MÓDULO 2

Matemática

Equações, Inequações e Sistemas de Equações

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 2

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em lições. Cada lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem

Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Equação Linear

Introdução

Depois de estudar os polinómios, vai estudar as equações polinomiais de

Diferentes formas. Nesta lição, as equações lineares ou equações do primeiro, equações cujo polinómio envolvido é de uma variável e de grau 1 (um).

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- Identificar os coeficientes numa equação linear
- Indicar as condições para a solução de uma equação linear
- Resolver uma equação linear

Equações lineares

Antes de mais nada, vamos recordar alguns conceitos básicos sobre

Equações.

<u>O que será então uma equação?</u>

Definição

Chama-se equação a toda a igualdade em que figura, pelo menos uma letra que é chamada incógnita ou variável e esta representa um valor desconhecido.

Isso mesmo, você ainda se recorda muito bem.

<u>Coeficientes duma equação?</u>

Definição

São os valores constantes (conhecidos) duma equação

<u>Incógnitas duma equação?</u>

Definição

São os valores desconhecidos duma equação

E a solução da equação?

Definição

Como você já sabe, a solução da equação é todo o número que atribuido a incógnita, transforma a equação numa igualdade verdadeira. Esta definição é válida para todo o tipo de equação.

Certo.

Uma equação pode ter uma solução, mais do que uma solução ou nenhuma.

Quando a equação tem pelo menos uma solução, diz-se que ela é

Possível no caso contrário diz-se que ela é **impossível**.

Resolver uma equação significa obter o seu conjunto- solução (ou simplesmente solução).

Duas equações com soluções iguais dizem-se equações equivalentes

Exemplos de equações

$$2x+6=0;\ 3k=\frac{1}{9}\ ;x^2+2x+1=0;\ y^3-9=0\ \text{ etc}$$

Consideremos agora, a equação do 1°grau.

Equação Linear ou do 1° grau

Definição

Equação linear ou equação do 1° grau é a equação polinomial do tipo ax+b=0,onde $a\neq 0$,

$a,b\in$ R.

A forma **ax+b=0** chama – se forma canónica da equação linear.

Soluções:

De acordo com os valores de a e b, dois casos são possiveis:

$a\neq 0$ e $b = 0$ a equação é possível e determinada (única solução)

$a\neq 0$ e $b\neq 0$ a equação é possível e determinada (única solução)

Exemplos de equações lineares

4x- (x-1) =0

X+5= x+3

3. $x - \frac{x-2}{3} = \frac{2-x}{4}$

Como já sabe, o domínio de existência da equação polinomial é **R,** mas no caso contrário é necessário determinar esse domínio.

Pronto, já recordamos alguns conceitos que serão úteis nesta lição. Mas antes podemos resolver a equação linear:

<u>Como resolver a equação linear?</u>

Não se esqueça dos princípios de equivalência de equações " ao adicionarmos o mesmo valor aos dois membros duma equação obtemos uma equação equivalente a dada".

Exemplo:

2x + 7 = - 8 – 3x

$2x + 7 - 7 + 3x = -8 - 3x - 7 + 3x$ Implica 2x + 3x = - 7 – 8

Agora podemos adicionar os termos semelhantes membro a membro, teremos:

5x = - 15

Dividindo os dois membros da equação por 5 uma vez que o nosso objectivo é encontrar o valor de x que satisfaz a equação.

Teremos $\frac{5x}{5} = \frac{15}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 3$ Por outro lado, na resolução das equações podemos aplicar directamente a regra prática para evitar escrever muito.

Significa fazer transferência de termos de um membro para conforme a necessidade de manter os termos de x no primeiro membro da equação. "Para passar um termo de um membro para o outro deve-se trocar o seu sinal".

Por exemplo para ***2x*** + 7 = - 8 – 3x pode passar logo para

2x + 3x = - 7 – 8 o que significa o termo de -3x passou para o primeiro e foi trocado o seu sinal, e o 7 passou para o segundo membro da equação com sinal trocado também. Finalmente adicionam-se os termos em cada membro.

De certeza que já se recordou dos procedimentos para a resolução da equação linear, pois não é novidade para si mas, para se preparar

melhor para a resolução de equações quadráticas, vamos resolver mais exercícios mas antes vamos fazer o resumo do que já vimos.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Equação linear é a equação polinomial do tipo $ax+b=0$,onde $a\neq 0$ a, $b \in R$

A forma **ax+b=0** chama – se forma canónica da equação linear

De acordo com o valor de a, dois casos são possiveis:

- $a\neq 0$ e $b = 0$ equação é possível e determinada (única solução)
- $a \neq 0$ e $b\neq 0$ a equação é possível
- O dominio de existência da equação polinomial é **R**

Na resolução de equações ao adicionarmos o mesmo valor aos dois membros duma equação, obtemos uma equação equivalente a dada.

Vamos resolver algumas equações como forma de medir o nível de compreensão da matéria.

Actividades

Actividades

Consideremos as seguintes equações:

1). $4x - (x - 1) = 0$

2). $x + 5 = 2x + 3$

3). $x - \frac{x - 2}{3} = \frac{2 - x}{4}$

Vamos resolver em conjunto

1.

$$4x - (x - 1) = 0$$
$$4x - x + 1 = 0$$
$$3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Primeiro desembaraçar os parênteses segundo a ordem das operações e depois proceder com a transferência dos termos de forma a manter os de x no primeiro membro, e finalmente efectual as adicições em cada membro

2.

$$x + 5 = 2x + 3$$
$$x - 2x = -5 + 3$$
$$-x = -2$$
$$x = 2$$

3.

$$\frac{x}{\underset{(12)}{1}} x - \frac{x - 2}{\underset{(4)}{3}} = \frac{2 - x}{\underset{(3)}{4}}$$

$$12x - 4(x - 2) = 6 - 3x$$
$$12x - 4x + 8 - 6 + 3x = 0$$
$$11x + 2 = 0$$
$$x = -\frac{2}{11}$$

Certo, você resolveu correctamente, primeiro calculou m.m.c dos

Denominadores, aplicou os princípios de equivalência.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Dadas as seguintes equações:

1) Indica os coeficientes a e b

2) Resolva as equações dadas

a) $2x - 5 = 0$,

b) $3x -5 = x +1$

c) $5 (3-2x) = -3 (3x – 4)$

d) $3-7 (1 -2x) = 5 – (x +9)$

e) $\frac{x}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{x+1}{6}$

f) $\frac{2x-3}{6} - \frac{x-1}{8} = \frac{3x-5}{12}$

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas no final do módulo.

Lição 2

Equação quadrática ou equação do segundo grau

Introdução

Caro estudante o capítulo sobre as equações quadráticas não é novo para si, já foi tratado no primeiro ciclo. Porém, voltaremos a estudar as equações quadráticas de forma a prepará-lo melhor para a resolução de equações de grau superior a dois, que vamos estudar nas próximas lições.

A equação quadrática ou equação do segundo grau pode ser resolvida com base na lei de anulamento do produto, bem como aplicando a fórmula resolvente.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* uma equação quadrática incompleta.
- *Resolver* uma equação quadrática completa.
- *Resolver* uma equação paramêtrica

Equaçào quadrática ou equação do segundo grau

Vamos fazer uma pequena revisão sobre as equações quadráticas, você ainda se recorda do conceito de equação quadrática? Pense um pouco.

Isso mesmo, definiu a equação quadrática da seguinte forma:

<u>Definição</u>

Equação quadrática é toda equação polinomial do tipo $ax^2+bx+c=0$ onde a≠0 a, b e c são números reais e recebem o nome de coeficientes.

Recorde-se que:

- Às equações quadráticas também se dá o nome de equaçòes do 2°(segundo) grau,pois,olhando para os termos do trinómio à esquerda na nossa fórmula, o termo de maior grau é ax^2(grau 2).

- As equações quadráticas podem ser:

Incompletas, completas ou paramêtricas

- Quando b e\ou c são nulos (iguais a zero) a equação quadrática

Diz-se **Incompleta**

Exemplo:

$2x^2 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0 \qquad 5x^2 + 20x = 0$

- Quando todos os coeficientes são diferentes de zero, a equação quadrática diz-se **Completa**:

Exemplo

$x^2 + 5x + 6 = 0$; $x^2 + 22x + 121 = 0$; $3x^2 + 15x + 7 = 0$; $-3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

- Quando a equação quadrática, para além da incógnita considerada contém outra variável, denominada parâmetro diz-se **paramêtrica**.

Exemplo: $kx^2 + kx - 4 = 0$

Para resolver as equações do 2° grau ou quadráticas, aplica-se **a Lei de Anulamento do produto** ou a **Fórmula resolvente**.

O que é que nos diz a Lei de Anulamento do Produto?

Esta lei será útil para você decidir sobre as soluções da equação quadrática, passando pela factorização do polinómio envolvido.

Lei de anulamento do produto

Um produto A.B de factores é nulo se e só se um deles, pelo menos, for zero. Ou seja se A = 0 ou B = 0 ou ambos iguais a zero.

Exemplo:

Resolver as equaçes aplicando a lei de anulamento do produto:

1)

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \lor x - 3 = 0$$
$$x_1 = 0 \lor x_2 = 3$$

2)

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x-5)(x-1) = 0$$
$$(x-5) = 0 \lor (x-1) = 0$$
$$x_1 = 5 \lor x_2 = 1$$

Existe uma fórmula resolvente para a resolução da equação quadratica, que facilita os cálculos e pode ser deduzida, recorrendo a factorização do trinómio

$ax^2 + bx + c$ e posteriormente aplicar a lei de anulamento do poduto.

Agora, preste atenção a dedução da fórmula resolvente:

Fórmula Resolvente

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Onde $b^2 - 4ac = \Delta$, a, b e c são números reais Δ (delta) chama-se binómio discriminante

Consideremos $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação quadrática para resolver procura-se transformá-la uma equação binómia.

1° Passo;

Divide-se a equaçào $ax^2 + bx + c = 0$ por **a** (coeficiente de x^2)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad /:(a)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2° Passo;

Adicionar aos dois membros da equaçào o quadrado da metade do coeficiente de x $\left(\frac{1}{2}.\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = 0 + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Desta forma encontramos um trinómio resultante de um quadrado perfeito, este era o nosso grande objectivo pois, esta forma nos permite factorizar o trinómio para depois aplicar a lei de anulamento do produto conforme nos referimos acima.

3° Passo;

Escrever o primeiro membro como quadrado de um binómio

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Estamos perante um caso notável $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ à esquerda, vamos continuar a usar os casos notáveis no passo seguinte.

4° Passo;

Passando o termo $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ para o primeiro membro será possível através de transformações algébricas encontrar mais um caso notável

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2=0$$

Estamos perante um caso notável $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right].\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]=0$$

5° Passo

O problema já está simplificado, é só aplicar a lei de anulamento do produto

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]=0 \quad \vee \quad \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \vee \quad x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Reunindo as duas soluçòes temos a fórmula resolvente da equaçào do 2° grau

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Designa-se a expressão sob o radical por $\Delta = b^2 - 4ac$ e chama-se discriminante.

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta > 0$ Teremos duas soluções distintas

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta < 0$ Não teremos duas soluções

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta = 0$ Teremos duas soluções iguais

Acabamos de deduzir a fórmula resolvente da equação quadrática, já se recordou? Não se esqueça que as soluções da equação dependem do valor do discriminante.

Resta-nos agora aplicá-la nos cálculos,

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$ 2) $x^2 + 22x + 121 = 0$ 3) $3x^2 + 15x + 7 = 0$

4) $-3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

Resolução:

Partindo desta fórmula podemos caminhar com sucesso

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

1) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.16 = 25 - 24 = 1$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais distintas

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-5 - 1}{2} = -3 \\ \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-5 + 1}{2} = -2 \end{cases}$$

$2)\ x^2 + 22x + 121 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 22^2 - 4.121 = 484 - 484 = 0$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais iguais

$$\Rightarrow \left\{ x_1 = x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-22+\sqrt{0}}{2} = \frac{-22}{2} = -11 \right.$$

$3)\ 3x^2 + 15x + 7 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4.3.7 = 325 - 84 = 231$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais distintas

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15-\sqrt{241}}{2.3} = \dfrac{-15-15,52}{6} = -\dfrac{30,52}{6} = 5,086 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15+\sqrt{241}}{2.3} = \dfrac{-15+15,52}{6} = \dfrac{0,52}{6} = 0,086 \end{cases}$$

$4)\ -3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

$4)\ -3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.(-3).\frac{1}{4} = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais distintas

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{4}}{2.(-3)} = \dfrac{-1-2}{-6} = -\dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{4}}{2.(-3)} = \dfrac{-1+2}{-6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Agora, vamos resumir o que acabamos de ver

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A equaçào quadrática ou equação do segundo grau pode ser resolvida com base na lei de anulamento do produto, bem como aplicando a fórmula resolvente.

- Um produto de dois factores é nulo se pelo menos um deles for nulo.

  A. B = 0 se A = 0 ou B= 0 Lei de anulamento do produto.

- Equação quadrática ou do segundo grau é toda aquela que pelos princípios de equivalência, possa ser reduzida à forma: $ax^2+bx+c=0$ com $a\neq 0$ a,b,c, $\in$ R, e recebem o nome de coeficientes.

- Quando b e\ou c sao nulos (iguais a zero) a equação quadratica diz-se Incompleta:

- Quando todos os coeficientes são diferentes de zero, a

  Equação quadrática diz-se Completa.

- Quando para além da incognita considerada existe mais uma denominada parâmetro

A fórmula resolvente da equação

$ax^2 + bx + c = 0$ é

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Δ o discriminante da equação pode assumir três valores a saber:

$\Delta > 0$ Equação tem duas soluções reais.

$\Delta < 0$ Equação não tem soluções reais.

$\Delta = 0$ Equação tem uma solução dupla.

.

Vamos a seguir, resolver os exercícios que se seguem para consolidação dos conteúdos que acabamos de ver

Actividades

Actividades

1. Resolva as equações incompletas seguintes

a) $2x^2=0$

$$x^2=\frac{0}{2}$$

$$x_{1,2}=\sqrt{0}=0$$

b) $x^2-4=0$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$x-2=0 \vee x+2=0$$

$$x_1=3 \quad \vee \quad x_2=-3$$

c) $5x^2+20x=0$

$$5x(x+5)=0$$

$$5x=0 \vee x+5=0$$

$$x_1=0 \vee x_2=-5$$

2. Resolva as equações aplicando a fórmula Resolvente

$x^2-3x+2=0$; $\Delta=b^2-4ac=9-4.2=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x_1=\frac{3-1}{2}=1 \quad \vee \quad x_2=\frac{3+1}{2}=2$$

Formidável. Você acertou pois seguiu todos os passos.. Por isso chegou às soluções desejadas. Agora vamos resolver uma equação paramétrica

3. Determinar o valor de **m** para o qual o valor mínimo da função**:**

$y=x^2-5x+m$ seja $-\frac{1}{4}$

Neste caso temo: a =1, b = -5 e c = m

Resolução:

Calculando Δ

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4.1.m \Rightarrow \Delta=25-4m$$

Sabemos que o valor mínimo é $\frac{-\Delta}{4a}$ assim:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{-(25-4m)}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$-25 + 4m = -1$$

$$-25 + 4m = -1$$

$$4m = -1 + 25$$

$$4m = 24$$

$$m = 6$$

Agora tente resolver sozinho os exercícios que lhe apresentamos a seguir caso não consiga, leia de novo a lição, consulte a um colega ou visite o CAA.

Avaliação

Avaliação

1. Resolva as equações abaixo recorrendo à fórmula resolvente.

a) $x^2 + 36x + 68 = 0$ b) $x^2 + 22x + 121 = 0$ c) $2x^2 + 15x + 7 = 0$

d) $x^2 + 8x + 4 = 0$ e) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

2. $2x^2 + (m + 3)x + m - 1 = 0$; é uma equção quadrática em ordem a x tendo como parâmetro m.

a) Indique os seus coeficientes.

b) Determine o valor de m de modo que a equação tenha uma raíz dupla.

3. Dada a equaçào, $x^2 + 3x + k = 0$

a) Resolva a equação de modo que $k = 0$

b) Determine k de modo que a equação admita reais iguais.

c) Determine k de modo que o produto seja positivo.

Conseguiu resolver correctamente todos os exercicios? Então, confira as suas respostas.

Óptimo, você esta preparado para resolver as equações do terceiro grau que iremos ver na próxima lição. Prossigamos!

Lição 3

Equação do 3°grau ou cúbica

Introdução

Depois da equação do 2°grau, vamos tratar de equações de grau a seguir.

Você já deve imaginar que a equaçào é denominada equação do 3°grau ou cúbica por causa do termo de maior grau que constituem o polinómio envolvido que neste caso é 3. Existe uma fórmula resolvente para a equação cúbica, que pode ser deduzida como foi nas equações quadráticas mas, nesta lição vamos estudar apenas as equações cúbicas simples cuja resolução será baseada na aplicaçào da lei de anulamento do produto.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* uma equação cúbica simples aplicando a lei de anulamento do produto.

Equacoes do terceiro grau ou cúbicas

Os conteúdos básicos para a sua aprendizagem nesta lição são:

- Decomposição de polinómios em factores
- Resolução de equações quadráticas e
- Lei de anulamento do produto.

Na lição anterior resolveu equações quadráticas de vários tipos, onde deparou com situaçòes de factorizaçào de polinómios. Está preparado para aprender sem sobressaltos. Mesmo assim, se persistirem algumas dúvidas, volte a ler a lição anterior.

Vamos agora definir formalmente a equação cúbica.

O que será então a equação cúbica?

<u>Definição</u>

Equação cúbica ou do 3º grau é toda aquela que pelos princípios de equivalência possa ser reduzida à forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$ $a,b,c,d, \in R$.

Exemplos:

1) $2x^3 - 16x = 0$ 2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ 3) $2x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

Existem vários tipos de equações cúbicas, mas iremos considerar caso simples como já foi referido na introdução.

Como podemos resolver as equações cúbicas?

Vamos usar a factorização do polinomio envolvido na equação e procedemos da mesma forma como nas equações quadráticas.

Como já deve esperar equação cúbica ou do 3º grau em geral tem três soluções.

Consideremos o caso:

<u>CASO d = 0</u> $\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx = 0$

Neste caso, reduz-se facilmente a equações simples, basta factorizar o polinómio envolvido na equação, recorrendo à colocação do factor comum em evidência que neste caso é o x, e depois aplicar a lei de anulamento do produto.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c = 0$$

<u>Exemplo:</u>

1) $2x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

Fácil, basta colocar em evidência o factor comum "x"

$$x(2x^2 + 3x - 2) = 0$$

Certo, aplique a lei de Anulamento do produto

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Óptimo, só resolver a equaçao quadrática que certamente, é do seu domínio

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

Soluções: $x_1 = 0 \vee x_2 = -2 \vee x_3 = \frac{1}{2}$

2) Vamos considerar mais um exemplo: $4x^3 = 16x$

$$\Rightarrow 4x^3 - 16x = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$4x = 0 \vee x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 0 ; x_2 = -2 ; x_3 = 2$$

Formidável, você é mesmo inteligente primeiro reduziu a equação a forma canónica, depois factorizou o polinómio e finalmente, aplicou a lei de anulamento do produto.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Equação do 3º grau ou cúbica é toda aquela que pelos princípios de equivalência possa ser reduzida à forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$ $a,b,c,d, \in R$.

- A resolução de equações cúbicas pode se basear, na lei de anulamento do produto factorizando o polinomio envolvido na equação procedendo da mesma forma como nas equações quadráticas.
- A resolução de equações cúbicas em geral resulta em três soluções.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Resolva as equações cúbicas que se seguem:

1)

$x^3 - 27 = 0$

$x^3 = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

Acertou claro, é tão simples como uma equação linear, passou o termo independente para o segundo membro e achou a raíz cúbica de 27 como se procede no conceito de potência

2)

$x^3 = 4x$

$x^3 - 4x = 0$

$x\left(x^2 - 4\right) = 0$

$x = 0 \vee x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$

Óptimo, primeiro reduziu a equação à forma canónica, factorizou o polinómio envolvido e depois aplicou a lei de anulamento do produto.

3) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

Você já sabe da divisibilidade de polinómios que:

P(x) = $x^3 - 4x^2 - x + 4$ então:

P(1) = 1-4-1+4 = 0 significa que P(x) é divivisível por x-1

P(-1)= -1- 4+1+4 = 0 significa que P(x) é divivisível por x+1

P(4)= 64 – 64 - 4+4 = 0 significa que P(x) é divivisível por x- 4

Logo: P(x) = $x^3 - 4x^2 - x + 4$ = (x – 1) (x + 1) (x – 4)

Desta maneira a equação vai tomar a forma

$(x - 1)(x + 1)(x - 4) = 0$

$(x - 1) = 0 \;\; v \;\; (x - 1) = 0 \;\; v \;\; (x - 1) = 0$

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$ e $x_3 = 4$

Isso mesmo, você acertou aplicando a lei de anulamento do produto depois de factorizar o

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1) $x^3 - x^2 = 0$

2) $-x^3 + 9x = 0$

3) $x^3 - 3x^2 = -2x$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo.Sucessos!

Lição 4

Equação biquadrática

Introdução

Existem equações que têm uma ligação directa com as equações quadráticas isto é, a sua resolução depende da resolução da equação quadrática associada o que significa que se a equação quadrática associada não tiver solução a equação correspondente também não terá solução. A equação biquadrática é uma dessas equações.

Nesta lição, vamos conhecer os procedimentos para encontrar as soluções das equações biquadráticas

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Identificar* uma equação biquadrática
- *Resolver* uma equação biquadrática.

Equação biquadrática

O que será equação biquadrática?

Bastante simples, você já conhece o conceito geral de uma equação, de equações dos 1˚, 2˚, 3˚, é só uma questão de progredir em graus para o quarto e Pronto, estará perante a equação do quarto grau. Mas atenção não para por aí, nesta forma, deve considerar os de expoente ímpar nulos. Aí sim, estará perante uma equação biquadrática.

Tal como nas equações anteriores, as soluções deste tipo de equação se obtém usando o mesmo processo.

Agora, a definição da equação biquadrática não é motivo de grande alarme, vamos definir com rigor matemático:

Definição

Equação biquadrática é toda equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que se reduz a equação quadrática, mediante uma substituição de x^2 por uma nova variável por exemplo **y** onde a≠0, a, b e c são números reais.

A resolução deste tipo de equações e muito simples pois, elas se reduzem sempre a equações quadráticas já conhecidas, depois que tenhamos mudado de variável.

Exemplo:

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ $\qquad$ $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

Para resolver equações biquadráticas, recorre-se a introdução de uma nova variável como por exemplo:

Para $ax^4 + bx^2 + c = 0$ substituindo $x^2 = t$, teremos $at^2 + bt + c = 0$ (equação quadrática) encontrados os valores de t_1 $_e$ t_2 , volta-se a variável inicial “x” e consequentemente, as raízes da equação.

Não fique muito alarmado, você já domina muito bem a resolução de equações do segundo grau. Este vai ser o único caminho para chegar às soluções da equação biquadrática, por isso tem o trabalho simplificado, mãos a obra.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Equação biquadrática é toda equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que se reduz equação quadrática, mediante a substituição de x^2 por uma nova variável onde a≠0, a, b e c são números reais.

Para resoluver a equação biquadrática reduzimos primeiro esta para uma equação quadrática mediante a substituição da variável, e aplicamos a fórmula resolvente.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para a consolidação dos conhecimentos que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Não fique muito alarmado, você já domina muito bem a resolução de equações do segundo grau. Este vai ser o único caminho para chegar às soluções da equação biquadrática, por isso tem o trabalho simplificado, mãos a obra!

Resolva as seguintes equações

1) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

seja $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$

$(t-3)(t-2) = 0$

$t=3 \vee t=2 \Rightarrow x^2 = 3 \vee x^2 = 2$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

2) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

seja $x^2 = m \Rightarrow 4m^2 + 3m - 1 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$m_1 = \frac{1}{4} \vee m_2 = -1$

$\Rightarrow x_1^2 = \pm\frac{1}{2} \vee x_2^2 = -1$

Substituíndo m por x tem-se:

Temos duas soluções $x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$ porque para $m_2 = -1$ não podemos achar a raíz quadrada do número negativo

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$

Óptimo, prossigamos para a próxima lição

Lição 5

Equação irracional

Introdução

Antes de falarmos das equações irracionais vamos recordar o conceito de expressões irracionais que você tratou nas materias anterioes. Porém não vamos esgotar nesta lição o estudo de equações irracionais apenas consideraremos as mais simples, mas você terá oportunidade de voltar a esta matéria nos outros níveis de ensino.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* a equação irracional

Equação irracional

Certamente você acaba de falar de vários tipos de equações polinomiais nas lições passadas, facilmente poderá deduzir o que é a equação irracional partindo do princípio de que a expressão que não é racional, é irracional.com muita calma, recorde-se da definição dada nas matérias anteriores da expressão irracional.

O que será então a expressão irracional?

É toda a expessão do tipo $\sqrt[n]{A(x)}$ em que A(x) e uma expressão algébrica

O domínio de uma expressão irracional, depende do índice do radical, vejamos:

$$\sqrt[n]{A(x)}$$

$$\text{Para } \begin{cases} n \text{ par } A(x) \geq 0 \\ n \text{ impar } \; x \in R \end{cases}$$

Exemplos:

1) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

2) $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 2 = 3x$

3) $\sqrt[3]{x^2 - x - 4} = 2$

4) $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

5) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 0$

6) $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x+19} = 0$

Podemos definir a equação irracional a partir de expressão irracional:

Definição

Uma equação é irracional, quando a incógnita está sob um ou mais radicais

Basta existir igualdade em que um dos membros é uma expressão irracional para chamarmos equação irracional.

Existem princípios de equivalência para a resolução das equações irracionais dependendo das diferentes formas que estas podem tomar,a saber:

1) $\sqrt{A} = b \Rightarrow A = B^2 \quad \wedge \quad B \geq 0$

2) $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

3) a) $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \wedge \ B=0$

b) $\sqrt{A}-\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow A=B$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Uma equação é irracional, quando a incógnita está sob o sinal do radical;
- Equação é irracional é toda a expressão do tipo $\sqrt[n]{A(x)}=0$ em que A (x) é uma expressão algébrica
- Os procedimentos para a resolução dos diferentes tipos de equações irracionais são;
    - Primeiro determinar o domínio de existência da expressão,
    - Ter em conta que:

1) $\sqrt{A}=b \Rightarrow A=B^2 \quad \wedge \quad B\geq 0$

2) $\sqrt[3]{A}=B \quad \Leftrightarrow \quad A=B^3$

3) a) $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \wedge \ B=0$

b) $\sqrt{A}-\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow A=B$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

1. Equações do tipo $\sqrt{A} = B$

$$\sqrt{A} = b \Rightarrow A = B^2 \qquad \wedge \qquad B \geq 0$$

Actividades

$$1) \sqrt{3x - 2} = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{3x - 2})^2 = 4^2$$
$$3x - 2 = 16$$
$$3x = 16 + 2$$
$$x = 6$$

Fácil, primeiro eleva os dois membros ao quadrado porque o índice do radical é dois.donde resultou uma equação linear.depois resolve a equação obtida segundo os princípios de equivalência das equações lineares.

Não se esqueça de analisar a solução em função do domínio de existência, neste caso é 3x-2> 0 o que implica que a solução pode ser $\frac{2}{3}$ ou maior que $\frac{2}{3}$

Solução: $x \in \{6\}$

2)

$$x + \sqrt{25 - x^2} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 7 - x$$
$$25 - x^2 = (7 - x)^2 \quad \wedge \quad 7 - x \geq 0$$
$$25 - x^2 = 49 - 14x + x^2 \wedge -x \geq -7$$
$$2x^2 - 14x + 24 = 0 \wedge x \leq 7$$
$$2(x-3)(x-4) = 0 \wedge x \leq 7$$
$$(x = 3 \ \text{Ú} \ x = 4) \wedge x \leq 7$$

$$\text{solucao}: x \in \{3; 4\}$$

Acompanhou todos os passos?

- Primeiro reduzir à forma

$$\sqrt{A} = b \Rightarrow A = B^2 \qquad \wedge \qquad B \geq 0$$

- Segundo elevar os dois membros da equação ao quadrado,
- Terceiro reduzir os termos semelhantes obtendo assim uma equação quadrática.
- Finalmente resolver a equação quadrática obtida

Não se esqueça de fazer a conjunçao com o domínio de existência da expressão “B”

2. Equações do tipo $\sqrt[3]{A} = B$

$$\sqrt[3]{A} = B \quad \Leftrightarrow \quad A = B^3$$

Exemplo:

1.

$$\sqrt[3]{4x^2 + 9x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 1 = (x+1)^3$$
$$4x^2 + 9x + 1 = x^3 + 3x^2\ 3x + 1$$
$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$
$$x(x^2 - x - 6) = 0$$
$$x = 0 \vee (x+2)(x-3) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3$$
$$\text{solução}: x \in \{-2, 0, 3\}$$

De certeza que percebeu que neste caso, elevamos ao cubo os dois membros da equação porque o indice é três (3) e procedemos como no caso anterior. Sempre que terminar a resolução deve verificar no seu rascunho se a solução obtida verifica a iguldade.se sim, então considere como solução, caso contrário não será solução da equação dada.

3. Equações contendo pelo menos dois radicais

a) $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \wedge \; B=0$

b) $\sqrt{A}-\sqrt{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow A=B$

Exemplo: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}=0$

$x^2+x=0 \wedge x^2-1=0$

$x(x+1)=0 \wedge (x+1)(x-1)=0$

$(x=0 \vee x=-1) \wedge (x=1 \vee x=-1)$

$\{0,-1\} \cap \{-1,1\}$

solução: $x \in \{-1\}$

Muito simples, so tornar nulos os dois radicandos como se recomenda na a) dos pricinpios de equivalencia e proceder como caso anterior.

Agora tente, resolver sozinho os exercicios que se sequem, obedecendo os passos dados em cada caso dos exemplos considerados:

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Resolva os seguintes exercicios:

1) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

2) $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 2 = 3x$

3) $\sqrt[3]{x^2 - x - 4} = 2$

4) $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

5) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = 0$

6) $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 19} = 0$

Confira as suas respostas

Lição 6

Inequação polinomial e racional

Introdução

Antes de mais nada, recorde-se que a inequação é a condição que se obtém ligando duas ou mais expressões polinomiais por meio de símbolos de desigualdade ($\geq, \leq$, <,>). Exemplo $x+2 \prec 2$, $x+\sqrt{x}+8 \geq 0$, etc.

Precisa recordar também que para encontrar o conjunto solução de uma inequação, precisamos seguir alguns procedimentos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* a inequação pelo método gráfico.
- *Resolver* a inequação pelo método analítica.

Inequação polinomial e racional

As inequações polinomiais racionais podem ser **inteiras ou fraccionárias**.

A desigualdade de duas expressões polinomiais, chama-se **inequação polinomial e racional.**

Exemplos

a) $x^2-3x+2>0$ b) $-x^2\geq -5$ c) $x^3-4x^2-5x\leq 0$

d) $x^4-5x^2+4\leq o$ e) $\left(x^2-4\right)\left(x^2-6x+5\right)>0$

f) $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{x-1}{x+1}$ g) $\dfrac{x^2+6x-16}{-x^2+3x-2}\geq 0$ h) $\dfrac{2}{3x-1}\geq\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

Ao conjunto de todos elementos do universo que transformam a inequação numa proposição verdadeira chama-se **conjunto soluçào ou soluçào da inequação.**

Equivalência de inequações

Duas inequações dizem-se equivalentes quando o conjunto solução de uma é também da outra e vice-versa

Exemplos;

$-x+2\rangle 0 \qquad x\langle 2$

As inequações polinomiais racionais podem ser resolvidas pelo **método analítico ou método gráfico.**

Forca, resolva as inequacões das alíneas a) c) d)

a) $x^2-3x+2>0$

Vejamos o metodo gráfico

A simples interpretação do gráfico da função quadrática permite reconhecer propriedades que simplificam muito a resolução de determinadas inequações.

Não iremos mostrar os diversos tipos de gráficos representativos de funções quadráticas, mas você já domina esta matéria de certeza, mesmo assim poderá em caso de dúvida revisitar o módulo sobre o estudo de funções quadráticas. Poderá concluir da análise que se faz sobre o comportamento destas funções que:

A função quadrática toma sempre o sinal de a fora do intervalo cujos extremos são os zeros desta.

Neste caso, vamos estudar a variação do sinal de $x^2-3x+2>0$

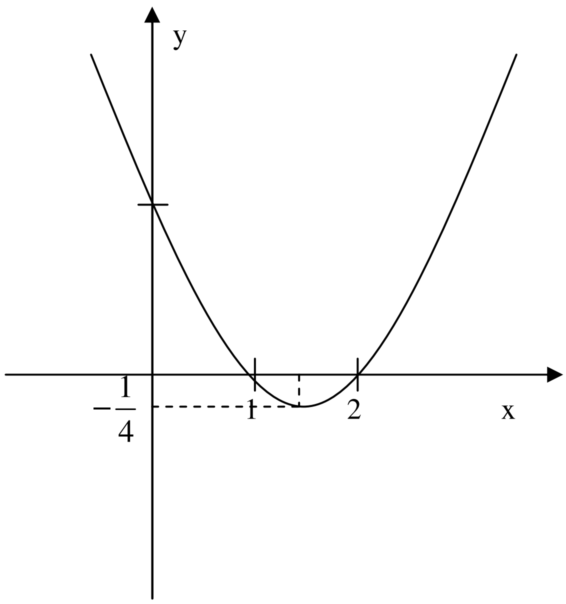
Como a = 1 é positivo, a função será positiva (o sinal de a) fora do inetrvalo dos zeros. Determinemo-los, sabendo que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9-8=1$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \;\; ; \; y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$



Então a função é:

negativa em $]1,2[$

nula em $\{1,2\}$

positiva em $]-\infty;1[\cup]2;\infty[$

Pelo método analítico teremos

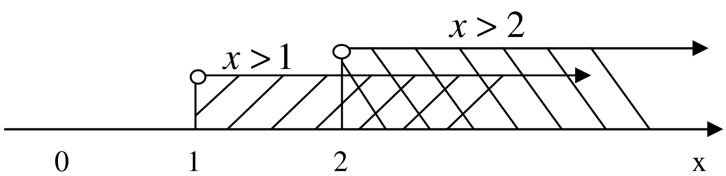
Se x = 1 e x = 2 então, teremos:

$x^2-3x+2>0$

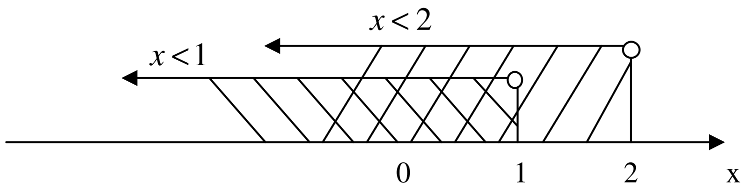
(x – 1) (x – 2) > 0

Como o produto é positivo temos duas condições:

1. Condição: (x – 1> 0 e x -2 > 0)



2. Condição (x – 1 <0 e x – 2 <0)



Destas condições resulta que

Solução 1 $x \in]2, +\infty[$

Solução 2 $x \in]-\infty, 1[$

Solução final $S = S_1 \cup S_2 = x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

x	$-\infty$	**1**		**2**	$+\infty$
x -1	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**
x - 2	**-**	**-**	**-**	**0**	**+**
(x-2).(x-1)	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**

Facílimo, mas nunca se esqueça que sempre que multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo, o sinal de desigualdade muda.

c) $x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0$

O método analítico para as inequações polinomiais de grau superior a 2 é mais cómodo veja os procedimentos:

Começamos por achar as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$ são

$x = 0$, $x = 5$, $x = -1$

Factorizar o polinómio envolvido:

$x^3 - 4x^2 - 5x = x(x-5)(x+1)$

Construa agora a tabela de valores para o estudo do sinal dos factores ao do eixo real.

Tabela

x	$-\infty$	**-1**		**0**		**5**	$+\infty$

x	**-**	**-**	**-**	**0**	**+**	**+**	**+**
x^2 -4x-5	**+**	**0**	**-**	**-**	**-**	**0**	**+**
P	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**

Solução: S= $]-\infty,-1] \cup [0,5]$

e) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$

Bonito, estamos perante uma inequação fraccionária, nao fique alarmado porque você possui requisitos para resolver a inequação, siga os seguintes passos:

1º Passo

Determinar o domínio de existência

Dominio: $x - 1 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1$
$\Rightarrow x \in R - \{\pm 1\}$

2º Passo

Reduzir as fracções ao denominador comum, mais atenção: nestes casos, depois de achar o m.m.c o denominador deve se manter.

(x- 1) (x + 1)

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} < \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

3º Passo

Reduzir os termos semelhantes do numerador

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)(x-1)} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x+1)(x-1)} < 0$$

4° Passo

Achar as raízes se 4 x =0 então x = 0 e -1 <0 <1., pela condição de existência (domínio).

Muito bem, você esta a caminhar bem, construir a tabela de sinais

x	$-\infty$	**-1**		**0**		**1**	$+\infty$
4x	-	-	-	**0**	+	+	+
x+1	-	**0**	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	**0**	+
P	-	**0**	+	**0**	-	**0**	+

A solução será S = $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A desigualdade de duas expressões polinomiais, chama-se inequação polinomial racional.
- As inequações polinomiais racionais podem ser inteiras ou fraccionárias.
- Ao multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo, o sinal de desigualdade muda.
- Chamamos de inequações do segundo grau, as expressões do tipo: $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\geq 0$ $ax^2+bx+c\leq 0$.
- A função quadrática toma sempre o sinal de (**a**) fora do intervalo dos zeros.
- Na resolução de inequações de grau superior a dois ou fraccionária é mais fácil usar o método analítico.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Inequações do segundo grau

1.Resolver a inequação $-x^2 + x + 6 < 0$

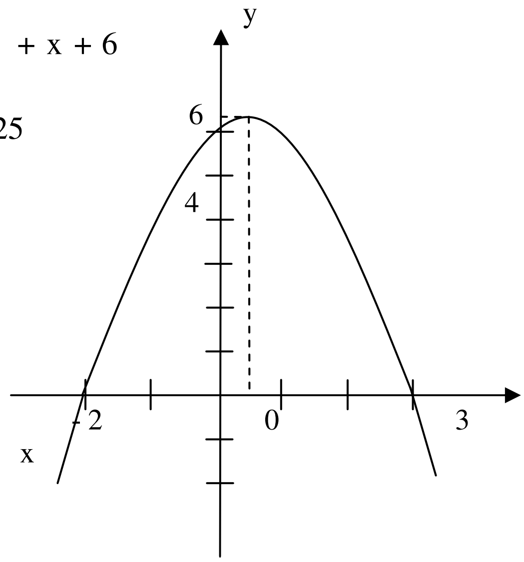
Resolução:

Estudando o sinal de $f(x) = -x^2 + x + 6$

$$\Delta = (+1)^2 - 4.(-1).(+6) = 25$$

$$x = \frac{-(+1) \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$



Como queremos $-x^2 + x + 6 < 0$, tomamos os intervalos marcados com sinal negativo (-) assim a solução:

$$x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

2. **Resolver a inequação pelo método analítico**

$x^2 - 3x - 4 > 0$ $\quad \Delta > 0$,raizes -1 e 4

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
y	+	0	-	0	+

Solução: $x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$

3. Resolver a inequação

$$x^2 + 4x + 4 > 0 \qquad \Delta = 0 \ \text{, raizes iguais -2}$$

Solução: $x \in \left]-2;+\infty\right[$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	-	0	+

4.Resolver a inequação

$$-2x^2 + 5x - 2 \geq 0 \qquad \Delta > 0 \ \text{raizes} \ \frac{1}{2} \ e \ 2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
y	-	0	+	0	-

Solução: $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

<u>**Inequações produto do segundo grau**</u>

1. $\left(x^2-4\right)\left(x^2-6x+5\right) > 0$

A resolução deste tipo de inequação pode ser facilitada aplicando o método analítico com a utilização de quadro de sinais.

Para o preenchimento deste quadro temos que em primeiro lugar, determinar os zeros de cada um dos factores.

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 2$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 5$$

<u>Quadro de sinais</u>

Como preencher o quadro de sinais? Basta tomar como base a propriedade da função quadrática (tomar sempre o sinal de **a** fora do intervalo dos zeros).

x	$-\infty$	-2		1		2		5	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+	+	+
x^2-6x+5	+	+	+	0	-	-	-	0	+
P	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Atendendo esta propriedade e prenchido o quadro, pode-se concluir que:

$$(x^2-4)(x^2-6x+5)>0$$
$$x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;2\right[\cup\left]5;+\infty\right[$$

2. Resolver a inequação

$$(x^2-5x)(-x^2+7x-6)>0$$

Resolução:

Seja $f(x)=x^2-5x$ e $g(x)=x^2+7x-6$

$$f(x)=x^2-5x \Leftrightarrow x_1=0\ ;\ x_1=5$$

$$g(x)=-x^2+7x-6 \Leftrightarrow x_1=1\ ;x_2=6$$

Montar um quadro de sinais para as duas funções f(x) , g(x) e f(x).g(x)

x	$-\infty$	0		1		5		6	$+\infty$
x^2-5x	+	0	-	-	-	0	+	+	+
-x^2+7x-6	-	-	-	0	+	+	+	0	-
P	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Como queremos $(x^2-5x)(-x^2+7x-6)>0$**, vamos tomar os intervalos marcados com sinal positivo (+)**

Solução:

$x \in \left]0;1\right[\cup \left]5;6\right[$

<u>Inequações fraccionarias conducentes à inequações quadráticas</u>

1.Resolver a inequação

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 1} \leq 0$$

Resolução:

Transformar a equação fraccionária numa equação produto:

$\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 8x + 15\right) \leq 0$, Desde que $x^2 - 1 \neq 0$

Estudar separadamente os sinais de f(x) e g(x):

$f(x) = x^2 - 8x + 15$ raízes: 3 e 5

$g(x) = x^2 - 1$ raízes: -1 e 1

Montar um quadro com os sinais de f(x), g(x) e f(x).g(x)

x	$-\infty$	-1		1		3		5	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	0	+	+	+	+	+
x^2-8x+15	+	+	+	+	+	0	-	0	+
P	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Como queremos $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 1} \leq 0$, tomamos os intervalos marcados com o sinal negativo (-), incluindo as raizes do numerador (não são inclusas as raizes do denominador, pois $x^2 - 1 \neq 0$ pela condição de existência da fracção).

Solução:

$x \in]-1;1[\cup [3;5]$

2.Resolver a inequação

$$x + \frac{3}{x-4} \geq 0$$

Resolução.

$$x + \frac{3}{x-4} \geq 0$$

Calculando o m.m.c

$$\frac{x(x-4)+3}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4} \geq 0, \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(x^2 - 4x + 3)(x-4) \geq 0$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3) \quad \text{raízes: } 1 \text{ e } 3$$

$$g(x) = (x-4) \quad \text{raízes: } 4$$

Montando o quadro de sinais:

x	$-\infty$	**1**		**3**		**4**	$+\infty$
x-4	-	-	-	-	-	0	+
x^2-4x+3	+	0	-	0	+	+	+
P	-	0	+	0	-	0	+

Solução: $x \in [1;3] \cup]4;+\infty[$

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Resolva

a) $-x^2 \geq -5$

b) $x^2 - 5x + 4 < 0$

c) $\dfrac{x^2 + 6x - 16}{-x^2 + 3x - 2} \geq 0$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos a seguir. Sucessos!

Lição 7

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Introdução

Alguns problemas do nosso dia-a-dia conduzem a mais de uma equação.Assim surgem as famílias de equações, que na liguagem com rigor matemático se chamam de sistemas de equações.

Em geral o número de equações pode variar conforme o objetivo que se pretende ao recorrer ao sistema de equações para resolver um determinado problema, mas nós vamos estudar nesta lição, os sistemas de duas equações a duas incógnitas. Esta matéria não é nova para si, mas precisamos de recapitular para aprofundar mais o estudo de sistemas de equações lineares nas próximas lições.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Resolver* o sistema de equações a duas as incógnitas pelo método de substituição
- *Resolver* o sistema de equações a duas as incógnitas pelo método de adição ordenada.
- *Resolver* o sistema de equações a duas incógnitas pelo método misto.

Sistema de equações

O que será um sistema de equações?

Definição geral

Sistema de equações é um conjuto formado por duas ou mais equações a partir das quais pretende-se determinar conjunto de números que verificam simultaneamente a todas equações.

Definição

Sistema de equações lineares é um conjuto formado por duas ou mais equações lineares a partir das quais pretende-se determinar conjunto de números que verificam simultaneamente a todas equações.

Consideremos casos mais frequentes de sistemas de equações lineares

1.sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Simbolicamente, na sua forma canónica $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ a, b, c

$a_{1,}, b_1, c_1$

Sao números reais e x e y são incógnitas.

Por definição $\Delta = a\,d - c\,b$ *se* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e o determinante do

sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$

Vamos falar com detalhes sobre determinante nas próximas lições , aguarde......

Consideremos alguns exemplos de sistemas de equações:

$$a)\ \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + Y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x - y = 5 \\ x \quad y = -6 \end{cases} \qquad d\ )\ \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

Lembre-se que:

Solução do sistema de equações

O conjunto de números que verificam as equações do sistema chama-se conjunto-solução (ou soluçào) do sistema.

Quanto ao número de soluções, os sistemas podem ter:

$$\text{sistemas de equações} \begin{cases} \text{possíveis} \\ \text{impossíveis (não tem solução)} \end{cases}$$

$$\text{possíveis} \begin{cases} \text{determinado (tem uma solução ou solução finita)} \\ \text{indeterminado (tem infinitas soluções)} \end{cases}$$

Para resolver um sistema de equações aplica-se pelo menos um dos métodos que se seguem, a saber:

- Método de substituição.
- Método de adição ordenada
- Método misto

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Sistema de equações é um conjuto formado por duas ou mais equações a partir dos quais pretende-se determinarconjunto de números que verificam simultaneamente a todas equações.

O conjunto de numeros que verificam as equações do sistema chama-se conjunto-solução (ou soluçào) do sistema.

Quanto ao número de soluçòes, os sistemas podem ter:

$$\text{sistemas de equações}\begin{cases}\text{possíveis}\\ \text{impossíveis (não tem solução)}\end{cases}$$

$$\text{possíveis}\begin{cases}\text{determinado (tem uma solução ou solução finita)}\\ \text{indeterminado (tem infinitas soluções)}\end{cases}$$

Para resolver um sistema de equações aplica-se pelo menos um dos métodos que se seguem, a saber:

- Método de substituição.
- Método de adição ordenada
- Método misto

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. Resolva os sistemas aplicando o método de substituição.

$$a)\ \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

a)

1º) 2x + y = 1 ⇔ y = 1 – 2x

2º) 2x – 3y = -1 ⇔2x – 3(1-2x) = -1 ⇔2x –3 + 6x = -1

Solução: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Bonito. Você acertou, pois seguiu todos passos. Primeiro achou o valor de y e depois substituiu na segunda equação por isso chegou facilmente à solução.

$$b)\ \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

1º) x + 2y = 1 ==> x = 1-2y

2(1-2y) - y = 7 ==> 2-4y -y = 7 ==> -5y = 7-2

-5y = 5 ==> y = -1

2º) x + 2y = 1 ==>x + 2 (-1) = 1 ==>x= 1 + 2 = 3

Correcto. Voltou a acertar pois cumpriu com todos os passos.

2. Resolva os sistemas, aplicando o método de adição ordenado

$$a)\ \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x + 4y = 29 \\ 9x - 2y = 17 \end{cases}$$

Resolução

$a)$

$$(-1)\begin{cases}2x+y=11\\2x-3y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=11\\\underline{-2x+3y=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\----\end{cases}$$
$$0+4y=12$$

$$(-3)\begin{cases}2x+y=11\\2x-3y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x-3y=-33\\\underline{-2x+3y=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----\\x=4\end{cases}$$
$$-8x+0=-32$$

Certo. Não é difícil acertar basta cumprir com as recomendações. Você primeiro viu que era preciso escolher uma variável para criar condições que levem a sua eliminação quando se estiver a adicionar. Por isso chegou à solução certa.

$b)$

$$(2)\begin{cases}3x+4y=29\\9x-2y=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y=29\\\underline{18x-4y=34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----\\x=3\end{cases}$$
$$21x+0=36$$

$$(-3)\begin{cases}3x+4y=29\\9x-2y=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x-12y=-87\\\underline{9x-2y=17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\----\end{cases}$$
$$0-14y=-70$$

Formidável. Você está acertando pois segue todos os passos recomendados

3) Considere o sistema $\begin{cases}2x+y=1\\x+2y=5\end{cases}$

a)Pelo método de substituição

b)Pelo método misto

<u>Resolução</u>

a) Resolução pelo Método de substituição

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x+2(1-2x)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -- \\ x+2-4x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -- \\ -3x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1-2(-1) \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Isso mesmo, mas É bom fazer a verificação antes de dar a solução, muito simples, é só substituir as incógnitas pelos valores obtidos. Esta cláro que -1 para x e 3 para o y, são valores que satisfazem o sistema.

b)Resolução pelo método de adição ordenada

$b)$

$$(-2)\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-2 \\ \underline{\quad x+2y=5 \quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ x=-1 \end{cases}$$
$$-3x+0=3$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ \underline{-2x-4y=-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ ---- \end{cases}$$
$$0 \; -3y=-9$$

c)<u>Resolução pelo metodo misto</u>

No lugar de multiplicar por -2 a segunda equação para determinar y, substituir x= -1 numa das equações do sistema para encontrar o valor de y estaremos a aplicar o método misto(adição ordenada e substituição).

Ja se recordou dos metodos que aplicou para resolver sistema de equções nas classes anteriores? Resolva mais alguns exercícios de

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1.Classifique e resolva cada um dos sistemas seguites:

$a)\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3y=9 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x+y=11 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 27x+2y=11 \\ 11x+y=2 \end{cases}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 8

Sistema de três equações lineares a três incógnitas

Introdução

Desta vez, iremos introduzir o sistema de três equações lineares a três incôgnitas, não se preocupe, voce esta bem preparado.o sistema de duas equações é do seu domínio já das classes anteriores. Na lição oito, você teve a oportunidade de aprofundar.

Irá aplicar os mesmos métodos de resolução dos sistemas de duas equações como na lição anterior.

O que de extraordinário que vai acontecer é que teremos mais uma incógnita e mais uma equação.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Resolver* o sistema de equações a três as incógnitas pelo método de substituição
- Resolver o sistema de equações a três as incógnitas pelo método de adição ordenada.

Objectivos

Sistema de três equações lineares a três incógnitas

Como iremos definir o sistema de três equações a três incógnitas?

Muito simples, definimos na lição passada que um sistema de equações é uma família de equações, sendo no caso anterior família de duas equações, desta vez vamos acrescentar na família de duas equações mais uma, teremos uma família de três equações.

A esta família de três equações com três incógnitas, chamaremos de sistema de três equações a três incógnitas.

Definição:

Chama-se sistema de três equações a três incógnitas ao sistema do tipo:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Onde a, b, c, d sao numeros reais e x, y e z são as incógnitas das equações.

Exemplos:

1) $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=3 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+6y+7z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$

Forma canónica do sistema de equações a três incógnitas

Se d for igual a zero, d =d =d, o sistema diz-se homogênio

Isto é;

A solução de um sistema deste tipo e um terno ordenado (três numeros) que verificam todas equações do sistema. A procura da solução e mediante qualquer um dos métodos anteriormente estudados.

<u>Vamos resolver a equação pelo método de substituição:</u>

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

O processo de resolução é o mesmo que aplicou na resolução do sistema de duas equações a duas incógnitas. Neste caso de três variáveis temos que fazer substituições de forma a reduzir o sistema a duas equações com duas incógnitas e depois para uma incógnita:

Portanto:

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x+2y+3z=3 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-2x-z \\ 2x+2(3-2x-z)+\quad 3z= \quad 3 \\ x+3-2x-z+2z= \quad 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ----- \\ 2x+6-4x-2z \quad +3z= \quad 3 \\ -x+z= \quad 2 \quad -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ---- \\ -2x+ \quad z= \quad -3 \\ -x+ \quad z= \quad -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ------- \\ z=2x-3 \\ -x+(2x-3)=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} --------- \\ --------- \\ -x+2x-3 \quad = \quad -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \quad -2.4 \quad -z \\ z=2.4 \quad - \quad 3 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-8-5 \\ z=5 \\ ---- \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-10 \\ z=5 \\ x=4 \end{cases}$$

Certo, obedecemos os seguintes passos:

<u>1°passo:</u>

Resolvemos a primeira equação em ordem a y e obtivemos o seu valor algébrico que é nova equação. Isto significa que ainda não é solução para y, voltaremos mais tarde a esta equação obtida;

<u>2°passo</u>

Substituímos y na 2ª e 3ª equação pelo seu valor algébrico reduzindo o sistema de três equações com três incógnitas a um sistema de duas equções com duas incógnitas x e z;

3°passo

Resolvemos o sistema obtido de duas equações com as duas incógnitas x e z conforme fizemos na lição anterior

4°passo

Obtidos os valores numéricos de x e z voltamos a primeira equação e substituímos estas variaveis pelos valores obtendo assim os valores das três incógnitas.

Fácil, você precisa de ter muita atenção para não se enganar nos sinais dos termos ao fazer as adicões ou mudar de um membro para o outro.

Vamos resolver o sistema de equações pelo método de Adição ordenado quando chegar o momento das actividades de fixação. Agora vamos resumir o que acabamos de ver:

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Ao acrescentar uma equação e uma incógnita no sistema de duas equações a duas incógnitas obtemos um sistema de três equações a três incógnitas.
- Que a expressão $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ Onde a, b, c, d são numeros reiais e x, y e z são as incognitas , chama-se forma canónica do sistema de equações a três incógnitas

<u>A solução de um sistema</u> deste tipo e um terno ordenado (três numeros) que verificam todas equações do sistema. A procura da solução são mediante qualquer um dos métodos anteriormente estudados para os sistemas de duas equações a duas incógnitas.

Actividades

Actividades

Vejamos os passos a seguir aplicando metodo de substituição

1.Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=3 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases}$$

<u>Método de substituição</u>

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=3 \\ 3x-y4z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2y+2z \\ x+y-2(1-2x+3y)=3 \\ 3x-y-4(1-2x+3y)=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} \\ x+y-2+4x-6y=3 \\ 3x-y-4+8x-12y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ 5x-5y=5 \\ 11x-13y=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} \\ y=x-1 \\ 11x-13y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{2.5cm}} \\ 11x-13y+13=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1.5cm}} \\ y=3-1 \\ -2x=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2\cdot 3+3\cdot 2 \\ y=2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Bonito, você acertou, pois seguiu todos os passos.

- Achou o valor de uma das incognitas na primeira equação
- Substituiu esse valor nas segunda e terceira equações, ficando com duas equações de duas incógnitas,
- Procedeu como no caso de resolução de sistema de 2 equações a duas incógnitas.

Assim chegou facilmente à solução.

Resolva pelo método de adição ordenada

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2y=3 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

$$\begin{array}{l} 8x - 12y + 4z = 4 \\ 3x - \ y - 4z = 3 \\ \hline 11x - 13y + 0 = 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2x - 2y + 4z = -6 \\ 3x - \ y - \ 4z = 3 \\ \hline x - \ 3y \ + 0 = -3 \end{array}$$

Óptimo, já eliminou a incógnita z? Agora, forme o sistema com as duas

Equações obtidas de duas incognitas x e y e considere uma das equções do sistema original.Por exemplo a terceira.

$$\begin{cases} 11x-13y=7 \\ x-3y=-3 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Considere no sistema **(2)** as duas primeiras equações para eliminar x**,** obtendo deste modo o valor de **y**.

$$\begin{matrix} \\ (-11) \end{matrix}\begin{cases} 11x-13y=7 \\ x-3y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x-13y=7 \\ \underline{-11x+33y=33} \\ 0 \ +20y=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ---- \\ y=2 \end{cases}$$

Assim, formar-se um novo sistema:

$$\begin{cases} 11x-13y=7 \\ y=2 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases}$$

Considere no sistema **(2)** as duas primeiras equações para eliminar **y** obtendo deste modo o valor de **x**.

$$\begin{matrix} (-3) \\ (13) \end{matrix}\begin{cases} 11x-13y=7 \\ x-3y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -33x+39y=-21 \\ \underline{13x-39y=-39} \\ 20x+0=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ ---- \end{cases}$$

Forma-se de novo outro sistema mas não desanime ja está quase a chegar à solução

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases}$$

Deste modo chegamos a solução do sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ 3(3)-(2)-4z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Facílimo, basta cumprir com as dicas recomendadas. Considerou em cada passo duas equações do sistema à sua escolha e destas, escolheu uma variável e criou condiçoes para que esta fosse eliminada ao fazer a adição.

Deste modo, chegou à solução correcta.

Depois de ler com atenção o texto, tente resolver sozinhos os exercícios que se seguem aplicando para cada caso o método que lhe convém:

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1) $\begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y + 7z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$

Lição 9

Resolução de sistemas de equações pelo metodo de Cramer

Introdução

De certeza, os exercícios que acabam de resolver na lição número nove, exigem muitos cálculos que até certo ponto, pode ser cansativo para si. O método de Cramer facilita e reduz bastante estes cálculos. Preste atenção aos procedimentos que vão permitir evitar os erros.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- Aplicar o método de Cramer num sistema de segunda ordem. Segunda ordem.
- *Aplicar* o método de Crámer na resolução de num sistema de terceira ordem.

Objectivos

Resolução pelo método de Cramer

<u>No caso em que o determinante do sistema de segunda ordem</u>.

Vamos intoduzir um novo procedimento para a resolução de sistemas equações aplicando o método de Cramer. Gabriel Cramer (1704-1752) foi um Matemático Suiço. Este método está ligado ao conceito de determinante, que se define a partir dos coeficientes das equações envolvidas no sistema. Portanto:

Chama-se determinante do sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ e designa-se por Δ a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad\text{-}cb \qquad \forall\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

- Quando o valor do determinante é diferente de zero diz-se que o sistema é determinado no caso contrário diz-se indeterminado ou não tem solução.

Para perceber melhor a definição, evitemos dar diferentes nomes aos coeficientes do sistema.assim, podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \forall a,b,b',a' \in \mathbb{R}$$

Isso mesmo, agora vamos calcular o determinante para cada variável :

Para a **variável x**, temos que substituir os coeficientes a, a' de x pelos termos independentes c, c' respectivamente.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \qquad \forall\ b,c,b',c' \in \mathbb{R}$$

Para a **variável y**, temos que substituir os coeficientes b, b' de y pelos termos independentes c, c' respectivamente.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c \qquad \forall a,c,c',a' \in \mathbb{R}$$

A solução do sistema será dada pelo seguinte par ordenado.

Solução: $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta} ; \dfrac{\Delta y}{\Delta} \right)$

Consideremos um exemplo concreto:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Consideremos $x + 3y = 6 \ \wedge\ 2x - y = -2$

Sendo os coeficientes $a = 1$, $b = 3$ $c = 6$

$a' = 2$, $b' = -1$, $c' = -2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.3 = -1 - 6 = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 6.(-1) - (-2).3 = -6 + 6 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-2) - 2.6 = -2 - 12 = -14$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{-7} = 0 \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

NB: se o determinante Δ for igual a zero, significa que o sistema é indeterminado**.**

<u>No caso em que o determinante do sistema de terceira ordem</u>.

Vejamos agora como usar o método de Cramer para o sistema de três equações a três incógnitas?

$$\text{Seja:} \begin{cases} a_1x & a_2y & a_3z = a_4 \\ b_1x & b_2y & b_3z = b_4 \\ c_1x & c_2y & c_3z = c_4 \end{cases}$$

$$V\, a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2, d_2\ a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4 \in \text{R}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3. \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$= a_1.\ (b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3.(b_1c_2 - c_1b_2)$

$= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3c_1b_2$

Calcular o determinante de x:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_4 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_4 & b_3 \\ c_4 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_4 & b_2 \\ c_4 & c_2 \end{vmatrix}$$

$= a_4.\ (b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_4c_3 - c_4b_3) + a_3.(b_4c_2 - c_4b_2)$

$= a_4b_2c_3 - a_4c_2b_3 - a_2b_4c_3 + a_2c_4b_3 + a_3b_4c_2 - a_3c_4b_2$

Calcular o determinante de y:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_4 & b_3 \\ c_4 & c_3 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}$$

$= a_1.\ (b_4c_3 - c_4b_3) - a_4(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3.(b_1c_4 - c_1b_4)$

$= a_1b_4c_3 - a_1c_4b_3 - a_4b_1c_3 + a_4c_1b_3 + a_3b_1c_4 - a_3c_1b_4$

Calcular o determinante de z:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_4 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix} + a_4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$= a_1.\ (b_2c_4 - c_2b_4) - a_2(b_1c_4 - c_1b_4) + a_4.(b_1c_2 - c_1b_2)$

$= a_1b_2c_4 - a_1c_2b_4 - a_2b_1c_4 + a_2c_1b_4 + a_4b_1c_2 - a_4c_1b_2$

Consideremos o exemplo abaixo.

$$\begin{cases} 2x & +y & +z = 3 \\ 2x & +2y & +3z = 3 \\ x & +3y & +2z = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Assim teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

= 2(4 –9) – (4 – 3) + (6 – 2) = 2 . (-5) – 1 + 4 = -10 + 3= -7

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

=2(6-6)-3(4-3)+(4-1)=0-3+3=0

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

3(4-9)-(6-6)+(9-4)=-15-0+5=-10

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

=2(4-1) - (4-3) +3(2-2) =6-1+0=5

Isso mesmo . Calculados os determinantes, faltam apenas as incógnitas que são dadas por: $\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}, \frac{\Delta z}{\Delta}\right)$.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{-7} = 0; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$$

Resolva o sitema pelo método de Crámer

$$\begin{cases} 2x+ y + 3z =4 \\ 4x + 2y + 6y = 8 \\ x +y z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Assim teremos teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 - 6) - (4 - 6) + 3\ (4 - 2) = 2\ .\ (-4) - (-2) + 3.2 =$$

$$= -8 + 2 + 6 = 0$$

Infelizmente, o sistema não tem solução porque o valor de Δ é igual a zero, você muito bem sabe que $\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}, \frac{\Delta z}{\Delta}\right)$. logo fica claro que os valores das incógnitas serão indeterminados e vai deparar com este tipo de situações várias vezes.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Para resolver sistemas de três equações a três incógnitas podemos recorrer ao método de substituição, adição ordenada mas é mais simples o método de Cramer.
- Num sistema de equações, toda solução de uma equação é solução da outra.
- Quando o determinante do sistema é diferente de zero o sistema diz-se determinado.
- Quando o determinante do sistema é igual a zero o sistema pode ser indeterminado ou não tem solução.
- A solução do sistema de segunda ordem é dada pelo seguinte par ordenado.

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta};\frac{\Delta y}{\Delta}\right)$$

- A solução do sistema de terceira ordem é dada pelo seguinte terno ordenado

$$\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta};\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$$

Agora, depois de ter feito uma boa leitura do texto realize as seguintes actividades de fixação.

Actividades

4. Resolva os sistemas, aplicando o método de Cramer.

$$a)\ \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x+2y+3z=3 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$$

$$a)\ \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1.(-1)-2.2=-1-4=-5$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=1.(-1)-7.2=-1-14=-15$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=1.7-2.1=7-2=5$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-15}{-5}=3$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{5}{-5}=-1$$

Formidável. Você acertou pois, calculou primeiro os determinantes e depois recordou-se que $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$ *e* $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$ por isso chegou à solução facilmente

$$b)\ \begin{cases} 3x+y+z=3 \\ 2x+2y+3z=3 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$= 3(4\text{-}9) – (4\text{-}3) + (6\text{-}2)$$

$= 3(-5) - 1+4$

$= -15 - 1+4$

$= -16+4$

$= -12$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 3(4-9) - (6-6) + (9-4)$

$= -15 + 5 = -10$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 3(6-6) - 3(4-3) + (4-3) =$

$= -3+1=-2$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 3(4-9) - (4-3) + 3(6-2)$

$= 3(-5) - 1+3.4=-15 - 1+12 =-4$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6} \quad ; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

Certo. É fácil basta calcular os determinantes, e você é bom nisso. Por isso chegou à solução.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Resolva as equações pelo método de Cramer:

1) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 3x - y4z = 3 \end{cases}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo.

Lição 10

Sistema de equações de grau superior

Introdução

Caro estudante,

Viu vários métodos para resolver um sistema, neste caso poderá aplicar os mesmos métodos, mas a escolha dependerá da natureza do sistema, e claro que deverá escolher aquele que lhe leva a solução sem rodeios (que facilita os cálculos)

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- Identificar sistemas de equações de grau superior
- *Resolver* sistemas de equações de grau superior

Sistema de equações de grau superior

Caro estudante. Como deve ter percebido até aqui fomos lidando com sistemas de equações lineares. Daqui em diante vamos estudar sistemas de equações que envolvem equações de outros graus, por isso podemos adequar para este caso a definição que vimos.

Definição

Sistema de equações de grau superior é um conjuto formado por duas ou mais equações, onde pelo menos uma é de grau superior, a partir das quais pretende-se determinar conjunto de números que verificam simultaneamente a todas equações.

Exemplos de sistemas de grau superior

1. $\begin{cases} xy = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases}$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Sistema de equações de ordem superior é um conjuto formado por duas ou mais equações, onde pelo menos uma é de grau superior, a partir das quais pretende-se determinar conjunto de números que verificam simultaneamente a todas equações.

- Na resolução de equações de grau superior aplicam-se os métodos de substituição ou de adição ordenada, mas escolha do método depende do tipo de equações envolvidas no sistema.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Resolução de equações de grau superior

Dada a equação resolva:

1.Método de substituição

$$\begin{cases} x\,y=-2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3-2x)=-2 \\ y=3-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^2+3x=-2 \\ \underline{\hspace{4cm}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=3-.2\cdot(\frac{1}{2}).=-\frac{1}{2} \\ x_1=-\frac{1}{2} \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

$$\text{solução}:\left(-\frac{1}{2},\,4\right) \quad \text{e} \quad (2,-1))$$

Você acertou logo a primeira, pois, ja domina o método de substitução:

Primeiro: resolveu a segunda equação em a y e obteve um valor algébrico y=3-2x

Segundo: substituiu na primeira equação o y pelo seu valor algébrico obtendo assim uma equação com uma só variável x

Terceiro: resolveu a equação obtida e obteve o vaor de x

Quarto: substituiu o valor de x numa das equações do sistema e resolveu-a em ordem a y

2.Método de adição ordenada

$$\begin{array}{l} x^3 + y^3 = -7 \\ \underline{x^3 - y^3 = 9} \\ 2x^3 = 2 \\ x^3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x^3 + y^3 &= -7 \\ -x^3 + y^3 &= -9 \\ \hline 2y^3 &= -16 \\ y^3 &= -8 \\ y &= -2 \end{array}$$

Solução: $x = 1$ e $y = -2$

***Isso mesmo**, você já domina os métodos de resolução dos sistemas de equações, mas para este caso precisa de resolver mais exercícios de fixação*

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Resolva os exercícios com base no método que lhe leva a solução sem dificuldades

1) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x\,y = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 7^{xy} = 49 \end{cases}$

Resolveu com sucessos os exercicios indicados? Agora confira as suas respostas no final do módulo, se acertou todos, esta de parabéns, se nao, volte a ler com atenção os exemplos resolvidos.

Lição 11

Resolução de problemas conducentes à sistemas de equações

Introdução

Caro estudante, esta é a sua última lição do módulo, brevemente passará para o módulo três, mas antes disso, fará um teste sobre toda a matéria do módulo, é necessário redobrar o esforço para que consiga vencer o módulo.

Nesta lição irá resolver problemas conducentes a sistemas de equações.

Você esta prepado para resolver este tipo de problemas pois, já sabe resolver sistemas de equações, a única novidade é que você mesmo terá que produzir esse sistema

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Aplicar* sistema de equações na resolução de problemas.

Resolução de problemas conducentes ao sistema de equações

Consideremos o seguinte problema:

<u>Problema</u>

Calcule dois números naturais tais que a soma do menor com o dobro do maior é 13 e a diferença entre o triplo do menore o maior é 4.

Resolução

Passo 1

X é o menor número.

Y é maior número.

x+2y é a soma do menor com o dobro do maior.

3x-y é diferença entre o triplo do menor e o maior.

Passo 2

Sistema correspondente $\begin{cases} x+2y=13 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

Passo 3

Resolução do sistema

$$\begin{cases} x+2y=13 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=13-2y \\ 3(13-2y)-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_} \\ 39-6y-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_} \\ -7y=-35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=13-2\cdot 5 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Passo 4

Resposta: O menor número é 3 e o maior é 5.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Para resolver problemas que conduzem à sistemas de equações deve obedecer os passos que se seguem:

- Ler com atenção e interpretar o problema.
- Fazer a escolha de variáveis (incógnitas) para formar o sistema de equações.
- Resolver o sistema obtido.
- Verificar as soluções.
- Analisar as soluções e dar resposta ao problema.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

Problema 1”

Um cavalo e um burro conversam numa estrada. Diz o burro ao cavalo:

_ “Se eu levasse um dos teus sacos, a minha carga seria o dobro da tua, mas se eu desse um dos meus sacos as nossas cargas seriam iguais. Quantos sacos transportavam cada um dos animais?

Resolução:

Passo1

x : sacos do cavalo

y: sacos do burro

y+1 : se o burro levar um dos sacos do cavalo

x-1:se cavalo deixar que o burro leve um dos seus sacos

Passo2

Sistema correspondente $\begin{cases} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{cases}$

Passo3

$$\begin{cases} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-2-1 \\ y-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 2x-3-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2.5-3 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow .$$

Passo4

Reposta: Cada um dos animais, o burro eo cavalo trnsportava 7 e 5 sacos, respectivamente

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

Problema 3

Calcula a medida dos lados de um rectângulo sabendo que a area é 12 m^2 e a largura é um terço do cumprimento.

Problema 4

Num parque de estacionamento estão vários automóveis e motociclos num total de 17 veículos e 56 rodas.Quantos são os carros e quantas são as motos?

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Agora, confira as respostas

Resolveu com sucessos os problemas indicados? Agora confira as suas respostas, se acertou todos, esta de parabens, se nao, volte a ler com atenção todas as lições sobre os sistemas de equacoes.

Soluções Módulo 2

Soluções do Módulo 2

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

Lição 1

1.a) a = 2, b= **-5**

b) Forma canónica da equação (2x – 6 = 0), a =2 e b = -6

c) Forma canónica da equação (- x + 3 = 0) a = -1 e b = 3

d) Forma canónica da equação (15x - 18 = 0 ou 5x - 6 = 0)

a = 15 e b = - 18 ou a = 5 e b = -6

e) forma canónica da equação (-6x + 3 = 0 0u -2x +1=0) a = -6 e b = 3 0u a=-2 e b= 1

f) forma canónica da equação (-2x – 18 = 0 ou –x – 9 = 0) a= -2 e

b = -18 ou a=-1 e b=-9.

2) a) 2x-5= 0

2x= 5

x=5/2

b) 3x-5 = x+1

3x-x = 5+1

2x= 6

x=3

c) 5(3-2x) = -3(3x-4)

15-10x = -9x+ 12

-10x + 9x = 12-15

-x = -3

x=3

d) 3-7(1-2x) = 5-(x+9

14x+x = 4-4

x= 0

e)

$$\underset{(3)}{\frac{x}{4}} - \underset{(4)}{\frac{2x - 1}{3}} = \underset{(2)}{\frac{x + 1}{6}}$$

3x-8x+4 = 2x + 2

-7x= - 2

$$x = \frac{2}{7}$$

f)

$$\underset{(8)}{\frac{2x - 3}{6}} - \underset{(6)}{\frac{x - 1}{8}} = \underset{(4)}{\frac{3x - 5}{12}}$$

16x-24-6x+6 = 12x20

10x-12x=18-20

-2x+2= 0

x= 1

Lição 2

1 Resolva aplicando a fórmula Resolvente

a) $x^2 + 36x + 68 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = 1296 - 4.68 = 1024$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-36-32}{2} = -34 \\ x_2 = \dfrac{-36+32}{2} = -2 \end{cases}$$

b) $x^2 + 22x + 121 = 0$

$\Delta = 4 - 4.121 = -480$

$\Delta < 0$ não ha raízes reais

c) $2x^2 + 15x + 7 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = 225 - 56 = 169$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-15-13}{4} = -\dfrac{28}{4} = -7 \\ x_2 = \dfrac{-15+13}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $x^2 + 8x + 4 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = 64 - 16 = 48 \quad ; \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-4\sqrt{3}}{2} = -4 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-8+4\sqrt{3}}{2} = -4 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

e) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 64 - 80 = -76$ nao ha raizes reais

2. a) a = 2 b = m+3 c = m - 1

b) Condição $\Delta = 0$ $\Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 4.2(m-1) = 0$ não há raízes reais

Cálculos:

$$\Delta = 0$$
$$(m+3)^2 - 4.2(m-1) = 0$$
$$m^2 + 6m + 9 - 8m + 8 = 0$$
$$m^2 - 2m + 17 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = 4 - 4.17 = -64$$

3. a) Se k = o $\Rightarrow x^2 + 3x = 0$ **s ol: x** $= 0 \quad x = -3$

Cálculos

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 0 = 0 \quad \text{para} \quad k = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x = 0 \quad \Rightarrow x(x+3) = 0$$
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

b) Condição: $\Delta = 0$

Cálculos

$$\Delta = 0$$
$$3^2 - 4.1.k = 0 \Rightarrow 9 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

c) $\Delta \geq 0$ Para que as raízes existam e p> 0 para que o produto seja positivo

Cálculos

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - 4k > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \left]0; \frac{9}{4}\right]$$

Lição 3

1)

$$x^3 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \vee x - 1 = 0$$
$$x_1 = 0 \ ; x_2 = 0 \quad x_3 = 1$$

2) $x^3 - 9x = 0$

1)

$$x^3 + 9x = 0$$
$$x^3 - 9x = 0$$
$$\left(x^2 - 9\right) = 0$$
$$x\left(x-3\right)\left(x+3\right) = 0$$
$$x_1 = 0 \;;\; x_2 = -3 \quad x_3 = 3$$

3)

$$x^3 - 3x^2 = -2x$$
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$
$$x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$
$$x = 0 \vee x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 8 = 1$$
$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$
$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1 \;\vee\; x_3 = 2$$

Lição 4

1)

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad \text{seja } x^2 = t \;\Leftrightarrow\; \left(x^2\right)^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ t_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$
$$\text{se } t = 1 \Rightarrow 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$
$$\text{se } t = 2 \Rightarrow 2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$
$$x_1 = -1 \;;\quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_4 = \sqrt{2}$$

2)

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{seja } x^2 = y$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ y_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\text{para } y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{para } y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -2 \qquad x_4 = 2$$

3) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$

$$x^4 + 6x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 + 6x^2 - 16 = 0 \quad \text{seja } x^2 = k$$

$$\Rightarrow k^2 + 6k - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{-6+10}{2} = 2 \\ k_2 = \dfrac{-6-10}{2} = -8 \end{cases}$$

$$\text{para } k = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{para } k = -8 \quad (\text{Impossivel em } R)$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$$

Lição 5

1) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

$$-5\sqrt{x} = -6 - x$$

$$\left(-5\sqrt{x}\right)^2 = \left(-6 - x\right)^2$$

$$25x = x^2 + 12x + 36$$

$$-12x - x^2 - 36 = 0$$

$$-x^2 + 13x - 36 = 0$$

$$\Delta = 169 - 4.(-1)(-36) = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-13-5}{-2} = 9 \\ x_2 x = \dfrac{-13+5}{-2} = 4 \end{cases}$$

2) $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 2 = 3x \Rightarrow$

$$\left(\sqrt{9x^2 + 2x - 3}\right)^2 = (3x-2)^2$$

$$9x^2 + 2x - 3 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$x + 12x = 3 + 4$$

$$14x = 7$$

$$x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

3) $\sqrt[3]{x^2 - x - 4} = 2$

$$\left(\sqrt[3]{x^2 - x - 4}\right)^3 = 2^3$$

$$x^2 - x - 4 = 8$$

$$x^2 - x - 4 - 8 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4.12 = 49$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-7}{2} = -3 \\ x_2 = \dfrac{1+7}{2} = 4 \end{cases}$$

4) $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

$$\left(\sqrt{x^2 + x - 1}\right)^2 = (2-x)^2$$

$$x^2 + x - 1 = 4 - 4x + x^2$$

$$x - 1 - 4 - 4x = 0$$

$$-3x - 5 = 0$$

$$-3x = 5$$

$$x = \frac{5}{-3}$$

$-\frac{5}{3}$ *Não é solução da equação*

Esta equação é impossível em R, não tem solução porque o valor de x obtido torna o radicando negativo, portanto em R não podemos achar a

Raíz quadrada de um número negativo

$$5)\ \sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}\ =0$$
$$\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}$$
$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\ \right)^2$$
$$x+3=2x-1$$
$$x-2x=-1-3$$
$$-x=-4$$
$$x=4$$

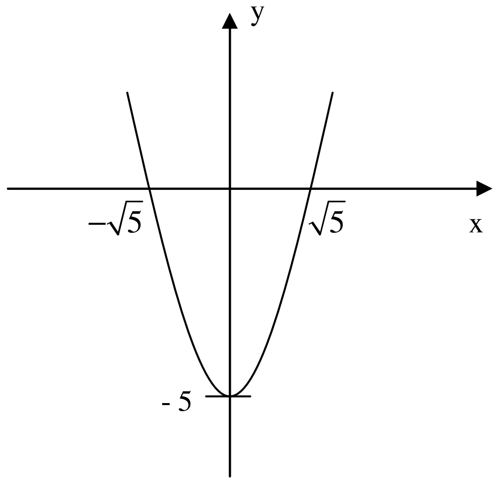
$$6)\ \sqrt{x^2\ -1}\ -\sqrt{x+19}\ =0$$
$$\left(\sqrt{x^2\ -1}\ \right)^2=\left(\sqrt{x+19}\ \right)^2$$
$$x^2\ -1=x+19$$
$$x^2\ -1=x+19$$
$$x^2\ -1-x-19\ \ =0$$
$$x^2\ -\ x-20=0$$
$$\Delta=1-4.(-20)\ =81$$
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-9}{2}=-4 \\ x_2=\dfrac{1+9}{2}=5 \end{cases}$$

Lição 6

a) $-x^2\geq-5$

$$1.a)-x^2\geq-5\ \Rightarrow\ -x^2+5\ \geq0\ \Rightarrow\ x^2\ -5\leq0$$
$$1^0)\ x^2\ -5\ =0\ \Rightarrow\ x^2=\pm\sqrt{5}$$
2^0) Estudo do sinal da funcao

Gráfico



$x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

b) $x^2 - 5x + 4 < 0$

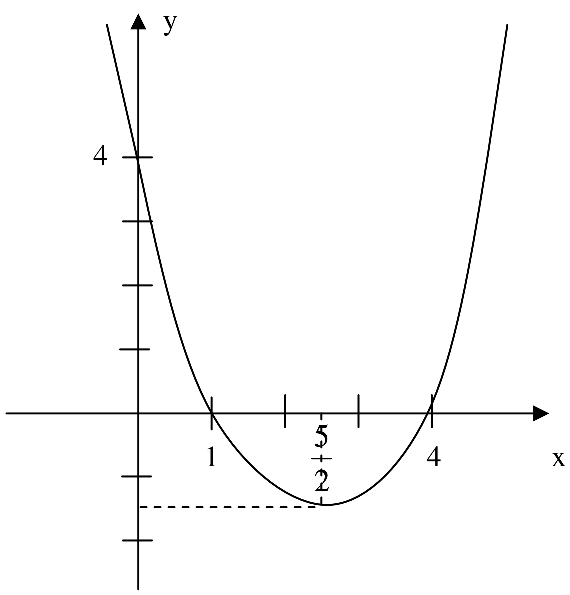
$1^0)$ $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$

$2^\circ)$ Sinal da função

$3^\circ)$ Vértice da função

$$x_v = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \;;\; y_v = \frac{-9}{4} = -\frac{3}{2}$$

$4^0)$ Gráfico



$x \in \left]1;4\right[$

c)

$$\frac{x^2+6x-16}{-x^2+3x-2} \geq 0$$

$1^0)\ x^2+6x-16 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 36-4(-16) = 100 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8 \quad ; x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2$

$-x^2+3x-2 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 9-4.2 = 1 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1$

2°) Quadro de sinais

x	$-\infty$	-8		1		2	$+\infty$
$x^2+6x+16$	+	0	-	-	-	0	+
$-x^2+3x-2$	-	-	-	0	+	0	-
Q	-	0	+	0	-	0	-

$3^{\circ})\ x \in [-8;1]$

Lição 7

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = \frac{9}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = \dfrac{9}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado

b) $\begin{cases} 2x + y \ = 11 \\ 2x - 3y \ = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 2x \\ 2x - 3(11 - 2x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 2x - 33 + 6x = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 8x = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.4 + y = 11 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 8 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado

Lição 8

$$1)\ \begin{cases} 3x+y+z=3 \\ 2x+2y+3z=3 \\ x+3y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-3x-y \\ 2x+2y+3(3-3x-y)=3 \\ x+3y+2(3-3x-y)=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=3-3x-y \\ 2x+2y+9-9x-3y=3 \\ x+3y+6-6x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-3x-y \\ -7x-y=-6 \\ -5x+y=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=3-3x-y \\ -7x-(5x-4)=-6 \\ y=-4+5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-3\frac{5}{6}-y \\ y=-4+5\frac{5}{6} \\ x=\frac{-10}{-12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{6} \\ x=\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+6y+7z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ 3(-2y-3z+1)+6y+7z=4 \\ (-2y-3z+1)+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ 3-6y-9z+6y+7z=4 \\ 1-2y-3z+z+2y=2 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ 3-2z=4 \\ 1-2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ \overline{} \\ -2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+3\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

O sistema é indeterminado.

$$3)\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 3x+y+z=2 \\ x+2y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3(2-3x-z)+4z=1 \\ y=2-3x-z \\ x+2(2-3x-z)+3z=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+6-9x-3z+4z=1 \\ \overline{} \\ x+4-6x-2z+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x+z=-5 \\ \overline{} \\ -5x-z=1 \end{cases}$$

$$-12x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} z=-5+7\frac{1}{3} \\ y=2-3\frac{1}{3}-z \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\frac{8}{3} \\ y=2-3\frac{1}{3}+\frac{8}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\frac{8}{3} \\ y=\frac{11}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Lição 9

1)

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2-5=-3 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10-1=9$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 9$$

$$2)\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$$

2) Neste caso a solução é possível e indeterminada.

$$3)\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=3 \\ 3x-y-4z=3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4-2)+3(-4+6)+(-1-3) = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-4-2)+3(-12+6)+(-3-3) = -30$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-12+6)+(-4+6)+(3-9) = -16$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3+3)+3(3-9)+(-1-3) = -10$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-30}{-2} = 15 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Lição 10

1) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x\,y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ (5 + y\,)\,y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ y^2 + 5y + 6 = 0 \end{cases}$

$y^2 + 5y + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \\ y_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2 \end{cases}$$

para $y = -3$ temos $x = 5 + (-3) = 2$

$y = -2$ temos $x = 5 + (-2) = 3$

Resposta: $(-3\,;\,2\,)$ e $(-2\,;\,3\,)$

$$2)\ \begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+y \\ (1+y)^3-y^3=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 1+3y+3y^2+y^3-y^3=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 1+3y+3y^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 3y+3y^2-6=0 \end{cases}$$

$$3y+3y^2-6=0$$
$$\Delta=9-4.3.(-6)$$
$$\Delta=81$$
$$\begin{cases} y_1=\dfrac{-3-9}{6}=-2 \\ y_1=\dfrac{-3+9}{6}=1 \end{cases}$$

$$\text{para: } \begin{cases} y=-2 \Rightarrow x=1+(-2)=-1 \\ y=1 \Rightarrow x=1+1=2 \end{cases}$$

Resposta $(-2;-1)$ e $(1;2)$

$$3)\begin{cases} 5^{x+y}=125 \\ 7^{xy}=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x+y}=5^3 \\ 7^{xy}=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 7^{xy}=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 7^{(3-y)y}=7^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 3y-y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ -y^2+3y-2=0 \end{cases}$$

$$y^2+3y-2=0\ ;\ \Delta=9-8=1 \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{2}{3} \\ y_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Para } y=\frac{2}{3} \Rightarrow x=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$
$$y=\frac{1}{3} \Rightarrow x=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

Resposta $\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Lição 11

1)

- Área do rectângulo ----A = c. l = 12 m^2
- Comprimento-----------c

- Largura-----------------l $\quad l = \frac{1}{3}c$
- Sistema de Equação $\quad c \times \frac{1}{3}c = 12$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{3}c \\ \frac{c^2}{3} = 12 \end{cases}$

Solução: o comprimento é de 6m e largura é de 2m

2)

- número total de veículos----------17
- Número de Carros------------------- x
- Número de Motos -------------------- y
- Número de Rodas ------------------ 56
- Sistema de Equações --------------

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 4x + 2y = 56 \end{cases}$$

Solução: 11 carros e 6 motos.

Módulo 2 de Matemáica

Teste Preparação de Final de Módulo

Error! Reference source not found.

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1.Compare usando os sinais <,> $\leq$, $\geq$ = ou $\neq$ as frases seguintes de modo a torná-las proposições verdadeiras.

a) $(-4)^{-2}$ _____ 8

b) $-\dfrac{b}{2a}$ ________ $\dfrac{2x_2}{2}$.

c) y _______ 0 para $y = (x-2)^2$

d) $x \in \left]2;3\right[$ _________ $\{x \in R \setminus 2 \leq x < 3\}$.

2. Coloque x nas afirmações que julgar verdadeiras para $y = ax^2 + bx + c$.

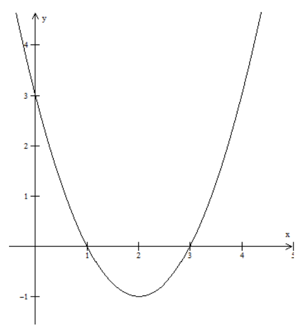
a) O eixo de simetria corta o eixo oy no ponto (x;0). ( )

b) O gráfico de todas as funções quadráticas é uma parábola ( )

c) C é o ponto de intersecção da parábola com o eixo oy

d) A semi-soma dos valores de zeros da função pode ser dada pela expressão matemática $-\dfrac{b}{2a}$ ( )

3.Observe o gráfico da figura e responda:



Diga se as afirmações são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**)

a) (1; 3) é zero da função ( )

b) c = 3 ( )

c) y > 0 quando $x \in \left]1;+\infty\right[$ ( )

d) A expressào analítica do gráfico correspondente é $y = x^2 - 4x + 3$ ( )

e) A expressào analítica do gráfico correspondente é $y = -2x^2 + 4x\ 6$ ( )

4. Resolva graficamente a inequação: $-3x^2 + 6x < 0$

5. Resolva o sistema escolhendo um dos métodos que aprendeu

$$\begin{cases} 5x & +2y & +4z=1 \\ 3x & +y & +z=2 \\ x & +2y & +3z=5 \end{cases}$$

Soluções do teste de preparação do Módulo 2

1.

a) $<$

b) $=$

c) $>$

d) $\neq$

2. a) **F**

b) **V**

c) **V**

d) **V**

e) **F**

3. a) **V**

b) **V**

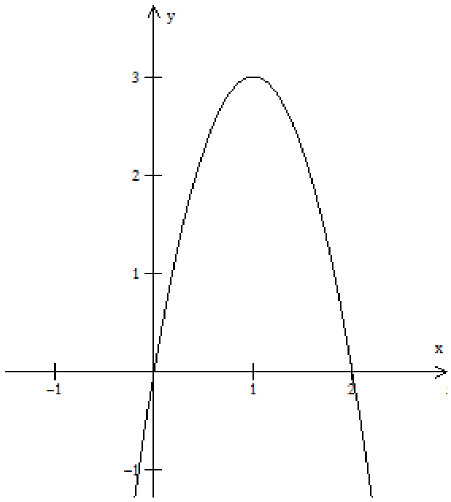
c) **F**

d) **V**

e) **F**

4. $-3x^2 + 6x < 0$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$
$$x_v = 1 \quad y_v = 3 \quad \text{e} \quad c = 0$$



$x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

5. Resolução pelo método de Crámer.

$$\begin{cases} 5x & +2y & +4z=1 \\ 3x & +y & +z=2 \\ x & +2y & +3z=5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \ \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \ \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \ \Delta z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Assim teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 5(3-2) -2(6-5) +4(4-5) =5-2-4=-1$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

= 5(6-5) - (9-1) +4(15-2) =5-8+52=47

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

= (3-2) - (6-5) +4(4-5) = 1-1-4=-4

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

5(5-4) -2(15-2) +(6-1) = 5-26+5=-16

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{47}{-1} = -47; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-16}{-1} = 16$$