightarrow 9 - 7y = \frac{13+y}{7}$$

$$63 - 49y = 13 + y \Rightarrow -49y - y = 13 - 63 \Rightarrow -50 = -50$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 9 - 7 = 2 \end{cases}$$

Conclusão: o ponto de intersecção tem como coordenadas P (2; 1)

16. Determinar as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas

r : 3x + 4y + 3 = 0 e s: 4x + 3y = - 5.

Resolução

$$\frac{3x-4y+3}{5}=\frac{4x+3y-5}{5} \ \vee \ \frac{3x-4y+3}{5}=\frac{-(4x+3y-5)}{5}$$

$$3x-4y+3-4x-3y+5=0 \ \vee \ 3x+4y+3+4x+3y-5=0$$
$$-x-7y-8=0 \ \vee \ 7x-7y-2=0$$

R: x + 7y -8 = 0 ou 7x -7y – 2 = 0