MÓDULO 3

Matemática

Conjuntos Numéricos e Cálculo Algébrico

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 3

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem

Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Função exponêncial e função logarítmica

Introdução

O conceito de função em matemática, teve origem no conceito de correspondência utilizado no nosso dia-a-dia. Em matemática, formalizou-se o conceito de correspondência de forma a ser aplicado em cálculos, Por exemplo, com base na correspondência unívoca podemos introduzir o conceito de função. Dados os conjuntos A e B e elementos x pertencentes a A e y pertencentes a B. Diz-se que a correspondência entre os elementos x e y dos conjuntos A e B respectivamente, é unívoca quando x em A corresponde a um e só um elemento y em B.através de uma aplicação f que se chama função

- ✓ O número y que corresponde ao número x chama-se imagem de x e designa-se por y = f (x).
- ✓ O conjunto de elementos x chama-se domínio de f e designa-se por D_f
- ✓ O conjunto y das imagens chama-se contradomínio de f e designa-se por D'_f .

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Fazer* o Estudo completa da função exponêncial.
- *Fazer* o Estudo completa da função logarítmica.

Definição geral de função

Caro estudante, antes de estudar as funções exponenciais e logarítmicas vamos recordar a definição geral de uma função.

Definição

Sejam M e N dois conjuntos arbitrários. Diz-se que está definida uma função f do conjunto M, no conjunto N, se para cada elemento x em M corresponde um e só um elemento y em N e designa-se por

$Y = f(x)$ ou $f: M \rightarrow N$

Existem vários tipos de funções das quais vamos distinguir;

- Funções polinomiais (lineares, quadráticas e de grau superior que 2)
- Funções trigonometricas
- Funções exponênciais
- Funções logarítmicas

De certeza que já está recordado sobre os conceitos básicos para o estudo de uma função, avancemos

O que será a função exponêncial?

Antes de dar a definição vamos definir a potência de um número.

Definição

Dados um número real **a** e um número natural n >2 , chama-se potência de base **a** e expoênte **n** ao número real

$a^n = a.a.a......a$ (n vezes)

Isso mesmo, agora lembre-se das propriedades de que gozam essas potências

1) $a^m \, . \, a^p = a^{m+p}$

2) $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

3) $(a \, . \, b)^m = a^m \, . \, b^m$

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

6) $a^0 = 1$

7) $a^1 = a$

$$8)\ \frac{1}{a^{m}} = a^{-m}$$

$$9)\ a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^{m}}$$

O que será a função exponêncial? Você pode muito bem recordar-se da definição

Definição

Chama-se função exponêncial de base a à toda aplicação

$f:R \rightarrow R^{+} : x \rightarrow a^{x} \quad (a \neq 1,\ a>0)$ **e escreve-se**
$f(x) = a^{x}$ ou $y = a^{x}$

a------- base da função exponêncial

x------- variável independente

y------- variável dependente

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Função exponêncial de base (**a**) toda a função cuja variável aparece como expoente. O que simbolicamente, fica

$f: R \to R^+ : x \to a^x \quad (a \neq 1,\ a > 0)$ e escreve-se

$f(x) = a^x$ ou $y = a^x$

Que são Propriedades da função Exponêncial

- Domínio de existência é sempre $x \in R$
- Contradomínio é sempre $x \in R^+$
- Em qualquer base **a** o gráfico de f (x) intersecta o eixo dos y no (0; 1)
- Quanto à monotonia, a função é sempre:
- Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
- Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

Que dado $a \in R^+$ e $a \neq 1$, chama-se função logarítmica a função em que a variável $x \in R$ está associada a um logarítmo, isto é, f(x) = $\log^a x$, $x > 0$ ou $f: R^+ \to R : f(x) = \log_a x$ $a \in R^+$; $a \neq 1$ e x> 0

- Domínio de existência é sempre x> 0 (o mesmo que $x \in R^+$)
- Contradomínio é sempre $y \in R$
- Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto (1, 0)
- A função é sempre crescente quando:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ se } a > 1 \quad \text{ex}: \log_2 x$$

- A função é sempre decrescente quando:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ se } 0<a<1 \qquad \text{ex: } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

- As funções exponêncial e logarímicas são inversas.

Actividades

Actividades

Óptimo, você já se recordou, da definição. E como é que se representa graficamente a função exponêncial?

Fácil, os procedimentos são os mesmos das funções polinomiais, tomemos um exemplo simples como: $y = f(x) = 2^x$ e $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Podemos representar as duas funções no mesmo sistema cartesiano ortogonal

<u>1° Passo</u>

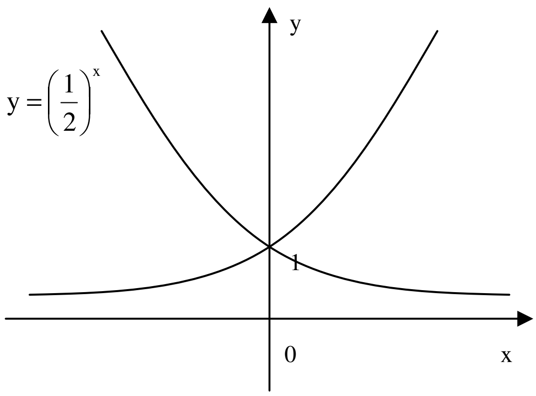
Atribuir alguns valores a x, em R seja: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

<u>2° Passo</u>

Calcular os valores de y a partir das funções 2^x e $(1/2)^x$ respectivamente

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**4**	**8**
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	**8**	**4**	**2**	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Considerar um, S.C.O e marcar os pontos com as coordenadas x e y



Muito simples, basta aplicar a definição de potência para calcular os valores de y, a partir dos valores atribuídos ao x.

Propriedades da função Exponential

- Domínio de existência é sempre $x \in R$
- Contradomínio é sempre $x \in R^+$
- Em qualquer base **a** o gráfico de f(x) intersecta o eixo dos y no

(0; 1)

- Quanto à monotonia, a função é sempre:
  - Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
  - Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

Observando os gráficos representados no S.C.O, podemos verificar as propriedades da função

A representação gráfica das funções dadas é um exemplo clássico das propriedades que acabamos de ver, mas você deve considerar mais funções exponênciais e verificar as propriedades.

Faça a representação $y = 3^x$ $y = (1/3)^x$

Existe uma função cujas características se relacionam com as da função exponêncial

Você ja estudou esta função qual será?

É função logarítmica

Excelente, ainda está recordado, mas como definiu e quais são as propriedades da função logarítmica?

Definição

Dado $a \in R^+$ e $a \neq 1$, chama-se função logarítmica a função em que a variável $x \in R$ está associada a um logaritmo, isto é, $f(x) = \log_a x$; $x > 0$ ou $f : R^+ \to R : f(x) = \log_a x$ com $a \in R^+$; $a \neq 1$ e $x > 0$

Isso, você acertou a definição pois, não é conceito novo para si, mas precisa de aprofundar:

Consideremos alguns exemplos desta função

$y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad y = f(x) = \log_4 x$

Lembre-se também que:

Se a = 10 $\Rightarrow$ $f(x) = \log_{10} x$ =logx diz-se logarítmo decimal

Se a = e onde e = 2,7182818284 (número de Neeper) diz-se

Logaritmo natural e escreve-se $f(x) = \log_e x = \ln x$

A função logarítmica também pode ser representada graficamente

Seguindo o mesmo processo da função exponencial

Consideremos os exemplos

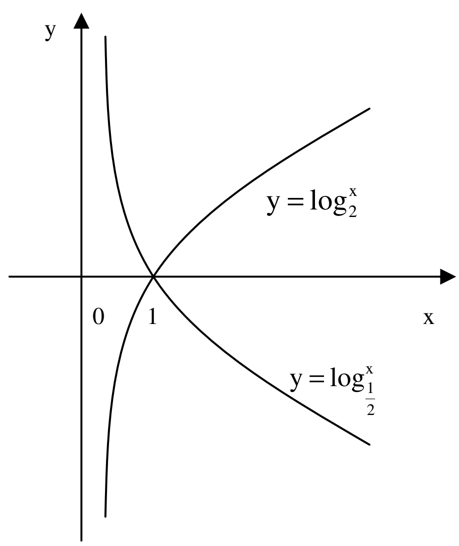
$Y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	4	2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	2
$y = \log_2^x$	2	1	0	-3	-2	-1
$y = \log_{\frac{1}{2}}^x$	-2	-1	0	3	2	1

NB: pela definição de logarítmo x> 0, significa que só podemos atribuir aos x valores positivos

Lembre-se que:

Log x = y $\Leftrightarrow$ $a^y = x$ com x> 0, e 0 <a <1 ou a> 1



Podemos observar as seguintes propriedades:

- Domínio de existência é sempre x> 0 (o mesmo que $x \in R^{+}$)
- Contradomínio é sempre $y \in R$
- Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto (1, 0)
- A função é sempre crescente quando:
- Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$

  ex: $f(x) = \log_2 x$

- Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

  ex: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fazendo o estudo comparativo duas funções podemos concluir que:

1. Domínio de f (x) = a^{x} é contradomínio de f(x) = logx e vice-versa
2. Os gráficos da função exponêncial não intersectam o eixo dos x, mas sim eixo dos y no ponto p (0,1) enquanto os da função logarítmica intersectam o eixo dos x no ponto p (1,0) mas não intersectam o dos y.
3. Os pontos p (0,1) e p (1,0) são pontos simétricos em relação à recta y = x
4. As duas funções são crescente para a> 1 e decrescentes para $0 < a < 1$

Conclusão: As funções exponêncial e logarímicas são inversas.

Óptimo, você pode resolver os exercícios que se seguem para medir o seu nível de compreensão da matéria

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Faça o estudo das funções que se seguem

   a) $y = 3^x$ b) $y = (1/3)^x$

2. a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{10} x$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos a seguir, preste atenção. Sucessos!

Conseguiu ter cem por cento de acertos? Se sim está de parabéns, se não, reestude a lição. Pode consultar colegas, professor da disciplina, tutor no centro de apoio e aprendizagem.

Lição 2

Equação exponêncial

Introdução

Depois de ter apreendido a matéria referente a funções exponênciais e logarítimicas, vai se deter em seguida no estudo das equações exponênciais. Para resolver a equação exponêncial você precisa primeiro recordar o que é uma equação, o que se procura numa equação, dominar as propriedades de potências, portanto:

O objectivo como já deve estar a pensar é procurar o valor da incógnita que satisfaz a equação (igualdade).

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Resolver* a equação exponêncial

Objectivos

Equação exponêncial

O que será então a equação exponêncial?

Simples, toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente é equação exponêncial.

Exemplos;

$a)\ 2^{x}=16 \qquad b)\ 5^{x-1}=25 \qquad c)\ 2^{x-1}+2^{x}=48$

$d)\ 4^{2x+1/2}+4^{2x-1}=3^{2x+2}-3^{2x+1}+3^{2x}+3^{2x-2}$

$e)\ 4^{x}-2^{x}=2$

Agora, vamos resolver as equações dos exemplos considerados. O segredo é procurar sempre reduzir os dois membros a potências com bases iguais, para depois aplicar a seguinte equivalência:

$a^{m}=a^{p} \iff m=p$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Equação exponêncial

- É toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente
- Resolver uma equação exponêncial, como acontece em qualquer tipo de equação significa procurar o valor da incógnita que satisfaz a igualdade.
- A resolução de equações exponênciais basea-se na aplicação da regra:

$$\boxed{a^m = a^p \quad \Leftrightarrow \quad m = p}$$

Actividades

Actividades

a) $2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x=4$

b) $5^{X-1} = 25 \Rightarrow 5^{X-1} = 5^2 \Rightarrow X - 1 = 2 \quad X=3$

C) $2^{X-1} + 2^X = 48$ aplicando a propriedade $(a^m : a^p = a^{m-p})$

$$\frac{2^x}{2^1} + 2^x = 48$$

$2^x \left(1+ \frac{1}{2} \right) = 48$ (colocar em evidência o factor comum 2^x)

$$2^x \left(\frac{3}{2}\right) = 48 \Rightarrow 2^x = 48 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = 16 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

d) $4^{2x+\frac{1}{2}} + 4^{2x-1} = 3^{2x+1} - 3^{2x+1} + 3^{2x} + 3^{2x-2}$

(aplicar a propriedade $a^m . a^p = a^{m+p}$)

$$4^{2x} \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 4^{2x} \cdot 4^{-1} = 3^{2x} \cdot 3^2 - 3^{2x} \cdot 3 + 3^{2x} + 3^{2x} \cdot 3^{-2}$$

$$4^{2x} (4^{\frac{1}{2}} + 4^{-1}) = 3^{2x} \left(9 - 3 + 1 + \frac{1}{9} \right)$$

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-1}) = 3^{2x} \left(9 - 3 + 1 + \frac{1}{9}\right)$$

$$4^{2x} \cdot \frac{9}{4} = 3^{2x} \cdot \frac{64}{9}$$

$$\frac{4^{2x}}{3^{2x}} = \frac{64 \cdot 4}{9 \cdot 9}$$

(aplicando a propriedade $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ no primeiro membro)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

(aplicando a propriedade $(a^m)^p = a^{m.p}$ no segundo membro)

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$ (igualar os expoentes)

e) $4^x - 2^x = 2$ (introduzir uma nova variável seja $t = 2^x$)

Teremos:

$t^2 - t - 2 = 0$ (equação quadrática, resolver com base na factorização e depois a lei de anulamento ou aplicar a fórmula resolvente)

$(t-2)(t+1) = 0$

$t - 2 = 0$ ou $t + 1 = 0$

$t = 2$ ou $t = -1$

Solução: não se esqueça, estamos a procura do valor de x que saitsfaz a igualdade,

Então :

para $t = 2 \Rightarrow 2 = 2^x \Rightarrow x = 1$

para $t = -1 \Rightarrow -1 = 2^x \Rightarrow$ Não tem solução

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1). $4^x = 64$ 2.) $3^x = \frac{1}{81}$ 3) $\sqrt{2^x}\,.\,\sqrt{3^x} = 36$

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4$

5) $7^{(x+1)(x-2)} = 1$ 6) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ 7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

8) $8^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$

9) $5^{x^2-2x} = 0{,}2$

10) $2^{2x} - 3.2^x + 2 = 0$

Isso mesmo, voce acertou todos exercícios. Prossigamos

Lição 3

O cálculo do valor do logarítmo aplicando as propriedades

Introdução

Caro estudante, você estudou o conceito de logaritmo na lição 1, como forma de aprofundar os conhecimentos que adquiriu nas classes anteriores sobre a função logarímica.Vamos ainda nesta lição, explorar as particularidades deste conceito pois, este é aplicado na resolução de problemas do nosso dia-a-dia.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Determinar* o domínio de existência da equação logarítmica
- *Aplicar* as propriedades para calcular o valor de uma expressão logarítmica

O logarítmo

Vamos fazer uma pequena revisão do conceito do logarítmo em primeiro lugar:

Recordemos a definição do logarímo

Definição

Dados a e b positivos, com $a \neq 1$, existe um e só um número x real tal que $a^x = b$ A esse número x dá-se o nome de logarítmo de b na base a e escreve $\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$

Exemplos

1) Qual é o logarítmo de 27 na base 3?

Resposta: $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$ porque $3^3 = 27$

E como é que se calcula o valor do logarítmo de um número, numa certa base? Vejamos a seguir:

2) Determine a) $\log_{1/2} 64$ b) $\text{Log}_{\sqrt{5}}\ 25$

Resposta

$\log_{1/2} 64 = x$

$(1/2)^x = 64 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^6 \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$ Porque $(1/2)^{-6} = 64$

$\text{Log}_{\sqrt{5}}\ 25 = x \Rightarrow$

$\left(\sqrt{5}\right)^x = 25 \Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$ porque

$\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$

Não precisamos de repetir os passos, pois basta aplicar a definição do logarítmo estamos perante uma equação exponêncial cuja resolução já é do seu domínio:

3) Qual é o número cujo logarítmo na base 3 é 4?

R: $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow 3^4 = x \Leftrightarrow x = 81$

4) Determine a base do logarítmo de 7 cujo valor é ¼?

R: $\log_a 7 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 7 \Leftrightarrow (a^{\frac{1}{4}})^4 = 7^4 \Leftrightarrow a = 7^4$

Propriedades dos logarítmos

- Log (a. b) = log a + logb (a >0 , b > 0)
- Log (a/b) = loga – logb (a >0 , b > 0)
- Log a^b =b.log a
- Cologarítmo colog a = - log
- Mudança de base
  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; a-base antiga e c-base nova
- $\log_a a = 1$

- $\log_a 1 = 0$
- NOTA da definição do logarítmo segue que o número negativo nao tem logaritmo.

De certeza que se recordou das propriedades, passemos agora a fazer a sua aplicação atravês da resolução dos seguintes exercícios:

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Definição

Dados **a** e **b** positivos, com $a \neq 1$, existe um e só um número x real tal que $a^x = b$ A esse número x dá-se o nome de logarítmo de b na base a e escreve $\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$

Propriedades dos logarítmos

- Log (a. b) = log a + logb (a >0 ? b > 0)
- Log (a/b) = loga – logb (a >0 ? b > 0)
- Log a^b =b.log a
- Cologarítmo colog a = - log
- Mudança de base

  $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ a- base antiga e c- base nova
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

Actividades

Actividades

1) Desenvolva cada logarítimo, aplicando as propriedades

a) $\log_a a^2.b.c^3$ b) $\log_a \dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{b}}}{b.\sqrt[3]{a}}$ c) $\log_a \dfrac{a^2.\sqrt{b}}{c.d^2}$

d) $\text{Log}_3 \dfrac{3.\sqrt[4]{a.\sqrt[5]{a^{-1}}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}$

2)

a) $\log_2 2^{\frac{1}{5}}$ b) $\log_5 \sqrt[3]{5^2}$ c) $\dfrac{\log_2 16 \bullet \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8}$

d) $\log_a \left[\log_a a^{a^x}\right]$

1° Passo

Aplicando a propriedade do logarítmo do produto:

$\log_a a^2 + \log_a b + \log_a c^3$

2° Passo

Aplicando a propriedade do logarítimo de uma potência:

$2\log_a a + \log_a b + 3\log_a c$

3° Passo

Aplicando a propriedade $\log_a a = 1$, teremos:

a) $2 + \log_a b + \log_a c$

b) $\log_a \dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{b}}}{b.\sqrt[3]{a}}$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente

$$\log_a\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right) - \log\left(b.\sqrt[3]{b}\right)$$

Aplicando a propriedade do logarítmo do produto na segunda parcela

$$\log_a\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right) - \log_a b - \log_a \sqrt[3]{b}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência de expoente fracionário

Pois $\boxed{\sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}}$

$$\log_a\left(a^3.\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_a b - \log_a b^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{3}{2}\log_a a + \frac{1}{4}\log_a b - \log_a b - \frac{1}{3}\log_a b$$

Reduzir termos semelhantes e aplicar a propriedade $\boxed{\log_a a = 1}$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{3}\right)\log_a b =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{13}{12}\log_a b$$

c) $\log_a \dfrac{a^2.\sqrt{b}}{c.d^2}$

Temos logaritmo de um quociente como na alinea b, vamos repetir com atenção os passos \`desta alinea.

$$\log_a\left(a^2\sqrt{b}\right) - \log_a c.d^2 =$$

$$= 2\log_a a + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a c - 2\log_a d$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a c - 2\log_a d$$

d) $\log_3 \dfrac{3.\sqrt[4]{a}.\sqrt[5]{a^{-1}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}$

Repetir os passos da alinea anterior

$$=\log_3 3+\frac{1}{4}\log_3\left(a\,.\sqrt[5]{a^{-1}}\right)-\frac{1}{3}\log_3 3-\frac{1}{3}\log_3\sqrt[3]{3}$$

$$=1+\frac{1}{4}\log_3 a-\frac{1}{5}\log_3 a-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\log_3 3$$

$$=1+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\log_3 a-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{7}{15}+\frac{1}{20}\log_3 a$$

2)

a) $\log_2 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_2 2 = \frac{1}{5}$ (lembre-se que $\log_a a = 1$)

b) $\log_5\sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3}\log_5 5 = \frac{2}{3}$

c) $\dfrac{\log_2 16.\log_3\sqrt{27}}{\log_2 8} = \dfrac{4\,.\frac{1}{2}.\log_3 27}{3} = \dfrac{4\,.\frac{1}{2}.3}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

(atenção, o logaritmo do produto e diferente do produto de logaritmos, por isso, temos que achar valor do logaritmo de cada factor no numerador e depois efectuar a divisao dos valores obtidos)

d) $\log_a\left[\log_a a^{a^x}\right]$

$\log_a\left(a^x\log_a a\right) = x\log_a a = x$ Simples, só aplicar a propriedade do logaritmo da potência constantemente ate ao resultado

3. Calcule o domínio de existência da função:

$y=\log_{(x-2)}(x-1)$

<u>Resolução</u>O logaritmando deve positivo (maior que zero) x - 1> 0

A base também deve positivo (maior que zero) x – 2> 0

A base de ser diferente de um (1) $x-2\neq 1$

Logo : x - 1 > 0 $\cap$ $x-2>0$ $\cap$ $x-2\neq 1$ 0

$$D = \{x \in R \setminus x > 2 \ e \ \ x \neq 3\}$$

Agora, você está em condições de resolver os exercícios que se seguem sem ajuda de ninguem.preste atenção, vai ser muito fácil, basta aplicar as propriedades dos logaritmos como acabamos de fazer.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1.Calcule o valor de:

a) $\log_2 8$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$

c) $2^{-3\log_2 2}$

d) $3^{2\log_3 3} \ . \ \log \sqrt[3]{3}$

e) $\log_{27} 9$

f) $\log_2 2^{\sqrt{3}}$

g) $\log_{\left(\frac{1}{27}\right)} \left(\frac{1}{9}\right)$

h) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625}$

i) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2\log_{36} 6$

2. Determine o domínio de existência das seguintes funções logarítmicas

a) $y=\log_6\left(x^2-10x+16\right)$

b) $y=\log\left(x^2\ -3\right)^2$

4. Desenvolva o logarítmo aplicando as propriedades operatórias

$$\log_2\frac{8\ \sqrt{2\ \sqrt[3]{4}}}{\sqrt[4]{4}}$$

Lição 4

Equação logarítmica

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, desta vez resolvendo equações que envolvem logarítmos. Recorde-se que resolver uma equação em geral significa determinar o valor da incógnita que satisfaz a igualdade, neste caso trabalhar com equações logarítmicas implica a aplicação das propriedades que acabamos de estudar na lição anterior.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- Resolver a equação logaritimica

Objectivos

Equação logaritmica

Vamos recordar a definição de equação logarímica.

Definição

Equação logaritmica e toda equação que contem expressão logarítmica

A resolução de equações logarítmicas basea-se na aplicação da definição do logaritmo e/ou das suas propriedades.

Neste caso, temos que determinar antes de mais nada o domínio de existência para evitar erros que possam surgir ao estendermos o dominio em todo o conjunto R.

Vamos agora fazer as actividades que se seguem em conjunto.Não se esqueça o nosso objetivo é calcular o valor da incógnita nas equações seguintes:

Actividades

Actividades

1. $a)\ \log_{0,3} x = 2 \quad \Rightarrow \quad (0,3)^2 = x \quad \Rightarrow x = 0,09$ (pela definição do logaritmo D: x> 0

2. $\log_3^2 x = 4 - \log_3 x$ Domínio: x> 0 introduzindo nova variavel seja $\log_3 x = y$

Teremos $y^2 + 3y - 4 = 0$ é só resolver a equação quadrática.

Solução para y = 1 $\Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow 3^1 = x$

Para y = -4 $\log_3 x = -4 \Rightarrow x = 3^{-4} \Rightarrow x = \dfrac{1}{81}$

3. $\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$

Neste caso, temos que determinar antes de mais nada o dominio de existência para evitar erros que possam surgir ao estendermos o dominio em todo o conjunto R.

O dominio de existência e $\{x \in R \ , \ x + 2 > 0 \ \wedge \ 3x - 4 > 0\} =$

$$\left\{ x \in R \ , \ x > \frac{4}{3} \right\}$$

$$\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$$

$\log_2 (x+2)(3x-4) = \log_2 16$ (aplicando logaritmo do produto)

$(x+2)(3x-4) = 16$ (aplicando a lei de anulamento do produto)

Teremos as seguintes soluções $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{3}$ destas duas soluções so uma e que satisfaz a igualdades porque considerando o

Dominio de existência x> 4/3 logo a solução é:

$$\boxed{x = \frac{-1 + \sqrt{73}}{3}}$$

3. $\log x + \log_x 10 = 2{,}5$

0 Dominio $D = \{ x \in |R| \; x > 0 \;\; \wedge x \neq 1 \}$

$\log_x 10 = \dfrac{1}{\log x}$ Pondo y = log x temos $y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = \dfrac{1}{2} \qquad y_2 = 2$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{10} \qquad x_2 = 100$

Esta claro que $x_1 \; ; \; x_2 \in D$

Solução: x= $\sqrt{10}$ $\wedge$ x = 100

4 . $lg\left(x^2 - x - 6\right) + x = \lg\left(x + 2\right) + 4$

Domínio $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ x + 2 > \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$\lg(x^2 - x - 6) + \lg 10^x = \lg(x + 2) + \lg 10^4$

(x + 2) (x - 3) = (x + 2) 10^4 (visto que x + 2.> 0)

(x - 3) $10^4 = 10^4$

Evidentemente x = 4 é raíz da equação. Porém provemos que não há mais raízes. Teremos

$x - 3 = 10^{4-x}$

a) Se x> 4 então x – 3> 1 mas $10^{4-x} < 1$

b) Se x <4 então x -3 <1 mas $10^{4-x} > 1$

Deste modo, a única raíz da equação e x = 4

Facilimo, resumindo:

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Equação logarítmica e toda equação que contém expressão logaritmica.
- A resolução de equações logarítmicas basea-se na aplicação da definição do logarítimo e/ou das suas propriedades.
- Antes de resolver qualquer equação logarítmica deve-se calcular o domínio de existência do logarítmos envolvidos.
- A solução da equação logarítmica é determinada pela intersecção da solução obtida na resolução da equação propriamente dita e o domínio de existência.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso

1.Associe (V) verdadeiro ou (F) falso**.**

$a)\log_3 5^6 = 6\log_3 5$

$b)\log_2 \sqrt[10]{3} = \frac{1}{10}\log_2 3$

$c)\log_2 3^8 = 3\log_2 8$

$d)\log_5 8 - \log_5 3 = \log_5 5$

2. Resolva as equações seguintes logarítmicas

a) $\log_{\frac{1}{5}} 1 = x$

b) $\log_4 (2x-9) = \log_4 3$.

c) $\log_4 (x^2 - 2x) = \log_4 (3x-6)$

d) $3\log_3 x + 2 = \frac{1}{\log_3 x}$

e) $\log(x+3) + \log 4 = \log x^2$

f) $\log_8 x - \log_4 (x+1) + \frac{1}{6}\log_2 (x+1) = 0$

Agora confira as suas respostas, caso nao tenha acertado a todos exercícios volte a reestudar a lição

Lição 5

Inequação exponêncial

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, desta vez resolvendo inequações que envolvem logarítmos. Recorde-se que já resolveu inequações quadráticas, o conceito de desigualdade bem como do conjunto solução, não muda para o caso de inequações logarímicas. Por isso vamos resolver as inequações logarímicas lindamente basta respeitar as propriedades dos logarítmos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Resolver* a inequação exponencial.

Objectivos

Inequação exponêncial

Caro estudante, vamos aprofundar a resolução de inequações exponênciais que de certeza já tratou no primeiro ciclo.

A resolução de equações que contém funções exponenciais exigem um bom domínio das propriedades dessas funções tais como:

1. Dominio da função exponencial e R
2. A função exponêncial é positiva para todos os valores da base

3.Os valores da função exponêncial $y = a^x$ são superiores a 1

Se $\boxed{a > 1 \quad e \quad x > 0 \text{ e inferiores se } x < 0 \text{ e } 0 < a \leq 1}$

4.As inequações exponênciais $a^x > a^k \quad \Rightarrow \begin{cases} x > k & se \quad a > 1 \\ x < k & se \quad 0 < a < 1 \end{cases}$ Também é propriedade da função exponêncial?

3. Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

O que será então a inequação exponêncial?

Facil, você ja conhece a definição de equação exponêncial como uma igualdade que contém funções exponênciais, e sabe que uma inequação qualquer e uma desigualdade, então poderá dar a definição sem problemas

Definição

Inequação exponêncial é toda a desigualdade que contém função exponêncial

Consideremos os seguintes exemplos:

1.$\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ (como a> 1 portanto a = 3/2) teremos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{Solução} \quad x \in \left]0;+\infty\right[$$

2. $2^x \leq 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x \leq 2^4 \quad \Rightarrow \quad x \leq 4 \quad$ pois $\quad a = 2 > 1$
Solução $x \in \left]-\infty\ ;\ 4\right]$

3.$\frac{1}{9} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \wedge \quad - \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$

$\Rightarrow 2 \geq x \ \wedge \ x > -2$

Solução x $\in \left]-2;2\right]$

4 $4^x - 3.2^x - 4 > 0 \ ; \ D = R \qquad$ Pondo $2^x = y$ teremos

$$y^2 - 3y - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y+1)(y-4) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y < -1 \ \vee \ y > 4$$

$a) \quad 2^x < -1 \qquad$ (não tem soluções reais) $\quad 2^x > 0$

qualquer $x \in$ R

b) $2^x > 4 \Leftrightarrow x > 2$ pois 2^x e crescente

Resposta: x> 2

Óptimo, mais exercícios de fixação:

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Inequação exponêncial é toda a desigualdade que contém função exponêncial
- Que são propriedades das inequações exponenciais

1. Domínio da função exponêncial e R

2. A função exponêncial é positiva para todos os valores da base

3. Os valores da função exponêncial y = a^x são superiores a 1

Se a $\boxed{>1 \text{ e } x > 0 \text{ e inferiores } a > 1 \text{ se } a > 1 \text{ e } x < 0}$.

4. As inequações exponenciais $a^x > a^k \Rightarrow \begin{cases} x > k & se \quad a > 1 \\ x < k & se \quad 0 < a < 1 \end{cases}$ Também é propriedade da função exponêncial?

5. Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

Actividades

Actividades

1. Resolva as seguintes inequações

$a)\ 7^{x-1} < 7^{3}$

Como a base da potência 7 maior 1 $(7>1)$

$7^{x-1} < 7^{3} \Rightarrow x-1<3 \Rightarrow x<4$

$x \in \left]-\infty;4\right[$

$$b)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x}{5}-3} \Rightarrow 2x-1 \leq \frac{2x}{5}-3 \Rightarrow 10x-2x \leq -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x \leq -10 \Rightarrow x \leq \frac{-10}{8} \Rightarrow x \leq -\frac{5}{4}$$

$c)\ \left(5^{x}\right)^{2} - 6.5^{x} + 5 \leq 0$ seja $5^{x}=y$; logo $\left(5^{x}\right)^{2}=y^{2}$

$\Rightarrow y^{2}-6y+5 \leq 0$

$$\Delta = 36-20=16 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{6-4}{2} = 1 \\ y_2 = \dfrac{6+4}{2} = 5 \end{cases}$$

$y \in [1;5]$

$$5^{0} \leq 5^{x} \leq 5^{1} \begin{cases} 5^{0} \leq 5^{x} \\ 5^{x} \leq 5^{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x} \geq 5^{0} \\ 5^{x} \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

solução: $x \in [\,0;1\,]$

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1). $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 4^{x-1}$

2). $3^{4x-2} - 5 \cdot 3^{2x-1} + 4 < 0$

3) $3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{27}$

4) $(0,1)^{6x^2-5x} \geq 10$

Agora confira as suas respostas, no final do módulo,caso não tenha acertado a todos exercícios volte a reestudar a lição.

Lição 6

Inequação logarítmica

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, nesta lição vamos resolver as inequações logarítmicas. O conceito de desigualdade bem como do conjunto solução de uma inequação que estudou durante a resolução de inequações quadráticas no módulo dois não muda, portanto estes conceitos se mantém para as inequações logarímicas e fique sabendo também que irá precisar muito de aplicar as equações quadráticas nesta lição, sem deixar de lado as propriedades dos logarítmos.

Ao concluir esta unidade você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* a inequação logaritmica

Inequação logarítmica

A resolução de equações que contém funções logarítmicas exige um bom

Conhecimento de todas as propriedades dessas funções.

Tais como:

Dominio da função logarítmica e R^+

Na resolução de problemas ligados aos logaritmos as vezes

é necessario a passagem da base do logaritmo para outra

Através da fórmula: $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ em particular se a = b

Teremos $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Os números negativos não têm logaritmos

As inequações logarítmicas gozam de:

$$\log_a x, < k \Rightarrow \{x < a^k \quad se \ a > 1 \ \wedge x > a^k \ se \ 0 < a < 1$$

$$\log_a x > k \Rightarrow \{x > a^x \ se \ a > 1 \wedge \ 0 < x < a^x \ \ se \ \ 0 < a < 1$$

- A função logarítmica e crescente se a> 1 e decrescente se

0 <a < 1

- Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um

  número negativo o sentido de desigualdade muda.

O que será então, a inequação logarítmica?

Fácil, você ja conhece a definição de equação logarítmica como uma igualdade que contem funções logaritmicas.e sabe que uma inequação qualquer e uma desigualdade, então poderá dar a definição sem problemas

Definição

Inequação logarítmica é toda a desigualdade que contém função logarítmica.

Consideremos alguns exemplos:

Actividades

Qual dos números é maior?

$a) \log_7 6 \quad e \quad \log_{0,7} 6 \qquad\qquad b) \log_7 6 \ \ e \quad \log_8 9$

Resolução

a) $\log_7 6 > 0$, se $\log_{07} 6 < 0 \Rightarrow \quad \log_7 6 > \log_{0,7} 6$

b) $\log_7 6 < \log_7 7 = 1$, se $\log_8 9 > \log_8 8 \Rightarrow \log_7 6 < \log_8 9$

2. Resolva as inequações

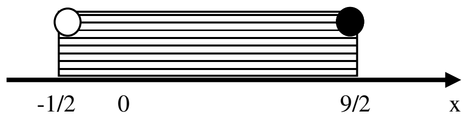
a) $\log_{0,1}(2x+1) \geq -1$

Não se esqueça que à semelhança do que fizemos nas equações logaritmos, temos que em primeiro lugar determinar o domínio de existência de cada função que faz parte da desigualdade (inequação) dada, e depois considerar como solução, apenas os valores de x que pertencem a intersecção desses domínios.

$$\log_{0,1}(2x+1) \geq -1 \quad \Rightarrow$$

$$2x+1 \leq (0{,}1)^{-1} \quad \wedge \quad (2x+1) > 0$$
$$2x+1 \leq 10 \quad \wedge \quad 2x > -1$$
$$x \leq \frac{9}{2} \quad \wedge \quad x > -\frac{1}{2}$$

Solução x $\in \left]-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$

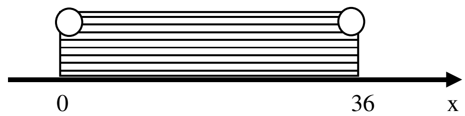


b) $\log_3 \frac{x}{4} < 2$

$\Rightarrow \frac{x}{4} < 3^2 \quad \Rightarrow \quad x < 4.9 \Rightarrow x < 36$

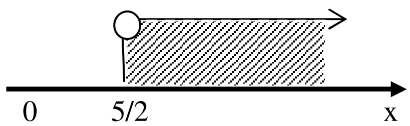
domínio $\frac{x}{4} > 0$

Solução $x \in \left]0; 36\right[$



c) $\lg(2x-5) + \lg(3x+7) > 4\lg 2$

Domínio 2x – 5> 0 e 3x + 7> 0 $\Rightarrow x > 5/2 \quad x > -7/3$



D: x $\in \left]5/2; +\infty\right[$

$$\lg(2x-5(3x+7)) > \lg 2^4$$
$$(2x-5)(3x+7) > 16$$

$$6x^2 + 14x - 15x - 35 > 16$$
$$6x^2 - x - 51 > 0$$

Agora, escolha o método mais fácil para resolver a inequação quadrática

Por exemplo a tabela de sinais

$$\Delta = 1 - 4.6.(-51) = 1225$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 35}{12}$$

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{17}{6}$$

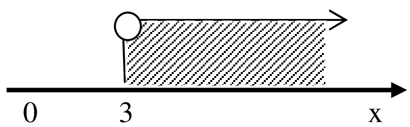
Tabela de sinais

x	$-\infty$	$-\frac{17}{6}$		**3**	$+\infty$
$x + \frac{17}{6}$	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**
x - 3	**-**	**-**	**-**	**0**	**+**
$\left(x + \frac{17}{6}\right)(x+3)$	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**

Solução $s = \left]-\infty; -\frac{17}{6}\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

A solução da inequação logarítmica será a intersecção do dominio da função logaritmica

$$s_f = s \cap D_f \quad = \left]3\ ;\ +\infty\right[$$



Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Inequação logaritmica é toda a desigualdade que contém função logaritmica
- Domínio da função logaritmica é R^+
- Na resolução de problemas ligados aos logaritmos as vezes

é necessario a passagem da base do logaritmo para outra

através da fórmula: $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ em particular se a = b

teremos $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

- Os números negativos não têm logaritmos
- As inequações logarítmicas gozam de:

$$1)\ \log_a x, < k \Rightarrow \{x<a^k \ \ se\ \ a>1 \ \ \wedge x>a^k \ \ se\ \ 0<a<1$$

$$2)\log_a x > k \Rightarrow \{x>a^x \ se\, a>1 \wedge \ 0<x<a^x \ \ se\ \ 0<a<1$$

A função logarítmica e crescente se a> 1 e decrescente se

0 <a < 1

- Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

Muito bem, tente resolver sozinho os exercícios que se seguem depois consultemos as soluções no final do módulo.

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1) Associe (V) ou (F)

$a)\ \log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 25$

$\text{b)}\log_3 50 > \log_3 45$

$c)\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 81$

2) Resolva as seguintes inequações

a) $\log_5 (3x-1) < \log_5 x$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (-x^2+5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x+2) + 2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$

d) $\log_5 (x-2) + \dfrac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$

3. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_2 (2x-5) < \log_2 6$

b) $\log_{\frac{1}{5}} (-x^2 + 5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x-3) < 1$

d) $\log_2 (x^2 - 6x) < \log_2 7$

e) $\log(3x-5) \leq \log(x-1)$

f) $l\,og_2\, x + \dfrac{1}{\log_2 x} \geq 2$

g) $\log_{\frac{1}{2}} (x-1) + 2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x-2)$

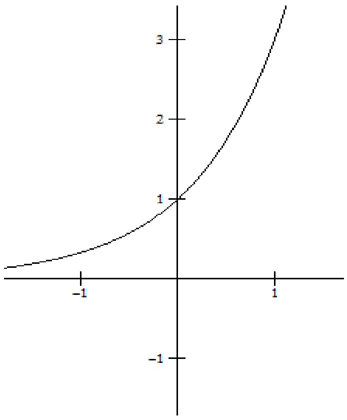
Soluções Modulo 1

Soluções do Modulo 1

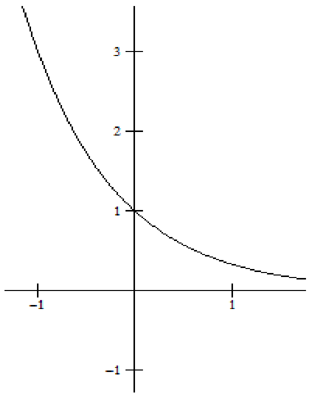
Confira as suas respostas no final do módulo.

Lição1

a) $y = 3^x$

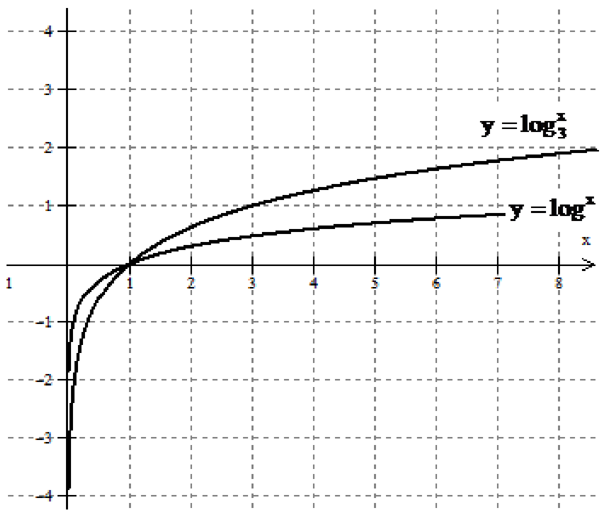


b) $y = (1/3)^x$



c) $y = \log_3 x$

d) $y = \log_{10} x$



Lição2

1) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

2) $3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Rightarrow 3^x = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$

3) $\sqrt{2^x}.\sqrt{3^x} = 36 \Rightarrow \sqrt{6^x} = 6^2 \Rightarrow 6^{\frac{x}{2}} = 6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$

5) $7^{(x+1)(x-2)} = 1$

$7^{(x+1)(x-2)} = 7^0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

6) $3^{6-x} = 3^{3x-2} \Rightarrow 6 - x = 3x - 2 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$

7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-5x+9}$

$3x + 1 = -5x + 9$

$8x = 8$

$x = 1$

8)
$$8^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$$
$$\left(2^3\right)^{\sqrt{x+1}} = 2^6.2^{\sqrt{x+1}}$$
$$3\sqrt{x+1} = 6+\sqrt{x+1}$$
$$3\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 6$$
$$2\sqrt{x+1} = 6$$
$$\sqrt{x+1} = 3$$
$$x+1 = 9$$
$$x = 8$$

9) $5^{x^2-2x} = 0,2 \Rightarrow 5^{x^2-2x} = \frac{2}{10} \Rightarrow 5^{x^2-2x} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{x^2-2x} = 5^{-1} \Rightarrow x^2-2x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$

10) $2^{2x}-3.2^x+2=0$ Substituindo 2^{2x} por $\left(2^x\right)^2$ e 2^x por y teremos:

$2^{2x}-3.2^{2x}+2=0 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 - 3.2^x + 2 = 0 \Rightarrow y^2-3y+2=0$

$\Delta = 9-8 = 1$

$y_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ ou $y_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

logo: $\begin{cases} \text{para } y=1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{para } y=2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Lição3

1. a) $\log_2 8$

$\log_2 8 \Leftrightarrow 2^x = 8$ por definição

$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \log_2 8 = 3$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$

$$c)\ \log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^3}\right)^x = 3^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{-3}\right)^x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-3x} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3} = -\frac{1}{6}$$

$$d)\ 2^{-3\log_2 2} = 2^{-3.1} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$e)\ 3^{2\log_3 3}\ .\ \log \sqrt[3]{3} = 3^{2.1}.\log 3^{\frac{1}{3}} = 3^2.\frac{1}{3}\log_3 3 = 9.\frac{1}{3} = 3$$

$$f)\ \log_{27} 9 \Rightarrow 27^x = 9 \Rightarrow 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$g)\ \log_2 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow \log_2 2^{\sqrt{3}} = x \Rightarrow 2^x = 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$h)\ \log_{\left(\frac{1}{27}\right)} \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\log_{\left(\frac{1}{27}\right)} \left(\frac{1}{9}\right) = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(3^{-3}\right)^x = 3^{-2} \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$i)\ \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625}$$

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625} = x \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x = \frac{1}{625} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$$

j) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2\log_{36} 6$

Calculos auxiliares

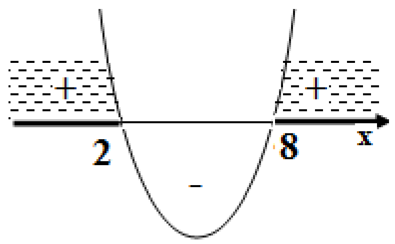
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-3x} = 2^{-1} \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \log_{36} 6 = x \Leftrightarrow 36^x = 6 \Rightarrow 6^{2x} = 6 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2\log_{36} 6 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

2. Determine o domínio de existência das seguintes funções logarítmicas

a) $y = \log_6 \left(x^2 - 10x + 16\right)$

logaritmando $x^2 - 10x + 16 > 0$



Resolvendo a inequação quadrática segundo as regras

$D = \left\{ x \in R \setminus \left(x < 2 \ \vee \ x > 8\right) \right\}$

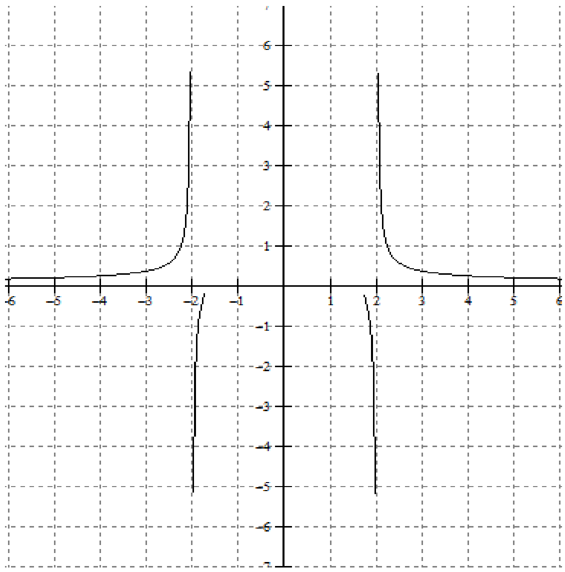
b) $y = \log_{\left(x^2 - 3\right)} 2$

Resolução

$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow$

$x^2 - 3 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Figura



$$D = \{x^2 - 3 > 0 \cap x^2 - 3 \neq 1\}$$

$$D = \{\, x \in R \setminus (x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}) \wedge x \neq \pm 2 \,\}$$

Lição 4

1. Associe (V) verdadeiro ou (F) falso

a) $\log_3 5^6 = 6\log_3 5$ (V)

b) $\log_2 \sqrt[10]{3} = \dfrac{1}{10}\log_2 3$ (V)

c) $\log_2 3^8 = 3\log_2 8$ (F)

d) $\log_5 8 - \log_5 3 = \log_5 5$ (F)

2. Resolva as equações seguintes logarítmicas

a) $\log_{\frac{1}{5}} 1 = x$

b) $\log_4 (2x-9) = \log_4 3$

$2x - 9 > 0 \Rightarrow 2x > 9 \Rightarrow x > \dfrac{9}{2}$

Condição de existência do logarítmo

$$\log_4(2x-9)=\log_4 3 \iff 2x-9=3$$
$$\iff 2x = 9+3 \iff 2x=12$$
$$\iff x=6$$

A resposta encontrada satisfaz a condição de existência, por isso **6** é solução da equação.

c) $\log_4\left(x^2-2x\right)=\log_4(3x-6)$

1°) Condições de existência dos logarítmos

$$\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 3x-6>0 \end{cases}$$

2°)

$$\log_4\left(x^2-2x\right)=\log_4(3x-6) \iff x^2-2x=3x-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=2 \ \vee \ x=3$$

3°) Verificando se as respostas encontradas satisfazem as condições de existência.

para $x=2$

$2^2-2.2>0 \Rightarrow 0>0$ (F)

$3.2-6>0 \Rightarrow 0>0$ (F)

para x = 3

$3^2-2.3>0 \Rightarrow 3>0$ (v)

$3.3-6>0 \Rightarrow 3>0$ (v)

S: x = 3

d) $3\log_3 x+2=\dfrac{1}{\log_3 x}$

<u>Resolução</u>

1°) Condições de existência x> 0

$$\text{Seja} \quad y = \log_2 x \Rightarrow 3y + 2 = \frac{1}{y} \Rightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = -1 \vee y = \frac{1}{3}$$

2°) Substituíndo o **y** na expressão $\log_3 x = y$ pelos valores obtidos na equação de variável y teremos:

$$\begin{cases} y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

3°) Verificando se as respostas obtidas satisfazem as condições de existência:

$\frac{1}{3} > 0$ (V)

$\sqrt[3]{3} > 0$ (V)

$S = \left\{ \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3} \right\}$

e) $\log(x+3) + \log 4 = \log x^2$

1°) Condições de existência dos logarítmos $x+3 > 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

2°) $\log(x+3) + \log 4 = \log x^2$

$\Rightarrow \log 4(x+3) = \log x^2 \Rightarrow 4(x+3) = x^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = -2 \vee x = 6$

3°) Verificando se as respostas obtidas satisfazem as condições de existência:

$-2+3 > 0 \Rightarrow 1 > 0$ (V) $\quad (-2)^2 > 0$ (V)

$6+3 > 0 \Rightarrow 9 > 0$ (V) $\quad 6^2 > 0$ (V)

$$S=\{-2,6\}$$

f) $\log_8 x - \log_4(x+1)+\frac{1}{6}\log_2(x+1)=0$

<u>Resolução;</u>

1°) Condições de existência dos logarítmos x> 0 e x + 1> 0

<u>Atenção</u>: Os logarítmos têm bases diferentes, para aplicar as propriedades é necessário mudar a base, neste caso todas as bases sào potências de base **2**, é conviniente usar a base **2.**

2°)

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 8}-\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}+\frac{1}{6}\log_2(x+1)=0$$

$$\frac{\log_2 x}{3}-\frac{\log(x+1)}{2}+\frac{1}{6}\log_2(x+1)=0$$

Achando m.m.c dos denominadores:

$$\frac{2\log_2 x-3\log_2(x+1)+\log_2(x+1)}{6}=\frac{0}{6}$$

$$2\log_2 x-3\log_2(x+1)+\log_2(x+1)=0$$

$$\log_2 x^2-\log_2(x+1)^3+\log_2(x+1)=0$$

$$\log\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3}=0$$

(mas 0 pode ser $\log_2 1$)

$$\log\frac{x^2}{(x+1)^2}=\log_2 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+1)^2}=1$$

$$x^2=(x+1)^2$$

$$x^2=x^2+2x+1$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

3°) Verificando se a resposta obtida satisfaz as condições de existência:

$$-\frac{1}{2} > 0 \quad (F)$$

$$-\frac{1}{2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > 0 \quad (V)$$

S = ϕ como pode ver, segundo a condição de existência do logarítmo x deve tomar apenas valores positivos, logo $-\frac{1}{2}$ não é solução.

Lição5

1.) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 4^{x-1} \Rightarrow 4^{-x} < 4^{x-1} \Rightarrow -x < x-1 \Rightarrow -2x < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2.) $5^{x^2-5x} \leq 1$

$5^{x^2-5x} \leq 5^0$

$x^2 - 5x \leq 0$

$x(x-5) \leq 0$

$S_f = [0;5]$

3) $(0,1)^{6x^2-5x} \geq 10 \Rightarrow 10^{-6x^2+5x} \geq 10 \Rightarrow -6x^2 + 5x \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6x^2 + 5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \leq 0$

$\Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

solução : $x \in [2;3]$

$$4)\ 3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{27} \Rightarrow 3^{x+1} < \frac{3^{8x^2}}{3^3} \Rightarrow 3^{x+1} < 3^{8x^2-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 < 8x^2 - 3 \Rightarrow -8x^2 + x + 4 < 0 \Leftrightarrow 8x^2 - x - 4 > 0$$

$$\Delta = 1 + 128 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{129}}{16} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{129}}{16} \end{cases}$$

$$\text{solucao: } x \in \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{129}}{16}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{129}}{16} ; +\infty\right[$$

Lição6

1). Associe (V) ou (F)

a) $\log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 25 \quad (V)$

pois a base é um número entre 0 e 1,
o maior logaritmo tem logaritmando menor

b) $\log_3 50 > \log_3 45 \quad (V)$

pois a base e um número maior que 1,
o logaritmo maior tem logaritmando maior

c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 81 \quad (F)$

pois a base e um número entre 0 e 1,
o maior logaritmo tem logaritmando menor

2) a) $\log_5(3x-1) < \log_5 x$

Resolução

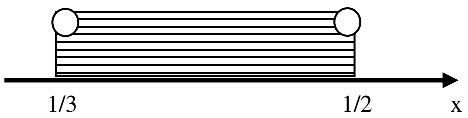
41°) Condições de existência

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1>0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$\log_5(3x-1) < \log_5 x$

3°) Verificar se as soluções encontradas satisfazem a inequação, determinando a intersecção entre o resultado encontrado na inequação e a condição de existência.



$S = \left\{ x \in R \setminus \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \right\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$

<u>Resolução</u>

1°) Condições de existência

$-x^2 + 5x > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

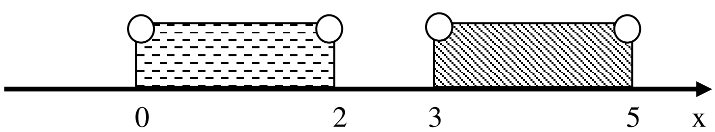
$\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x < 6$

(não se esqueça que o sinal de desigualdade muda quando a base e número entre 0 e 1)

$-x^2 + 5x < 6 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$S = \{ x \in R \setminus 0 < x < 2$ ou $3 < x < 5 \}$

$$c)\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2)+2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

<u>Resolução</u>

1°) Condições de existência

$$\left.\begin{array}{l} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ 2x-1>0 \Rightarrow x>\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} > \log$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left[(x+2).\frac{1}{4}\right] > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$\Rightarrow (x+2).\frac{1}{4} < 2x$$

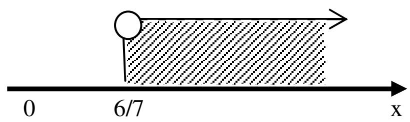
$$\Rightarrow x+2<8x-4$$

$$\Rightarrow x-8x<-2-4$$

$$\Rightarrow -7x<-6$$

$$\Rightarrow x>\frac{6}{7}$$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$S=\left\{x\in R \setminus x>\frac{6}{7}\right\}$$

$$d)\ \log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5} > \log_5 2$$

Resolução

1°) Condições de existência

$$\left.\begin{array}{l} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x-3>0 \Rightarrow x>3 \\ x-3\neq 1 \Rightarrow x\neq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x>3 \quad \text{e} \quad x\neq 4$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5}>\log_5 2$$

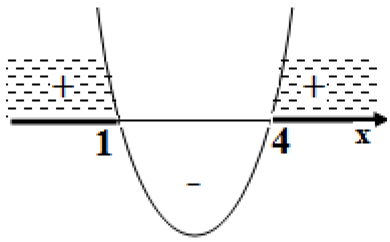
Substituíndo $\dfrac{1}{\log_{(x-3)}5}$ por $\log_5(x-3)$

Observação

$$\frac{1}{\log_{(x-3)}5}=\frac{\log_5 5}{\log_5(x-3)}$$

$$\log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5}>\log_5 2$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-2)+\log_5(x-3)>\log$$



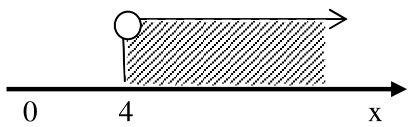
$$\Rightarrow \log_5(x-2)(x-3)>\log_5 2$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)>2$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6>2$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4>0$$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$S=\{x\in R \setminus x>4\}$$

3. Resolva as seguintes inequações:

$a)\ \log_2(2x-5) < \log_2 6$

1) $2x-5>0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

2) $\log_2(2x-5) < \log_2 6 \Rightarrow 2x-5 < 6$

$\Rightarrow 2x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{2}$

3) $S = \left\{ x \in R \setminus \frac{5}{2} < x < \frac{11}{2} \right\}$

$b)\log_{\frac{1}{5}}(-x^2+5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4$

1) $-x^2+5x>0 \Rightarrow 0 < x < 5$

2) $\log_{\frac{1}{5}}(-x^2+5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4 \Rightarrow -x^2+5x > 4$

$\Rightarrow -x^2+5x-4 < 0 \Rightarrow x<1 \vee x > 4$

3) $\mathrm{S}=\{ x \in R \setminus 0<x<1 \vee 4<x<5 \}$

$c)\log_2(x^2-6x) < \log_2 7$

1) $x^2-6x > 0 \Rightarrow x<0 \wedge x>6$

2) $\log_2(x^2-6x) < \log_2 7 \Rightarrow x^2-6x < 7$

$\Rightarrow x^2-6x-7<0 \Rightarrow 0 < x < 6$

3) $\mathrm{S}=\varnothing$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1$

1) $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x-3) > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 6 > 1$

$\Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$

3) $S = \left\{ x \in R \setminus x > \frac{7}{2} \right\}$

e) $\log(3x-5) \le \log(x-1)$

1)

$$\left.\begin{array}{r} 3x-5 > 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

2) $\log(3x-5) \le \log(x-1) \Rightarrow 3x-5 \le x-1$

$\Rightarrow 2x \le 4 \Rightarrow x \le \frac{4}{2} \Rightarrow x \le 2$

3) $S = \left\{ x \in R \setminus \frac{5}{3} < x \le 2 \right\}$

f) $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2$

1) $x > 0$

2) $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2$ seja $\log_2 x = y$

$\Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} \ge 2$

$\Rightarrow y^2 + 1 - 2y \ge 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 \ge 0 \Rightarrow y \ge 1$

logo: $\log_2 x \ge 1 \Leftrightarrow \log_2 x \ge \log_2 2 \Rightarrow x \ge 2$

3) $S = \{ x \in R \setminus x > 2 \}$ se x for igual a 2

a desigualdade vai ser falsa

Módulo 3 de Matemáica

Teste Preparação de Final de Módulo

Error! Reference source not found.

Este teste, querido estudante, seve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

I Função exponêncial

1. Resolva as seguintes equações exponênciais

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{125}{64}$

b) $4 = \sqrt{2^x}$

c) $5^x = 5\sqrt[3]{25}$

d) $6^{2x} - 7.6^x + 6 = 0$

2. Resolva as seguintes inequações exponênciais

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1$

b) $2^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^3$

3. Considere as funções $y = 2^x$ e $y = x^2 - 3x + 4$

a) Represente-as no mesmo S.C.O

b) Quais são os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções?

II. Função logarítmica

1.Resolva as seguintes equações a) $\log_3(\log_5 x) = 0$

b) $\log_2 x = \log_2 x^2 - \log_2 7$

c) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

d) $\log_3(x-1)+\log_3(x-3)=\log_3 48$

e) $\log_6(x^2-5x)-\log_6(x-5)=1$

f) $\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 3$

g) $\log_9 \frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\log_3(x-5)$

2. Resolva as seguintes inequações

a) $\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$

Soluções do teste de preparação do Módulo 3

1.

$$a)\left(\frac{4}{5}\right)^{x}=\frac{125}{64}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{x}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{x}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\Rightarrow x=-3$$

$$b)\,4=\sqrt{2^{x}}\Rightarrow 2^{2}=2^{\frac{x}{2}}\Rightarrow\frac{x}{2}=2\Rightarrow x=4$$

$$c)\,5^{x}=5\sqrt[3]{25}\Rightarrow 5^{x}=5.5^{\frac{2}{3}}\Rightarrow 5^{x}=5^{\frac{5}{3}}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$d)\,6^{2x}-7.6^{x}+6=0$$

$$\left(6^{x}\right)^{2}-7.6^{x}+6=0$$

$$\text{seja: }\Delta=25\Rightarrow\begin{cases}y_1=1\\ y_2=6\end{cases}$$

$$\text{se}\begin{cases}y=1\Rightarrow 6^{x}=6^{0}\Rightarrow x=0\\ y=6\Rightarrow 6^{x}=6\Rightarrow x=1\end{cases}$$

2.

$$a)\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\geq 1\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\Rightarrow x\geq 0$$

$$R: x\in\left[0;+\infty\right[$$

$$b)\,2^{-5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leq 2^{3}$$

$$\begin{cases}2^{-5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leq 2^{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geq 2^{-5}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leq 2^{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{-x}\geq 2^{-5}\\ 2^{-x}\leq 2^{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 5\\ x\geq -3\end{cases}$$

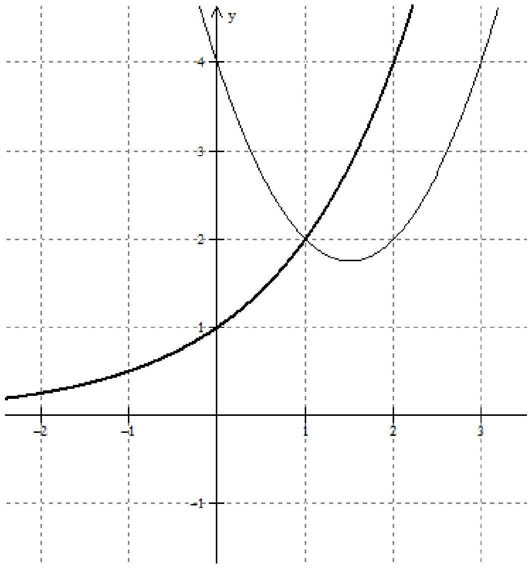
$$x\in\left[-3;5\right]$$

3. Considere as funções $y=2^{x}$ e $y=x^{2}-3x+4$

a) Represente-as no mesmo S.C.O

$y = 2^x$ **e** $y = x^2 - 3x + 4$

x	-2	-1	0	1	1,5	2	3	4
$y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{4}$	4	8	$-\frac{1}{2}$
$y = x^2 - 3x + 4$	-	7	4	2	1,75	2	4	8



b) Indique os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções?

Respostas: os gráficos intersectam-se num único ponto cujas coordenadas são x = 1; y = 2

II. Função logarítimca

1.

a) $\log_3(\log_5 x) = 0 \Rightarrow 3^0 = \log_5 x$

$\Rightarrow 1 = \log_5 x \Rightarrow x = 5$

b) $\log_2 x = \log_2 x^2 - \log_2 7$

$\log_2 x = \log_2 \frac{x^2}{7}$

$x = \frac{x^2}{7} \Rightarrow x^2 - 7x = 0$

$x_1 = 0$ ou $x_2 = 7$

c) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} = 2$ seja $y = \log_2 x$

$y + \dfrac{1}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

Resposta: $1 = \log_2 x \Rightarrow x = 2$

d) $\log_3(x-1) + \log_3(x-3) = \log_3 48$

$1^0)$ $\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x-3>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>3$

$2^0)$ $e) \log_3(x-1) + \log_3(x-3) = \log_3 48$

$\Rightarrow \log_3\left[(x-1)(x-3)\right] = \log_3 48$

$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 48$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 48$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 45 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 196, \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

$\Rightarrow x = -5 \vee x = 9$

$3^0)$ $S = \{9\}$

$$e)\log_6\left(x^2-5x\right)-\log_6(x-5)=1$$

$$1^0)\begin{cases}x^2-5x>0\\ x-5>0\end{cases}\Rightarrow \text{x} <0 \text{ ou } \text{x} >5$$

$$2^0)\ \log_6\left(x^2-5x\right)-\log_6(x-5)=1 \quad 3)$$

$$\text{S}=\ \{6\}$$

$$\Rightarrow\ \log_6\frac{x^2-5x}{x-5}=1$$

$$\Rightarrow\ \log_6 x=1$$

$$\Rightarrow\ x=6$$

$$f)\ \log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 3$$

$$1^0)\ \text{x} > 0 \qquad 2^0)\ \log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 3$$

$$\Rightarrow\ \log_2 x^2+\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=\log_2 3$$

$$\Rightarrow\ \log_2 x^2+\frac{\log_2 x}{-1}=\log_2 3$$

$$\Rightarrow\ \log_2 x^2-\log_2 x=\log_2 3$$

$$\Rightarrow\ \log_2\frac{x^2}{x}=\log_2 3$$

$$\Rightarrow\ \log_2 x=\log_2 3$$

$$\Rightarrow x=3$$

$$3^0)\ \text{S}=\{3\}$$

2. Inequações

$$a)\ \log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+5x\right)>\ \log_{\frac{1}{2}}6$$

Resolução

1°) Condições de existência

$-x^2 + 5x > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

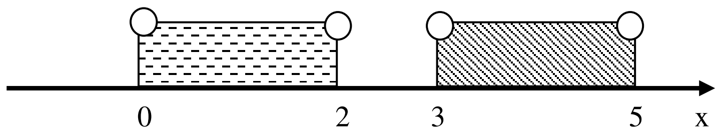
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+5x\right) > \log_{\frac{1}{2}} 6 \Leftrightarrow -x^2+5x < 6$$

(nao se esqueca que o sinal de desigualdade muda quando a base e numero entre 0 e 1)

$-x^2 + 5x < 6 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



S=

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$

1) $\begin{cases} x-1>0 \\ 3x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)\frac{1}{4} \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)\frac{1}{4} \leq 3x-2 \Rightarrow x-1 \leq 12x-8$

$\Rightarrow -11x \leq -7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{11}$

3) $S = \{x \in R \setminus x > 1\}$