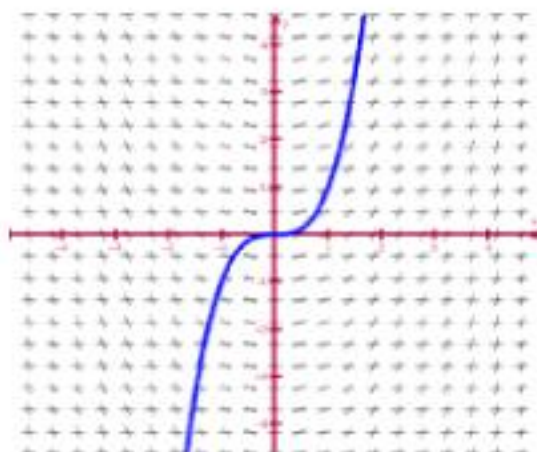


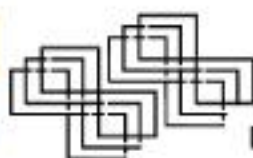


República de Moçambique
Ministério de Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto de Educação Aberta e a Distância

MATEMÁTICA



MÓDULO 8



DINES



Ficha Técnica

Elaboração:

- Esperança Michau
- Orlando Machango

Desenho Instrucional:

- Abel Ernesto Mondlane

Maquetização:

- Emerson Jobe Maphanga
- Hilário Budula

Ilustração:

- Emerson Jobe Maphanga
- Hilário Budula

Coordenação:

- Custódio L Ualane
- Jose Vicente Bisque
- Estêvão B. Cocho
- Anastácio Vilanculos

Agradecimentos

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano (MINEDH) endereça agradecimentos a todas as entidades singulares e colectivas que directa ou indirectamente contribuíram para tornar possível este curso: ao Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE), à Direcção Nacional de Ensino Secundário (DINES) e ao Instituto Nacional de Educação à Distância (INED).

Um agradecimento especial vai à Commonwealth of Learning – COL pela cedência do Template para a elaboração dos módulos.

Conteúdos

Acerca deste Módulo	1
Como está estruturado este Módulo.....	1
Habilidades de aprendizagem.....	3
Necessita de ajuda?.....	3
Lição 1	5
Conceito de Derivada.....	5
Introdução.....	5
Função num ponto e sua interpretação geométrica.....	5
Resumo.....	10
Actividades.....	11
Avaliação.....	13
Lição 2	15
Derivadas Laterais.....	15
Introdução.....	15
Derivadas laterais.....	15
Resumo.....	18
Actividades.....	19
Avaliação.....	22
Lição 3	23
Exercícios sobre a função derivada.....	23
Introdução.....	23
Exercícios sobre a função Derivada.....	23
Resumo.....	25
Actividades.....	26
Avaliação.....	27
Lição 4	28
Derivabilidade e continuidade de uma função.....	28
Introdução.....	28
Derivada de uma potência.....	28

Resumo.....	32
Actividades.....	33
Avaliação.....	34
Lição 5	34
Regras de derivação.....	34
Introdução.....	34
Regras de derivação.....	35
Resumo.....	39
Actividades.....	40
Avaliação.....	41
Lição 6	42
Derivada do produto e quociente.....	42
Introdução.....	42
Derivada do produto e do quociente.....	42
Resumo.....	46
Actividades.....	47
Avaliação.....	48
Lição 7	49
Derivada de funções compostas.....	49
Introdução.....	49
Derivada de funções compostas.....	49
Resumo.....	52
Actividades.....	54
Avaliação.....	55
Lição 8	56
Derivadas de funções trigonométricas.....	56
Introdução.....	56
Derivadas de funções trigonométricas.....	56
Resumo.....	60
Actividades.....	61
Avaliação.....	62
Lição 9	63
Derivadas de funções logarítmicas e exponenciais.....	63
Introdução.....	63
Derivada da função Exponencial e Logarítmica.....	63
Função exponencial.....	Erro! Marcador não definido.

Resumo.....	70
Actividades.....	71
Avaliação.....	73
Lição 10	74
Derivadas de funções inversas.....	74
Introdução.....	74
Função inversa.....	74
Derivadas de funções inversas.....	75
Resumo.....	77
Actividades.....	78
Avaliação.....	80
Lição 11	80
Aplicação da derivada em outras ciências.....	80
Introdução.....	80
Aplicação de derivadas em outras ciências.....	81
Resumo.....	83
Actividades.....	85
Avaliação.....	87
Lição 12	88
Monotonia de uma função.....	88
Introdução.....	88
Monotonia de uma função.....	88
Resumo.....	94
Actividades.....	96
Avaliação.....	98
Lição 13	99
Extremos de uma função.....	99
Introdução.....	99
Extremos da função.....	99
Resumo.....	101
Actividades.....	102
Avaliação.....	103
Lição 14	104
Concavidades e pontos de inflexão.....	104
Introdução.....	104
Concavidades e pontos de inflexão.....	104

Resumo.....	108
Actividades.....	109
Avaliação.....	110
Lição 15	111
Problemas de optimização.....	111
Introdução.....	111
Problemas de optimização.....	111
Resumo.....	113
Actividades.....	114
Avaliação.....	116
Lição 16	117
Equação das assíptotas.....	117
Introdução.....	117
Equação das assíptotas.....	117
Resumo.....	120
Actividades.....	121
Avaliação.....	123
Lição 17	124
Aplicação da derivada no estudo do sinal da função.....	124
Introdução.....	124
Aplicação da derivada no estudo da função.....	124

Resumo.....	127
Actividades.....	128
Avaliação.....	133

Soluções Módulo 8	135
--------------------------	------------

Soluções do Modulo 8.....	135
Lição 1.....	135
Lição 2.....	136
Lição 3.....	137
Lição 4.....	139
Lição 5.....	140
Lição 6.....	140
Lição 7.....	141
Lição 8.....	142
Lição 9.....	142
Lição 10.....	143
Lição 11.....	144
Lição 12.....	146
Lição 13.....	147
Lição 14.....	147
Lição 15.....	148
Lição 16.....	149
Lição 17.....	151

Módulo 8 de Matemática	156
-------------------------------	------------

Teste Preparação de Final de Módulo.....	156
--	-----



Acerca deste Módulo

Os Módulos para o Projecto Piloto de Ensino à Distância para o ESG 1 foram produzidos sob supervisão do Instituto de Educação Aberta e à Distância.

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 7ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 8ª, 9ª e 10ª classes, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 8ª, 9ª e 10ª classes. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 10ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para concluí-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as resposta no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do

módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas do seu nível.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da unidade.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjunta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquirir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.



Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planejar o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que “*o livro é o melhor amigo do homem*”. Por isso, sempre que achar que a matéria está a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar todas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?



Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a superá-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.



Lição 1

Conceito de Derivada

Introdução

Erro! Marcador não definido.

O cálculo diferencial foi desenvolvido no século 17 como um instrumento para resolver problemas de geometria e da mecânica, mas passado pouco tempo se tornou útil para outras áreas, da Matemática e da física, hoje o conceito de derivada tem aplicação quase em todos os cursos, como: Agronomia; Economia; Electrotecnia; Química, hidráulica etc. Daí que a necessidade de estabelecer uma base muito segura sobre este conceito derivada, recorde-se que uma função estabelece uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos A e B. A derivada vai permitir comparar a variação de um conjunto D ao variarem os elementos do conjunto C.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

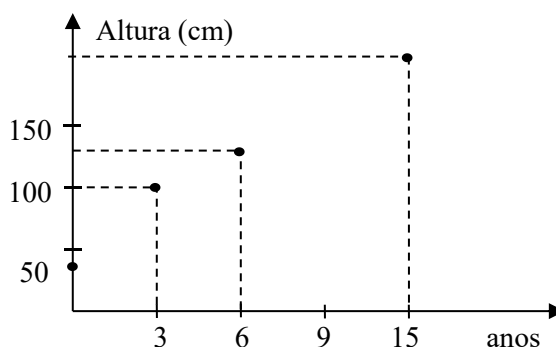
- *Explicar* o conceito de derivada num ponto.
- *Explicar* o significado geométrico de derivada num ponto.

Função num ponto e sua interpretação geométrica

Caro estudante. Para começar vamos considerar o seguinte exemplo:

A altura de uma criança medida periodicamente, a medida que ela vai crescendo (por exemplo de 6 em 6 meses).

Analise o gráfico apresentado:



Existem períodos em que ela cresce mais rapidamente em relação aos outros.

Se considerarmos mais 3 crianças e compararmos o seu crescimento médio em determinados períodos como indica a figura a ao lado, este crescimento poderá ser considerado como uma medida de rapidez de crescimento que pode ser expressa como:

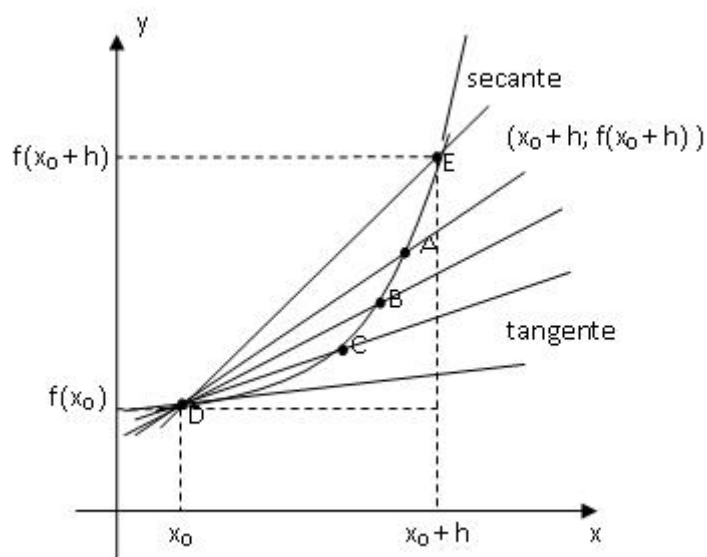
$$\text{crescimento médio} = \frac{\text{aumento da altura}}{\text{aumento da idade}}$$

(em cm/ano)

	Idade (em anos)	Altura (em cm)
B	9 – 12	121 – 134
C	8 – 12	122 – 142
D	8 – 11	120 – 136

Conceito da derivada

Caro estudante o conceito de derivada que vamos apresentar a seguir se funda na analogia que se faz entre o declive da recta tangente a um ponto de uma curva dada, e a derivada nesse ponto. Em outras palavras queremos logo de início apresentar-te





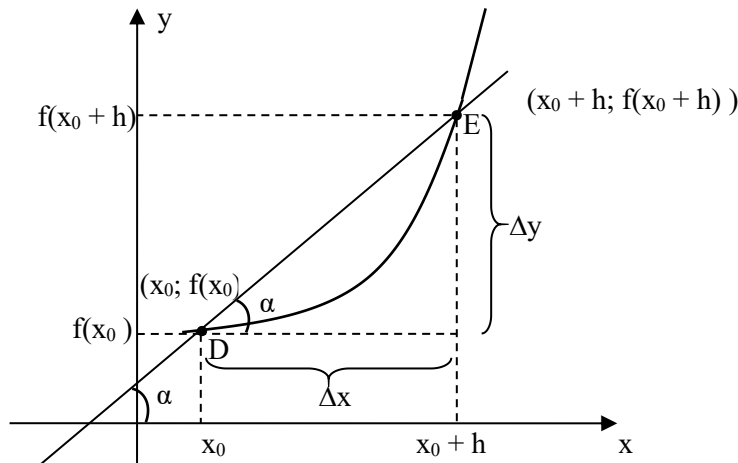
uma interpretação geométrica da derivada de uma função $f(x)$ num ponto dado $(x_0, f(x_0))$ ao mesmo tempo que te apresentamos a sua definição. Para isso observe a figura a seguir:

A preocupação que se coloca é a seguinte : Como determinar o declive da recta tangente à curva $f(x)$ no ponto $D(x_0, f(x_0))$. Geometricamente sabe-se que a recta tangente a uma curva apenas toca esta em um ponto.

Neste caso a curva em causa não é aquela simples em que facilmente podemos traçar a recta tangente seguindo os conhecimentos que bem adquiriu na geometria.

Quando queremos recorrer a esses conhecimentos de geometria o que fica fácil traçar é a secante DE. É a partir desta secante que através de sucessivo acertos de inclinação, passando pelos pontos A, B, C, e tantos outros vamos encontrar a posição da recta tangente.

Vamos simplificar a figura acima para a que apresentamos abaixo.



Caro estudante recorde-se que queremos o declive da recta tangente à curva $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Geometricamente queremos determinar a tangente do ângulo α na posição em que a recta secante passa para recta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$. Assim :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h}$$

Observando atentamente facilmente poderá concluir que ao arastar a secante ED, ela passará por vários pontos incluindo os pontos A, B, C, até uma posição limite quando o acréscimo Δx ou simplesmente h se tornar cada vez mais próximo de 0, o que nos recorda a ideia de limite, e por isso matematicamente podemos escrever:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Isto nos leva a concluir que a declividade da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $D(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se o limite existir e se chama derivada da função $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$

e se representa $f'(x)$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$. Então:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ou simplesmente se $h = x - x_0 = \Delta x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Logo geometricamente a derivada de uma função num ponto é o declive da recta tangente nesse ponto.

Caro estudante recorde-se sempre que para calcular a derivada pela definição deve se seguir os seguintes passos:

Calcule $f(x_0 + h)$;



Forme a diferença $f(x_0 + h) - f(x_0)$;

Forme o quociente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ que recebe o nome de razão incremental ou taxa de variação média de $f(x)$ no intervalo $[x_0, x_0 + h]$ ou declividade da recta secante ao gráfico de $f(x)$ pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calcule que é a derivada ou taxa de variação instantânea de $f(x)$ em x_0 ou declividade da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$.

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A taxa de variação de uma função $f(x)$ para um dado valor fixo x_0 mede-se pelo declive da curva nesse ponto.
- O declive de uma curva em cada ponto x_0 , depende da posição do ponto x_0 .
- O declive de uma curva em x_0 , pode ser determinado traçando a recta tangente e depois calcular o declive dessa recta tangente.
- O declive de uma curva em x_0 , pode ser determinado analiticamente pela fórmula:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- O processo de determinação da função declive $f'(x)$ designa-se por determinação da função derivada logo, o conceito de derivada de uma função será:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se a função tomar qualquer valor fixado num intervalo $[a, b]$, considerando uma família de intervalos $[x_0, x]$ com $x \in [a, b]$, a rapidez da variação da função ou taxa de variação média da função é dada por $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Vamos através da realização de algumas actividades aplicar a definição de derivada de uma função num ponto.



Actividades



Actividades

1. Dada a função $y = f(x) = x(2x - 1) = 2x^2 - x$ determinar o declive no ponto $x=2$.

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \text{ e só substituir na fórmula}$$

(1) o x_0 por 2

$$f(2 + \Delta x) = 2(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2$$

$$= 2 \cdot (2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) - (2 \cdot 2^2 - 2)$$

$$= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta x^2 - 2 - \Delta x - 2 \cdot 2^2 + 2$$

$$= 7 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{7 \cdot \Delta x + 2 \Delta x^2}{\Delta x} = 7 + 2 \cdot \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad x=2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (7 + 2 \cdot \Delta x) = 7$$

$$\text{Então, } f'(2) = \frac{df}{dx} = 7$$

2. Se $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$, determine $f'(x)$

Resolução

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
 &= 2(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) - 5 - (2x^2 - 4x - 5) \\
 &= 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - 4x - 4 \cdot \Delta x - 5 - 2x^2 + 4x + 5 \\
 &= 4x \cdot \Delta x - 4 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4x \cdot \Delta x - 4 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = 4x - 4 + 2\Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 4x - 4$$



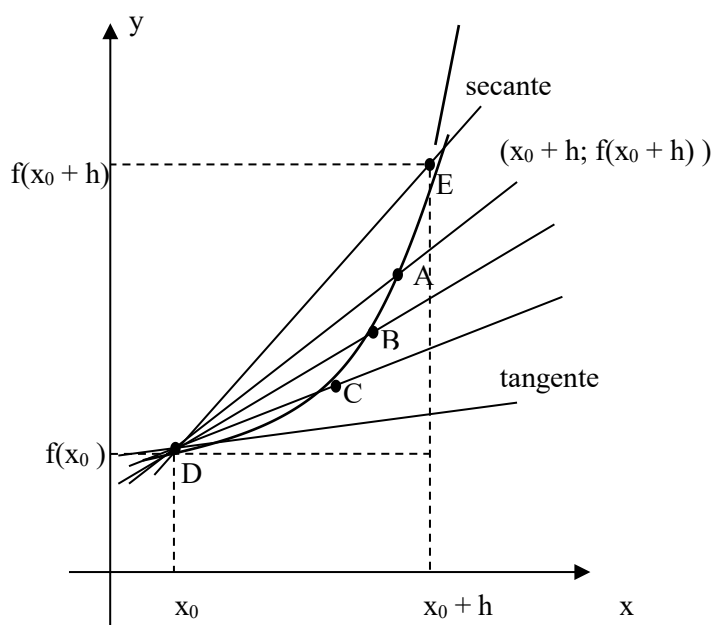
Avaliação



Avaliação

Leia com atenção as frases que se seguem e coloque (v) para as afirmações verdadeiras e (F) para as afirmações falsas.

Considere a figura 2 e responda.



1. $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ representa o coeficiente angular da recta AB. ()

2. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Chama-se razão incremental da função f em x_0 e x_1 a função ().

3. O limite da razão incremental da função denomina-se derivada da função e representa-se por $f'(x_0)$ ()

4. Chama-se derivada de uma função f no ponto x_0 ao limite se existir, da

razão incremental da função f quando x tende para x_0 ()

5. O valor da derivada de uma função indica-nos a variação da função numa vizinhança de um ponto fixo.()

6. O $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se existir, denomina-se derivada da função f no intervalo $[x_0, x]$. ().

Confira as suas respostas com as que colocamos no final do módulo.



Lição 2

Derivadas Laterais

Introdução

Erro! Marcador não definido.

Você já domina o conceito de derivada de uma função num ponto dado. Existem situações em que uma função não possui a derivada no ponto dado, isto é, não podemos determinar a função declive $f'(x)$ da função dada $f(x)$, mas à esquerda e à direita deste ponto existem derivadas e podem ser calculadas. Surge desta maneira o conceito de derivadas laterais que iremos explorar bastante nesta lição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



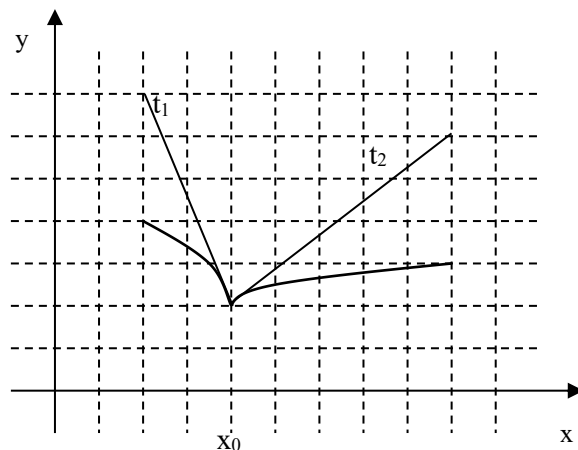
Objectivos

- *Calcular* as derivadas laterais de um dado ponto a partir da definição da derivada de uma função.
- *Determinar* as condições de existência de uma derivada num ponto.

Derivadas laterais

Caro estudante vamos aqui desenvolver o conceito de derivadas laterais com base nos conhecimentos que muito bem adquiriu nas lições anteriores sobre limites laterais.

Consideremos a figura seguinte.



Ao declive da semi-tangente t_1 chamamos derivada de f à esquerda de x_0 e representa-se por $f'(0^-)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ao declive da semi-tangente t_2 chamamos derivada de f à direita de x_0 e representa-se por $f'(0^+)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

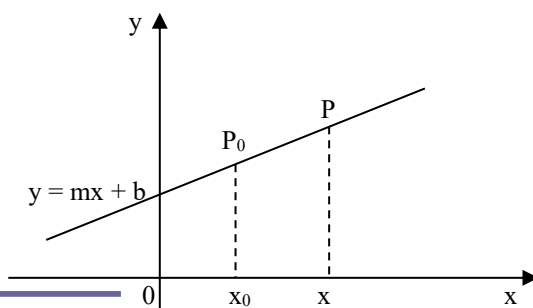
Se existirem e forem iguais as derivadas laterais no ponto x_0 , então existe a derivada da função no ponto x_0 e é igual ao valor comum das derivadas laterais.

$$\text{Os dois valores } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

correspondem, naturalmente, aos declives das semi-tangentes em p_0 à esquerda e à direita. semi-tangentes estas que não estão no prolongamento uma da outra, dado que os seus declives são diferentes

(repare que supusemos não existente $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$). Na figura 1

acima os valores dos dois limites laterais que se denominam derivada à esquerda e à direita, respectivamente, são -3 , $+2/3$ como?





É imediato concluir que da existência de derivada num ponto p_0 resulta que as duas semi-tangentes estão no prolongamento uma da outra ,o que implica existência da recta tangente .

No caso particular de a função ser linear $f(x) = mx + b$ as considerações feitas mostram que a recta tangente em cada ponto coincide com a própria recta representativa da função, sendo pois $f'(x_0)$ constantemente igual a m (declive da recta).

Iremos, considerar mais exercícios sobre o cálculo da derivada aplicando a sua definição, mas antes vamos resumir o que acabamos de ver.

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Ao declive da semi-tangente t_1 chamamos derivada de f a esquerda de x_0 e representa-se por $f'(0^-)$.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

✓ Ao declive da semi- tangente t_2 chamamos derivada de f a direita de x_0 e representa-se por $f'(0^+)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

✓ Se existirem e forem iguais as derivadas laterais no ponto x_0 , então existe a derivada da função no ponto x_0 e é igual ao valor comum das derivadas laterais.

Agora chegou o momento de medir o seu nível de compreensão da matéria, tente resolver sozinho em primeiro lugar o exercício seguinte e a seguir consulte a resposta.



Actividades



Actividades

1. Calcular a partir da definição, no ponto da abcissa x_0 , a derivada da função $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0)$$

Se substituirmos $x - x_0$ na expressão da definição de derivada por Δx teremos;

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Com base nesta fórmula a derivada será:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \end{aligned}$$

Consideremos agora o exemplo:

$$2. \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Dada a forma como a função é definida, vamos começar por determinar as derivadas laterais

No lugar de

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Vamos usar as fórmulas

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

e

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Teremos então:

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4 \end{aligned}$$

Isso mesmo, você acertou em cheio pois seguiu os passos:

1. Aplicou a definição de derivada à esquerda num ponto, neste caso trata-se do ponto 2.

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Desenvolveu o quadrado da soma segundo os casos notáveis

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3. No numerador da fração, você observou dois valores simétricos (-4 e +4) e simplificou, a seguir colocou em evidência Δx .

4. Simplificou na fração, o Δx dos numerador e denominador, ficando assim com um limite muito simples



($\lim(4 + \Delta x)$, quando Δx tende para zero)

5. Fazendo Δx tender para zero, o limite da constante 4 será igual a 4. E prontos.

No caso de limite à direita

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{como } x_0 \text{ é igual a 2,}$$

teremos:

$$\begin{aligned} f(2^+) \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 8 - 4}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 8 - 4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-\Delta x(4 + \Delta x) - 8 + 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} -(4 + \Delta x) = -4 \end{aligned}$$

A função não tem derivada no ponto 2. Possuindo no entanto derivadas laterais +4 e -4.

Pode acontecer a derivada ser infinita, tomemos o seguinte exemplo;

3. Calcular, se existir a derivada no ponto de abscissa 3, da função definida por

$$\begin{cases} -x + 4 & \text{se } x < 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad \text{e faça a interpretação geométrica.}$$

Tem-se:

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x + 4 - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x + 2}{x - 3} = \frac{-1}{-0} = +\infty$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 3 - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 5}{x - 3} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Sendo $+\infty$ quer a derivada lateral à esquerda, quer à direita,

que implica naturalmente que a derivada não existe .

Avaliação



Avaliação

1. Calcular aplicando a definição, se existir, a derivada no ponto de abscissa da função definida por

$$\begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e faça a interpretação geométrica.



Lição 3

Exercícios sobre a função

derivada

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Caro estudante depois do conceito da derivada de uma função num ponto ter ficado bem claro e da sua interpretação geométrica, nesta lição vamos exercitar o cálculo da derivada da função com base na definição analítica.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

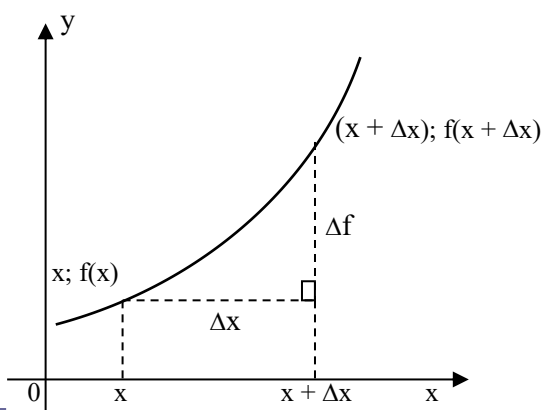


Objectivos

- Calcular a derivada da função aplicando a função.

Exercícios sobre a função Derivada

Recorde-se em primeiro lugar, da definição de derivada da função, considerando a seguinte figura:



Definição

(função derivada)

Dada a função $y = f(x)$, a função derivada $f'(x)$ define-se:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A partir da definição da derivada podemos analisar se uma função é derivável ou não.

simples, basta ser possível formar a derivada dessa função.

já introduzimos muitas terminologias, mas o importante é empregar a terminologia correctamente, baseando-nos sempre no significado de função derivada.

Consideremos exemplos para facilitar a nossa compreensão dos procedimentos. Aplique-se nas actividades que se seguem.



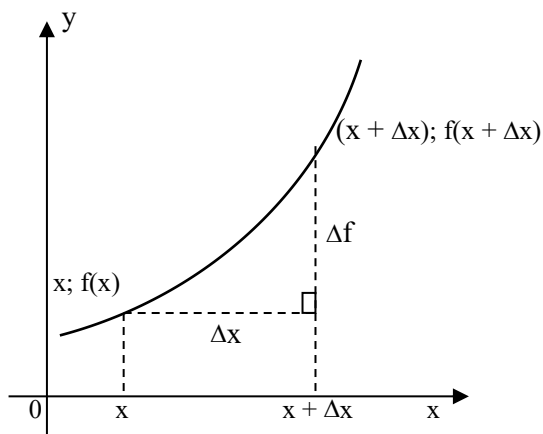
Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Considerando a curva.



Função derivada defini-se da seguinte maneira:

Dada a função $y = f(x)$, a função derivada $f'(x)$ é

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A partir da definição da derivada podemos analisar se uma função é derivável ou não.

Atividades



Atividades

1. Se $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ determinar a) $f'(6)$ b) $f'(x)$

$$a) f'(6) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{com } x = 6$$

$$f'(6) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(6 + \Delta x) - f(6)}{\Delta x}$$

$$f(6 + \Delta x) = \frac{1}{2}(6 + \Delta x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \quad ; \quad f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(6 + \Delta x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \Delta x^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2$$

$$= 6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \Delta x^2}{\Delta x} = 6 + \frac{1}{2} \Delta x$$

$$f'(6) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 + \frac{1}{2} \Delta x) = 6$$

$$b) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}x^2$$



$$= \frac{1}{2} (x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2) - \frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^2}{\Delta x} = x + \frac{1}{2} \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \frac{1}{2} \Delta x) = x$$

Formidável, você mostrou que é inteligente! Chegou o momento de medir o seu nível de compreensão da matéria.

Avaliação



Avaliação

1. Determine $f'(x)$ sabendo que $f(x) = x^3$.

2. Aplicando a definição da função derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x^2 - 7$ b) $f(x) = 7x + 2$ c) $f(x) = 3x^2 - 2x$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Lição 4

Derivabilidade e continuidade de uma função

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Caro estudante recorde-se que uma **função é contínua num ponto a** do seu domínio se e só se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e que chama-se **derivada de uma função f** no ponto x_0 o limite se existir, da razão incremental de f entre x_0 e x , quando $x \rightarrow x_0$.

Existe uma relação bastante importante entre estes dois conceitos que nos permitirá resolver muitos problemas de derivação de funções e esta relação é expressa através do critério que iremos ver nesta lição.

Além disso, vamos estudar uma regra prática para determinar a derivada de uma função potência.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Explicar* o critério de derivabilidade de uma função.
- *Explicar* o critério de continuidade de uma função.
- *Calcular* a derivada de uma potência de expoente natural.

Derivada de uma potência

Derivabilidade e continuidade de uma função

Existe uma relação importante entre as derivadas de funções e continuidade dessas mesmas funções que é expressa através de um teorema, a saber:



Teorema

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

.

Demonstração

Suponhamos que a função f tem derivada finita no ponto de abscissa x_0 .

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0), \quad x \neq x_0$$

Aplicando limites, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

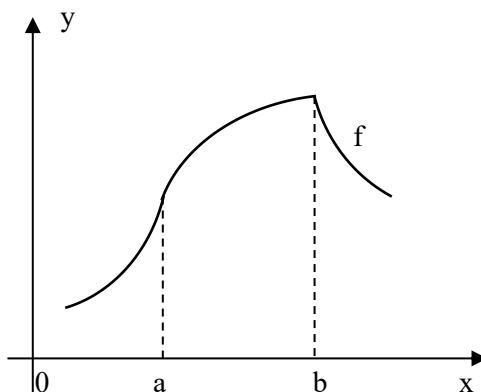
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0$$

Como $f'(x_0)$ finita, tem-se :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

O que prova que f é contínua no ponto de abscissa x_0 .

Note que o recíproco deste teorema não é verdadeiro. Há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto.



- f é contínua e não tem derivada finita em $\mathbf{a}$ (a tangente à curva em $x = a$ é uma recta vertical) nem em $\mathbf{b}$ (onde as semi-tangentes não estão no prolongamento uma da outra)

Derivada de uma potência de expoente natural

Aplicando a definição, já determinamos a função derivada de algumas funções deste tipo. Agora vamos ver uma regra para encontrar facilmente os resultados de derivação.

Funções do tipo x^n

Aplicando a definição de derivada ,determine a função derivada das funções que seguem:

$$\text{a) } f(x) = c \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$\text{b) } f(x) = x \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ \text{c) } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Tente usar o mesmo processo, para confirmar as derivadas das funções que se seguem:

$$\text{d) } f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$\text{e) } f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$



$$f) \quad f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Chegamos assim a evidência suficiente para deduzir uma regra simples para a derivação de potências de x .

Se pensa ter deduzido a noção de uma tal regra, tente completar os seguintes exercícios:

$$f(x) = x^9 \Rightarrow f' = \dots\dots\dots$$

$$f(x) = x^{15} \Rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f(x) = x^{15} \Rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) \dots\dots\dots$$

De certeza você concluiu que :

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) \Rightarrow n \cdot x^{n-1}$$

Nota: esta regra também serve para expoentes negativos e fracionários.

Por exemplo: a) $f(x) = \frac{1}{x}$ – da definição da derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

Da regra: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ – da definição:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Da regra: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- ✓ Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.
- ✓ A regra geral para determinar a derivada de uma potência de x é:

$$\text{se } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Agora vamos derivar as funções que se seguem aplicando a regra que acabamos de deduzir:



Actividades



Actividades

Calcule as funções derivadas de:

1. $f(x) = x^7$

Aplicando a fórmula $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ teremos:

$$f'(x) = 7 \cdot x^6$$

2. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

Escreva em primeiro lugar o radical como potência de expoente fraccionário e depois aplique a regra de divisão de potências com bases iguais ,para facilitar os cálculos.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$$

Caro estudante agora resolva sozinho os exercícios, que se seguem com atenção usando o processo que acabou de apreender.

Avaliação



Avaliação

Calcule as derivadas das seguintes funções

$$1) f(x) = x^{13} \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^4} \quad 3) h(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$4) h(p) = \frac{1}{p^4 \cdot p^3}$$

Lição 5

Regras de derivação

Introdução

Erro! Marcador não definido.

Caro estudante o cálculo da derivada de função aplicando a definição, é um processo fácil, mas bastante longo por isso exige de si muita concentração para não cometer erros durante os cálculos. Existem regras mais práticas



que tornam o cálculo das derivadas um processo muito rápido, simples e exacto, que não passa por aplicação do limite da função. Vamos deduzí-las nesta lição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Aplicar as regras de derivação.

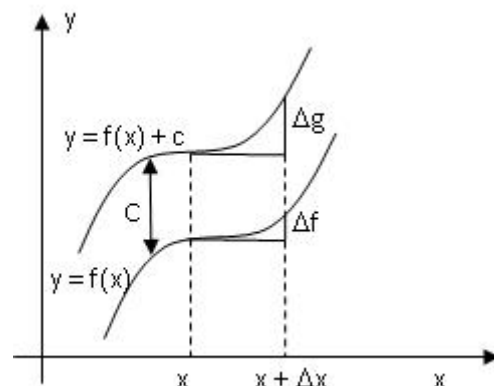
Regras de derivação

A derivada da função $y = f(x) + c$

Consideremos uma função $f(x)$ definida num certo intervalo, tendo derivada num ponto particular x . Segue-se que $f(x) + c$ é também derivável em x , e a sua derivada é $f'(x)$.

Isto é : $(f(x)+c)' = f'(x)$ ou

$$\frac{d(f+c)}{dx} = \frac{df}{dx}$$



Por exemplo : A derivada de “uma função mais uma constante” é igual à derivada da própria função.

Passemos a demonstração da regra

Demonstração:

Seja $g(x) = f(x) + c$

$$\begin{aligned}
 \Delta g &= g(x + \Delta x) - g(x) \\
 &= f(x + \Delta x) + c - (f(x) + c) \\
 &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
 &= \Delta f
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\text{Portanto : } g'(x) = (f(x) + c)' = f'(x)$$

A derivada $y = c \cdot f(x)$

$y = f(x)$ é uma função definida num certo intervalo, tendo derivada num ponto particular x . Segue-se que $c \cdot f(x)$ é também derivável em x , e a sua derivada é $c \cdot f'(x)$.

$$\text{Isto é : } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d(c \cdot f)}{dx} = c \frac{df}{dx}$$

A derivada do produto de uma constante e uma função é igual a constante vezes a derivada dessa função

$$\text{Exemplo: } (4x^7)' = 4(x^7)' = 4 \cdot 7x^6 = 28x^6$$

Demonstração

Seja $h(x) = c \cdot f(x)$, determinar $h'(x)$.

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) \\
 &= c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x) \\
 &= c (f(x + \Delta x) - f(x)) \\
 &= c \cdot \Delta f
 \end{aligned}$$



$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot \Delta f}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

$$h'(x) = c \cdot f'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = 4x^3 \Rightarrow h'(x) = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot (3 \cdot x^2) = 12x^2$$

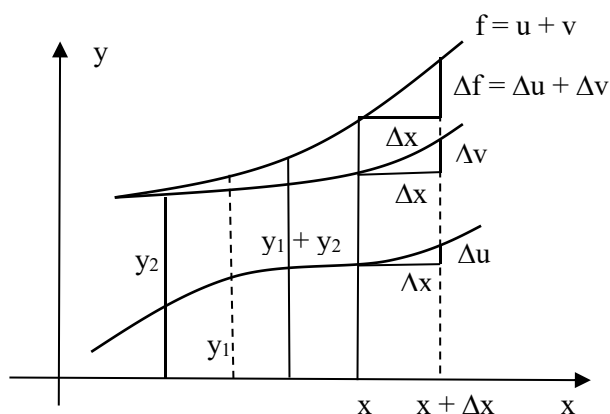
A derivada da função $y = f(x) + g(x)$

Consideremos duas funções $f(x)$ e $h(x)$ definidas num certo intervalo e ambas tendo derivada no ponto particular x . Então, $f(x) + g(x)$ também é derivável em x e a sua derivada é ; $f'(x) + h'(x)$

$$\text{Isto é; } [f'(x) + h'(x)] = f'(x) + h'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d(f+h)}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

A derivada de uma soma (adição) é igual a soma das derivadas .

Demonstração:



$$\text{Se } F(x) = f(x) + h(x) \Rightarrow F'(x) ?$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= f(x + \Delta x) + h(x + \Delta x) - (f(x) + h(x))$$

$$= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (h(x + \Delta x) - h(x))$$

$$= \Delta f + \Delta h$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)$$

$$\boxed{f'(x) = f'(x) + h'(x)} \quad \text{c.q.d}$$

Exemplo: se $f(x) = 2x^5 + x^2$ determine $f'(x)$?

$$f'(x) = 2 \cdot 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x = 10x^4 + 2x$$

NB: Esta regra se estende para uma soma de mais de duas funções:

$$\text{Portanto: } \boxed{M(x) = f(x) + g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) + g'(x) + h'(x)}$$

$$\text{Ou } \frac{d(f+g+h)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

A derivada da função $y = f(x) - g(x)$

Para as funções $F(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ podemos definir: $h(x) = F(x) - f(x)$
 $= F(x) - f(x)$

Partindo de $f'(x) = (f'(x) + h'(x))$ então $h'(x) = F'(x) - f'(x)$

$$\boxed{\left[f'(x) - h'(x) \right] = f'(x) - h'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d(f-h)}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{\Delta h}{\Delta x}}$$



A derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas

As regras que acabamos de demonstrar podem ser aplicadas na determinação da derivada de um polinómio :

Exemplo: $g(x) = x^4 - 3x + 5 - \frac{8}{x} + \sqrt{x}$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

As seguintes regras de derivação:

$$(f(x) + c)' = f'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + h(x))' = f'(x) + h'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Actividades



Actividades

Determine as derivadas das funções seguintes:

$$a) x^3 + 6x^2 \quad b) (x-4)^2 \quad c) \sqrt{x} + \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

Resolução

$$a) (x^3 + 6x^2)' = (x^3)' + (6x^2)' = 3x^2 + 12x$$

Esta perante a derivada de um polinómio, você é inteligente, por isso derivou cada termo do polinómio, aplicando a regra da derivada de uma potência e acertou.

$$b) [(x-4)^2]' = [(x-4)^2]' = 2(x-4) = 2x-8$$

Mantendo o mesmo processo conseguiu derivar a função desta alínea

$$\begin{aligned} c) \left(\sqrt{x} + \frac{7}{2\sqrt{x}} \right)' &= (\sqrt{x})' + \left(\frac{7}{2\sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{7}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{7}{4x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Mantendo o mesmo processo conseguiu derivar de novo a função. Desta vez, teve de se recordar da equivalência da potência de expoente fraccionário e um radical de índice **n**.

Agora, tente resolver os exercícios que se seguem para medir o seu grau de compreensão da matéria.



Avaliação



Avaliação

Determine as derivadas das funções seguintes:

a) $\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 1$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\frac{x^2 - 7x + 4}{x}$

Lição 6

Derivada do produto e quociente

Introdução

Erro! Marcador não definido.

Continuando com estudo das derivadas de funções, vamos deduzir as regras para as derivadas do produto e do quociente de funções, que vão permitir o cálculo muito facilitado.

- *Aplicar* a regra de derivada do produto no cálculo da derivada duma função.
- *Aplicar* a regra de derivada do quociente no cálculo da derivada duma função.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Aplicar* a regra de derivada do produto no cálculo da derivada de uma função.
- *Aplicar* a regra de derivada do produto no cálculo da derivada de uma função.

Derivada do produto e do quociente

Consideremos a função: $f(x) = x \cdot (x + 3)$ determinemos a derivada da função dada de duas maneiras :

(1) Se $f(x) = x(x + 3) = x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 2x + 3$ pela regra de derivada da potência.

(2) Calculando a derivada de cada factor e depois o produto destas teremos
 $f'(x) = (x)'(x + 3)' = 1 \cdot 1 = 1$



Conclusão: (1) $\neq$ (2).

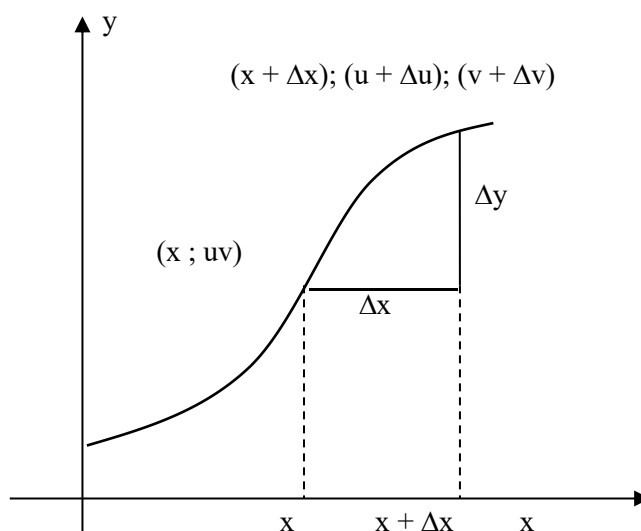
Conclusão: o resultado em dois não corresponde à derivada da função, segundo a regra da derivada de uma potência (2) mas este processo seria muito moroso para expressões mais complexas de produtos. Vamos agora deduzir a regra para derivada do produto que poderá resolver o problema.

Regra de derivação do produto

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = v(x) \cdot u'(x) + v'(x) \cdot u(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

Demonstração



Dada $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ então:

Quando $x \rightarrow x + \Delta x$, segue-se que $u \rightarrow u + \Delta u$ e $v \rightarrow v + \Delta v$

$$\begin{aligned} \Delta f &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v \\ &= u \cdot v + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \\ &= v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Pretendendo-se determinar o $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ teremos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \right)$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Logo:

$$\frac{df}{dx} = v \cdot \frac{dv}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{ou} \quad (u \cdot v)' = v \cdot u' + u \cdot v'$$

Exemplo: Dada a função $x \cdot (x+3)$ determine a sua derivada.

Resolução:

$$y' = x'(x+3) + x(x+3)' = 1(x+3) + x(1+0) = x+3+x = 2x+3$$

No caso em que temos três funções basta juntarmos duas delas

Mas também pode se deduzir a fórmula do produto de três funções

$$f = u \cdot v \cdot w \Rightarrow f' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v$$



Derivada do Quociente

Dada a função $f(x)$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{ou} \quad y = \frac{u}{v}$$

Vamos tratar o quociente como se fosse um produto pois

$$f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \quad \text{ou} \quad y = u \cdot \frac{1}{v} = u \cdot v^{-1}$$

Derivando esta função como no caso anterior teremos:

$$\begin{aligned} y' &= v^{-1} \cdot u' + u \cdot (v^{-1})' = v^{-1} \cdot u' + u \cdot (-1v^{-2})v' \\ &= \frac{u'}{v} + \frac{uv'}{v^2} = \frac{vu' + uv'}{v^2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{c.q.d}$$

Exemplo: calcule a derivada de;

$$y = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

Resolução:

$$\frac{x^3 + 2}{2x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^2 \cdot 2x - 2 \cdot (x^3 + 2)}{4x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 4}{4x^2} \\ &= \frac{4x^3 - 4}{4x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{4x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A regra da derivada do produto é a seguinte:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = v(x) \cdot u'(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

- A regra da derivada do Quociente é a seguinte:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) v(x) - u(x) v'(x)}{(v(x))^2}$$



Actividades



Actividades

Calcule as derivadas das seguintes funções:

1) $\sqrt{x} \cdot (2-x)$ 2) $\frac{x-1}{x+1}$

Resolução

$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= (\sqrt{x})' (2-x) + \sqrt{x} (2-x)' \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (2-x) + \sqrt{x} (-1) \\ &= x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y' &= \frac{(x-1)'(x+1) - (x+1)'(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Tente resolver os exercícios que se seguem para medir o seu nível de compreensão da matéria.

Avaliação



Avaliação

Calcule as derivadas das seguintes funções:

1) $(x-3)(2x+5)$ 2) $\frac{(x-1)}{\sqrt{x}}$



Lição 7

Derivada de funções compostas

Introdução

Erro! Marcador não definido.

As regras de derivação estudadas nas lições anteriores não são suficientes para derivar as funções compostas, tais como:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 2} \quad y = 3\sin 5x \quad y = \cos^3 2x \quad y = \frac{3}{\sqrt{6-x}} \quad \text{etc.}$$

Mas é claro que existe sempre uma saída para todos os problemas, siga o seguinte conselho:

Rever toda a matéria sobre as regras fundamentais de derivação que já estudou bem como, sobre as funções compostas, como forma de se preparar para entender com facilidade o algoritmo de derivação das funções compostas.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Aplicar a regra de cadeia no cálculo da derivada de funções compostas.

Derivada de funções compostas

Tomemos como exemplo a seguinte função $y = (x^{10} + 2)^{10}$. Para achar a derivada desta função, teríamos que desenvolver este produto binomial que é um processo muito moroso. Casos como estes podem ser resolvidos aplicando uma regra bastante simples, chamada Regra de cadeia. Em que consiste esta regra?

Quais são os procedimentos da regra de cadeia?

Fácil, mas antes disso, recordar o conceito de função composta. Em geral, uma função composta $F = f \circ g$ é dada por:

$$y = F(x) = f(g(x)), \quad F(x) = f(t), \text{ sendo } t = g(x).$$

$$x \rightarrow g(x) = t \rightarrow f(t) = f(g(x)) = y$$

De certeza que você já se recordou da função composta, agora os procedimentos para achar a derivada desta função serão estudadas partindo de exemplos concretos.

Regra de cadeia

$$\begin{aligned} \text{Se } F(x) = f(g(x)) = f(t), \text{ sendo } t = g(x) &\Rightarrow \\ F'(x) = f'(t) \cdot g'(x) &\Leftrightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

($f(x)$ deve ser derivada em relação a t)

Demonstração

Seja $y = F(x)$ definida como a composição das funções

$$x \rightarrow g(x) = t \rightarrow f(t) = f(g(x)) = y$$

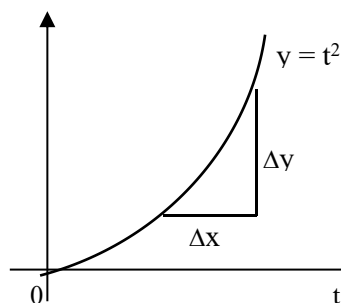
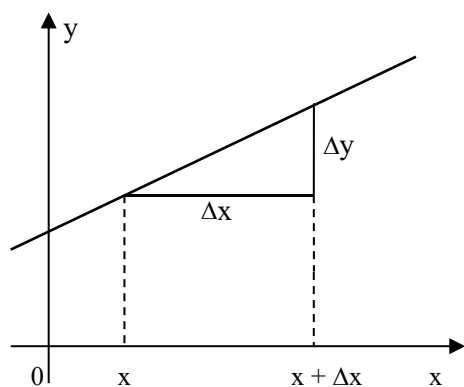
Isto significa que $y = f(t)$, sendo $t = g(x)$. A nossa tarefa é provar que :

$$f'(x) = f'(t) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Consideremos por exemplo a função.

$$y = \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^2$$

$$\text{Sendo } t = \frac{1}{2}x + 3 \text{ e } y = t^2$$



Os gráficos das duas funções mostram que:

Quando há uma pequena variação Δx em x origina uma pequena variação Δt em t e depois Δy em y . Portanto, a variação Δy em y depende da variação Δx em x através da variação Δt em t , e quando Δx tende para 0, também, Δt tende para 0, Δy tende para 0.

Escreve-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Então, por definição de derivada, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

(pois, $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t \rightarrow 0$)

Logo: Se $y = f(t)$, $t = g(x)$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Uma função é composta, se resulta de uma composição de duas ou mais funções.

Ex: $y = F(x) = f(g(x))$, $F(x) = f(t)$, sendo $t = g(x)$.

A fórmula para calcular a derivada de uma função composta tem o nome de regra de cadeia.

Regra de cadeia

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Aprendeu que para derivar funções compostas ou seja funções de funções, é preciso primeiro identificar a função oculta $t = g(x)$.



Vamos em seguida através de algumas actividades aplicar a regra de cadeia.

Atividades



Atividades

1. Derive a função $y = \sqrt{4-x}$

Resolução:

$$y = \sqrt{t} \text{ sendo } t = 4 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dt}{dx} = -2x$$

Aplicando a regra de cadeia, teremos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{t}}$$

substituindo $t = 4 - x^2$

$$\text{Logo: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Você percebeu bem primeiro substituiu $4 - x^2$ por t .

depois calculou a derivada de $y = \sqrt{t}$ (potência) porque $y = \sqrt{t}$ pode

ser escrito como $y = t^{\frac{1}{2}}$ (potência de expoente

fracionário). E por último aplicou a regra de cadeia.

Mais um exemplo.

2. Derive a função $y = 3(7 - 5x^4)^4$

$$\text{Seja } k = 7 - 5x^4 \quad \Rightarrow \quad y = 3k^4$$



Assim a derivada da função em k será igual a $y' = 3.4k^3 k'$

Como $k = 7 - 5x^4$ substituindo teremos:

$$y' = 3.4k^3 k' = 12(7 - 5x^4)^3 (7 - 5x^4)' = 12(7 - 5x^4)^3 (-20x^3) = -240x^3(7 - 5x^4)^3$$

Facilimo, repetindo o mesmo processo do exemplo 1, chegou ao resultado desejado e correcto.

Agora, chegou o momento de medir o seu nível de compreensão da matéria da lição, não fique agitado pois, você está preparado para isso. Em caso de dificuldade volte a ler com calma a lição.

Avaliação



Avaliação

Aplicando a regra de cadeia, determine a derivada de cada uma das funções que se seguem:

1) $(5 - x^2)^4$ 2) $(\sqrt{4 + 3x - x^2})^2$ 3) $\frac{1}{3(x - 1)}$

Lição 8

Derivadas de funções trigonométricas

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Você conhece muito bem as funções seno e co-seno até os respectivos gráficos pois, tratou desta matéria pela primeira vez na décima classe, faça mais uma vez uma leitura destes conteúdos para que o cálculo das derivadas destas funções seja interessante para si.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Derivar a função seno.
- Derivar a função co-seno.

Derivadas de funções trigonométricas

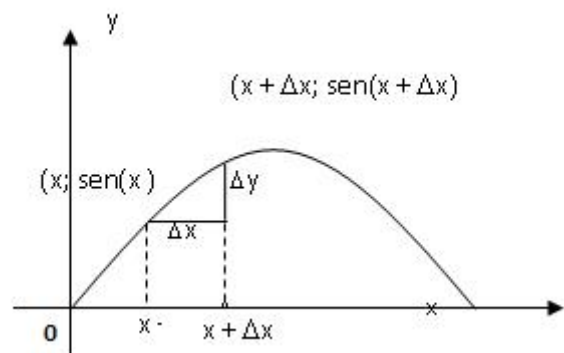
Derivada da função $\text{sen}(x)$

Dada a função $y = f(x) = \text{sen} x$, determinemos a sua derivada, qual será?

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta f = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen} x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen} x}{\Delta x}$$





Agora, vamos utilizar uma fórmula trigonométrica que se pode admitir por enquanto sem demonstrar.

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p - q}{2} \right)$$

Aplicando esta fórmula teremos:

$$\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right)$$

$$\text{Portanto: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Por definição de derivada, pode-se escrever:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Como pode ver, estamos perante um limite notável $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$,

podemos substituí-lo por 1 (um). E substituindo na expressão

$\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ o Δx por 0 (zero) porque queremos calcular o limite da

função quando este tende para zero, então:

$$\frac{df}{dx} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Logo:

$$\text{se } f(x) = \text{sen}x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \text{cos}x \quad \text{ou} \quad \frac{d(\text{sen}x)}{dx} = \text{cos}x$$

A derivada da função **senx** é igual a função **cosx**

Exemplo:

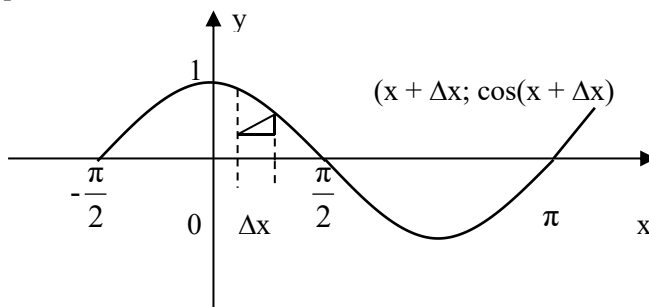
1) Seja $f(x) = 5\text{sen}x \Rightarrow f'(x) = 5\text{cos}x$

2) seja $f(x) = x^3 + \frac{2}{3}\text{sen}x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}\text{cos}x$

Derivada da função cos(x)

Vamos determinar a derivada da função co-seno com base nos conhecimentos que temos sobre a derivada de uma função composta.

Mas você ainda se recorda da curva (gráfico) da função co-seno? Veja a seguir para facilitar a compreensão da matéria:



Das relações trigonométricas de ângulos complementares sabemos que:

$$\checkmark \quad \text{cos}x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Então: $y = \text{cos}x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ é uma função composta e podemos,

introduzindo nova variável, ter: $y = \text{sen}t$ onde $t = \frac{\pi}{2} - x$



a derivada da função **sen**t em termos de de **t** e a derivada da função **t** em relação a **x** serão :

$$\checkmark \quad \frac{dy}{dt} \cos t, \quad \frac{dt}{dx} = -1$$

Isto implica que :

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Logo

$\text{Se } f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen} x \quad \text{ou} \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\text{sen} x$

A derivada da função $\cos x$ é igual a **menos** $\text{sen} x$.

Exemplo:

$$F(x) = 3\cos x \Rightarrow f'(x) = -3\text{sen} x$$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A derivada da função seno é dada por:

$$\text{Se } f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \quad \text{ou} \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

- A derivada da função co-seno é dada por:

$$\text{se } f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad \text{ou} \quad \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$



Actividades



Actividades

Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$1) y = \frac{1}{2} \sin x \quad 2) y = \cos^3 4x$$

Resolução

$$1) y' = \left(\frac{1}{2} \sin x \right)' = -\frac{1}{2} \cos x$$

2)

$$y' = (\cos^3 4x)'$$

$$\text{Seja } \cos 4x = k \Rightarrow y = k^3 \quad y' = (k^3)' \cdot (4x)' = 3k^2 \cdot (\sin 4x) \cdot 4$$

$$\text{logo; } y' = -12k^2 \sin 4x \quad \text{mas } k = \cos 4x \quad \text{Substituindo te temos}$$

$$y' = -12(\cos 4x)^2 \cdot \sin 4x = -12 \cos^2 4x \cdot \sin 4x$$

Agora, tente resolver sozinhos os exercícios seguintes.

Avaliação



Avaliação

Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

- 1) $4\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ 2) $7\cos^2 x$ 3) $-3\cos(4\sqrt{x})$ 4) $3\sin(3x+5)$
5) $\sin x + \cos x$



Lição 9

Derivadas de funções logarítmicas e exponenciais

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Nesta lição, vamos recordar as funções logarítmicas e exponenciais que estudamos no módulo três, bem como as propriedades operatórias destas funções fazendo mais uma leitura corrida deste módulo. Pois procedendo dessa forma estaremos preparando voce para melhor a derivação destas funções.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Achar a derivada de funções exponenciais.
- Achar a derivada de funções logarítmicas.

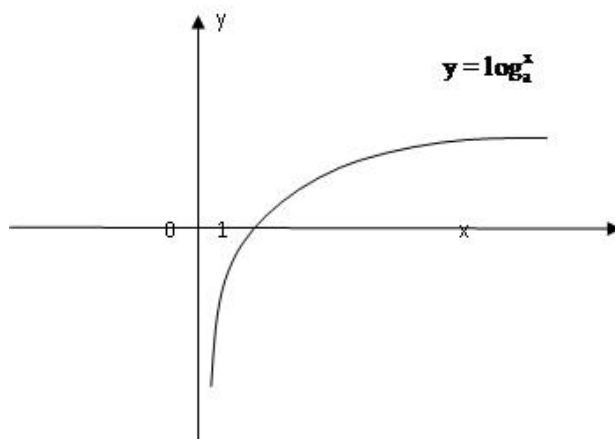
Derivada da função Exponencial e Logarítmica

Derivada da função logarítmica

Vamos recordar as propriedades da função logarítmica . A função logarítmica é uma função contínua como você sabe e além disso,

$y = \log_a x$ ($a > 0$ a tem como funcao inversa

$x = a^y$ (função exponencial).



Algumas propriedades da função logarítmica para esta lição

$$1) a^{\log_a x} = x$$

$$2) \log_a a^x = x$$

$$3) a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y$$

$$4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Nesta propriedade se substituirmos o x por $\frac{x}{y}$ teremos:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y \quad \text{mas} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x} \right)^y = a^{y \log_a x} \Rightarrow \log_a x^y = y \log_a x$$

Qualquer $a, b > 0$, temos :

$$\log_a b \cdot \log_b a = a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b} \right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

Vamos demonstrar esta implicação:

Demonstração



Sabendo que $y = \log_a x$, substituindo na expressão

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x) \text{ teremos:}$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

Pela propriedade da diferença de logaritmos

$$\Delta y = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

Simplificando a expressão “argumento do logaritmo”

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e \end{aligned}$$

Neste passo você teve que se recordar dos limites notáveis para poder avançar, veja como é importante a aplicação dos limites notáveis, só assim, foi possível fazer a demonstração.

Quando se tratar de logaritmo natural;

$$y = \ln x$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{x}} = \\ &= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\text{portanto } y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Isso mesmo, você entendeu a demonstração, pois

1° Aplicou a definição de derivada e obteve no numerador da fração a diferença de logaritmos.

2° Aplicando a propriedade operatória do logaritmo $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

obteve: Falta algo

3° Como o argumento do limite é uma fração com numerador também fraccionário multiplicou este, pelo inverso do denominador.

4° Aplicou o logaritmo de uma potência $\ln a^n = n \ln a$

5° Fez as transformações algébricas com objectivo de encontrar o limite

notável que se relaciona com logaritmos $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ pois quando

$x \rightarrow \infty$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ para poder substituir a expressão o limite notável obtido por e.



6° Por último, voltou a aplicar o logaritmo de uma potência e chegou ao resultado

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

A derivada de $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$ embora não vamos demonstrar, pode ser escrita usando o logaritmo natural, como

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \text{ portanto:}$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

É importante que você conheça as duas formas de expressar a derivada da função logarítmica, para que não fique atrapalhado ao consultar alguns livros, com esta forma de tratamento.

Função Exponencial

Algumas propriedades da função exponencial

para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad a^\alpha > 0$$

$$\text{Sendo } \alpha < \beta \quad a^\alpha < a^\beta$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$a^x \rightarrow 1 \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

$$a^x \rightarrow \infty \quad \text{quando } x \rightarrow \infty$$

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow -\infty$$

Fórmula para calcular a derivada da função exponencial é:

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

Se a base for igual ao número “e” temos;

$$y = e^x \Leftrightarrow y' = e^x$$

Vamos demonstrar esta implicação:

Demonstração

$$y = a^x \quad \text{da logaritmização}$$

$$\ln y = \ln a^x \quad \text{derivando ambos membros}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a$$

$$y' = a^x \ln a$$

c.q.d

$$\boxed{y' = a^x \ln a}$$

Considerando a função exponencial $y = e^x$ aplicando a definição de derivada teremos:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

$$\text{Conclusão: } y = e^x \Leftrightarrow y' = e^x$$



A função exponencial $y = e^x$ e a sua função derivada são iguais.

Função logarítmica

Propriedades da função logarítmica

$$1) a^{\log_a x} = x$$

$$2) \log_a a^x = x$$

$$3) a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y$$

$$4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Fórmula para calcular a derivada da função logarítmica é:

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e \text{ ou } y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Em caso de um logaritmo natural temos:

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

Chegou o momento de realizar algumas actividades para melhor exercitar a aplicação das fórmulas que acaba de deduzir.

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x \Leftrightarrow y' = e^x$$

Chegou o momento de realizar algumas actividades para melhor exercitar a aplicação das fórmulas que acaba de deduzir.



Actividades



Actividades

1. Calcular as funções derivadas de:

$$1) y = \ln(3x^2 - 1)$$

$$y' = \frac{1}{3x^2 - 1} (3x^2 - 1)' = \frac{(3x^2 - 1)'}{3x^2 - 1} = \frac{6x}{3x^2 - 1}$$

Introduzindo nova variável teremos $3x^2 - 1 = k$ você sabe que a derivada da função $y = \ln k$ é dada pela fórmula $y' = \frac{1}{k}$.

Mas estamos perante uma função composta por isso não se esqueceu da regra para derivação da função composta, por isso achou o produto da derivada do logaritmo pela derivada do argumento do logaritmo.

$$2) y = \log_2 x^3$$

$$y' = \frac{(x^3)'}{x^3 \ln 2} = \frac{3x^2}{x^3 \ln 2} = \frac{3}{x \ln 2}$$

Lindo, você já está entendendo a aplicação da regra para derivação da função logarítmica

Aplicou o produto das derivadas da função logarítmica e do seu argumento que é uma função potencial.

3. Calcule a derivada de y se

$$a) y = e^{-x+5}$$

$$y' = e^{-x+5} \cdot (-x+5)' = -e^{-x+5}$$

$$b) y = 2xe^{\sqrt{x}}$$

$$y' = (2x)' xe^{\sqrt{x}} + 2x \cdot (e^{\sqrt{x}})'$$

$$y' = 2e^{\sqrt{x}} + 2x \cdot (\sqrt{x})' xe^{\sqrt{x}}$$

$$y' = 2e^{\sqrt{x}} + 2x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = 2e^{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = 2e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$$

NB: não se esqueça que deve racionalizar o denominador na segunda parcela por isso que o resultado não está na forma fraccionária.

Caro estudante, tente resolver os exercícios que se seguem sem nossa ajuda, pois vai poder fazer uma auto-avaliação da aprendizagem do conteúdo da presente lição.



Avaliação



Avaliação

Calcule as derivadas das funções:

1) $y=10^x$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} x$

3) $y=2^{-3x}$ 4) $y=x\ln^2 x$ 1) $y=10^x$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} x$

Lição 10

Derivadas de funções inversas

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Para estudar a derivada da função inversa, é necessário fazer em primeiro lugar uma revisão do conceito de uma função inversa. Por exemplo, a função logarítmica é sobejamente conhecida como função inversa da função exponencial e vice-versa. você conhece perfeitamente as características destas funções. sendo a básica aquela que exprime seus domínio e contradomínios (o domínio de uma função e contradomínio da outra e vice-versa).

O nosso objectivo nesta lição é encontrar uma fórmula que nos permita exprimir a derivada de uma função em termos da derivada da sua inversa.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Calcular a derivadas de funções inversas.

Função inversa

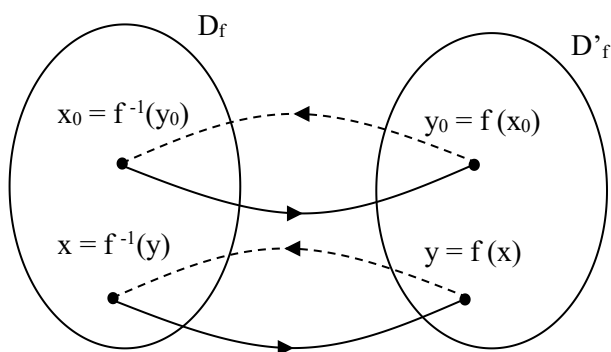
Já sabemos que dada uma função

$f(x) : x \rightarrow y$ sendo $(f(x) \text{ bijectiva})$,
 existe uma funcao $g(x) : y \rightarrow x$, tal que ;
 $f(x) = y \Leftrightarrow g(x) = x$



Derivadas de funções inversas

Seja $y = f(x)$ uma função invertível, que admite em x_0 a derivada finita $f'(x_0)$ cuja função inversa admite também derivada finita no ponto correspondente:



Então:

$$D_f \rightarrow D'_f$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

$$D'_f \rightarrow D_f$$

$$y \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Nestas condições, tem-se por definição de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{y - y_0}} \quad (1)$$

Atendendo a que nos pontos em que a derivada é finita, quando x tende para x_0 também y tende para y_0 isto porque podemos escrever:

$$f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}$$

Na função inversa, tal como está representada, a variável independente é y .

Fórmula pode ser escrita como:

De um modo geral consideremos a função composta

$g(f(x))$:

$$x \rightarrow f(x)=y \rightarrow g(y)=x$$

Aplicando a regra de cadeia, teremos:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} \Rightarrow 1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$$

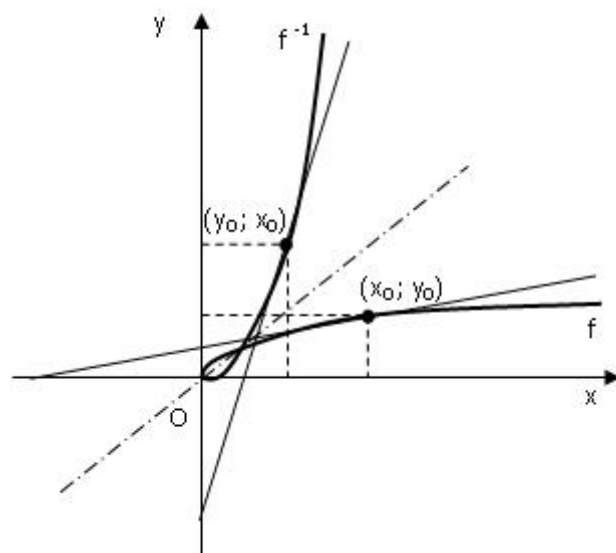
$$\text{conclusão: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Acabamos de verificar que a derivada de uma função f é o inverso da derivada da sua função inversa.

A derivada da função inversa duma dada função invertível é sempre igual ao inverso aritmético da derivada da função dada (em pontos correspondentes)

Geometricamente

A relação que existe entre as derivadas de duas funções inversas uma da outra em pontos correspondentes são simétricos em relação a bissectriz dos quadrantes ímpares. E os coeficientes angulares, declives das rectas tangentes em pontos correspondentes, são inversos aritméticos um do outro.





Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A derivada da função inversa de uma dada função invertível é sempre igual ao inverso aritmético da derivada da função dada (em pontos correspondentes).

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow 1 = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{conclusão: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

- Geometricamente, a relação que existe entre as derivadas de duas funções inversas uma da outra em pontos correspondentes são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares. E os coeficientes angulares, declives das rectas tangentes em pontos correspondentes, são inversos aritméticos um do outro.

Vamos agora, resolver alguns exercícios de fixação da material.

Atividades



Atividades

Calcule as derivadas das funções inversas de :

$$1) \quad y = f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad x = g(y) = \sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = 2x$$

$$\frac{dx}{dy} = x' = g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$$

$$\text{Então, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Claro, você já domina o cálculo de derivadas de vários tipos de funções:

primeiro, calculou a função inversa de $y = x^2$ portanto expressou x em termos de y (ou resolveu a equação $y = x^2$ em ordem a x) e teve como resultado $x = \sqrt{y}$

segundo achou as derivadas em cada caso, aplicando a regra da derivada de uma potência, pois, as duas funções são potenciais x^2 e $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

por último comparou os resultados obtidos e concluiu que os valores das derivadas são inversos isto é, $2x$ e $\frac{1}{2x}$.



Mais um exemplo:

$$2) \quad y = f(x) = 5x - 3 \qquad x = g(y) = \frac{y + 3}{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = 5 \qquad \frac{dx}{dy} = x' = g'(y) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Então, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \qquad \text{ou} \qquad f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Isso, você acertou em cheio, usando o mesmo procedimento, desta vez derivou aplicando a regra de derivação de funções polinomiais ($5x - 3$ e $\frac{y + 3}{5}$) e chegou ao resultado 5 e $\frac{1}{5}$ que são valores inversos, logo confirmou mais uma vez que a derivada de f é o inverso da derivada da sua função inversa. .

Acabamos de verificar que a derivada de uma função f é o inverso da derivada da sua função inversa.

Agora, realize alguns exercícios de auto-avaliação.

Avaliação



Avaliação

Calcule as derivadas das funções inversas

1) $y = (2x - 3)^2$ 2) $\sqrt{4 + 3x}$

Lição 11

Aplicação da derivada em outras ciências

Erro! Marcador não definido.

Introdução

A derivada da função tem aplicação em vários domínios do nosso dia a dia,
Tem aplicação nas outras ciências.



Na disciplina de matemática ela é aplicada sobretudo para o estudo das funções quanto a: Monotonia de uma função, Extremos de uma função, Máximos e mínimos de uma função, Concavidade e pontos de inflexão, Problemas de optimização.

Vamos a partir desta lição, mostrar a aplicação da derivada nos vários domínios da ciência.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Aplicar a derivada em problemas concretos.*

Aplicação de derivadas em outras ciências

Para melhor compreender a nossa lição, vamos reflectir em conjunto sobre os exemplos que são propostos a seguir:

Na Física

Movimento Rectilíneo

Consideremos queda livre dos corpos. Em física, temos a equação $s = 5t^2$;

a velocidade no tempo t , $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

Isto significa que, $v(t)$ é a derivada da deslocação $s(t)$ em relação a t .

Em relação ao movimento rectilíneo: o movimento de um ponto P ao longo de uma recta é completamente definido pela equação

$s = s(t)$, onde $t > 0$ é o tempo e S é a distância de P a um ponto fixo

de sua trajetória.

A velocidade de P ao tempo t é $v = \frac{ds}{dt}$

Se $v > 0 \Rightarrow p$ está em movimento no sentido de S crescente

Se $v < 0 \Rightarrow p$ está em movimento no sentido de S decrescente.

Exemplo 1

Um corpo move-se sobre uma regra segundo a

fórmula:

$$s(t) = \frac{1}{2}t^3 - 2t.$$

Determine a sua velocidade e aceleração depois de 2 segundos.

Resolução:

$$s(t) = \frac{1}{2}t^3 - 2t \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \Rightarrow v(2) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 2 = 4 \text{ m/s}.$$

$$\Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \cdot \frac{3}{2}t = 3t \Rightarrow a(2) = 6 \text{ m/s}^2$$

Na Economia

Na Economia, é definida “o custo marginal” como a taxa de variação do “custo total” em relação a x (número de unidades produzidas).

Exemplo 1. Considere uma função custo total do tipo:

$$C(x) = \frac{3(x-x_0)^3}{3k} + m_0x + c_0 \quad (x \text{ - número de unidades produzidas})$$

$$\frac{x^3}{3k} - \frac{3x^2x_0}{3k} + \frac{3xx_0^2}{3k} + m_0x - \frac{x_0^3}{3k} + c_0 \rightarrow \text{custo inicial para } x=0$$

Para determinar o custo marginal $m(x)$



determinar $C'(x)$:

$$C'(x) = \frac{3(x-x_0)^2}{3k} + m_0$$

$$m(x) = \frac{(x-x_0)^2}{k} + m_0$$

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Dada a definição $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

1. A razão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é também chamada a “taxa média da variação da função no intervalo $[x, x + \Delta x]$ ou taxa de variação de f em relação a x ”.

Ela mede a “rapidez” com que a função varia quando x passa do valor x ao valor $x + \Delta x$.

Por exemplo: se a distância S é dada como uma função de t , segue-se que a velocidade v , que é a derivada de s , é a “taxa de variação de $s(t)$ ”.

Por exemplo: na economia, é definido “o custo marginal” como a taxa de variação do custo

Agora, resolva os exercícios de auto-avaliação.



Actividades



Actividades

Na Física

Exercício 1 .

Um objecto é lançado do solo, verticalmente para cima a velocidade de 100m/s . desprezando a resistência do ar, a distância vertical acima do solo $S(t)$ como função do tempo, e dada por:

$$s(t) = 100t - \frac{gt^2}{2}$$

Determine a altura máxima e o tempo gasto para a atingir.

Resolução:

$$s(t) = 100t - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow v(t) = s'(t) = 100 - 2 \cdot \frac{gt}{2} = 100 - gt.$$

A altura máxima h é atingida quando $V=0$, isto é, $100 - gt = 0$; $t = \frac{100}{g}$. Isto é

o tempo para a atingir.

Substituindo este valor na primeira das equações obteremos;

$$h = \frac{100^2}{g} - \frac{100^2}{2g} = \frac{5000}{g}$$

Tomando $g=9,8\text{m/s}^2$, esses valores serão: $t=10,2\text{s}$; $h=510\text{m}$.

2.Taxa de Variação

Como vimos no início do capítulo, a derivada de uma função num ponto x

$$\text{é definida } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A razão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é também chamada a “taxa média da variação da função no intervalo $[x, x + \Delta x]$. Ela mede a “rapidez” com que a função varia quando x passa do valor x ao valor $x + \Delta x$.

Do mesmo modo que a razão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é chamada taxa média da variação da função, a derivada $f'(x)$ é chamada “taxa de variação de f em relação a x ”.

Claro que, quando f é uma função de t , $f'(t)$ diz-se só “taxa de variação” e esta compreendido” em relação a t ”.

Por exemplo: se a distância S é dada como uma função de t , segue-se que a velocidade v , que é a derivada de s , é a “taxa de variação de $s(t)$ ”.

Mas, se o comprimento C de uma barra de ferro é dada como uma função de temperatura T° ($C = C(T^\circ)$) então, o coeficiente de dilatação linear da barra que é a derivada $\frac{dc}{dt}$ é a “taxa de variação do comprimento C em relação a temperatura T° ”.



Avaliação



Avaliação

1. Um corpo move-se sobre uma recta horizontal de acordo com a

fórmula: $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$

Quando s é crescente e quando é decrescente?

Quando v é crescente e quando é decrescente?

2. A produção de algodão de uma cooperativa é uma função do adubo

empregado segundo a relação $y = 100 + 200X - X^2$ em que x é a

quantidade de adubo em kg e y é a produção em kg/ha.

Determine a taxa de variação da produção em relação a x .

Lição 12

Monotonia de uma função

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Para melhor aprendizagem do tema desta lição, é importante ter um domínio sobre o conceito de continuidade de uma função num dado intervalo, bem como o cálculo da derivada de uma função num ponto e num intervalo dados.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



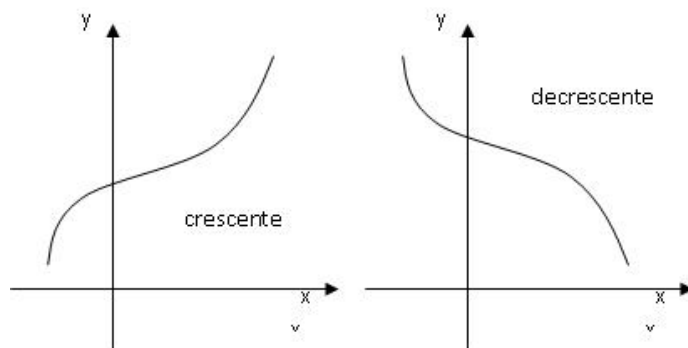
Objectivos

- Determinar os máximos e mínimos de uma função.
- Fazer o estudo da variação do sinal da 1ª derivada.

Monotonia de uma função

Estudar a monotonia de uma função implica indicar os intervalos de maior amplitude onde a função é crescente (ou estritamente crescente) ou decrescente (ou estritamente decrescente).

Observe os seguintes exemplos ;



Função estritamente crescente Função estritamente decrescente



Vamos recordar as seguintes definições:

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo I , e sejam a e b números de I

- f é estritamente crescente em I quando para todos os números reais a e b de I .

se $a < b$, então $f(a) < f(b)$

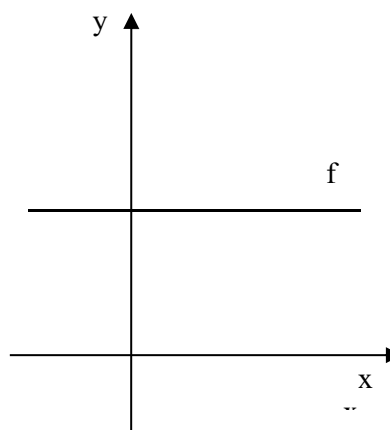
- f é estritamente decrescente em I quando para todos os números reais a, b de I .

se $a < b$, então $f(a) > f(b)$

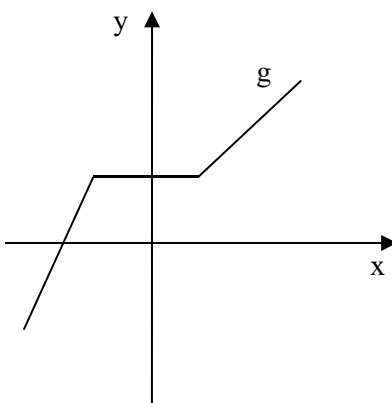
- f é constante em I quando para todos os números reais a e b de I .

$$f(a) = f(b)$$

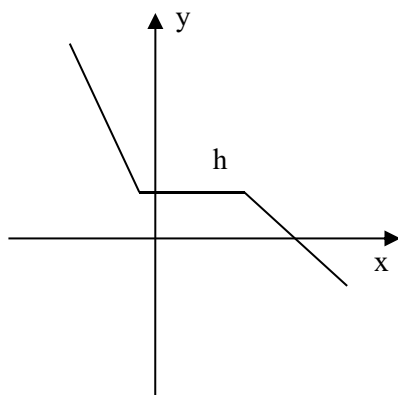
Função constante



Função crescente



Função decrescente



Seja f uma função real de variável real num intervalo I , e sejam a e b números de I

f é crescente em I para todos os números reais a e b de I ,

se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$

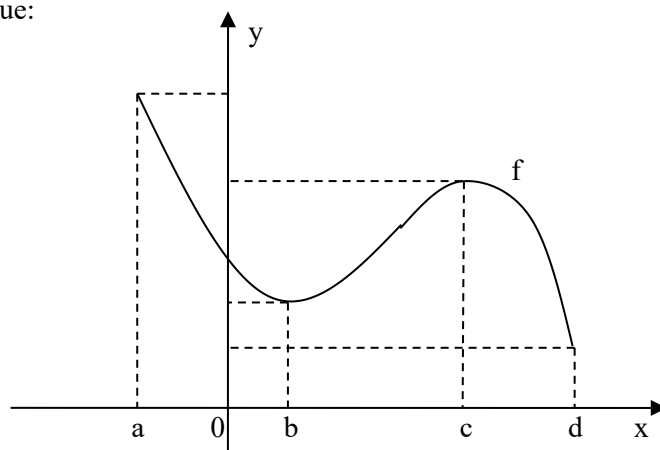
f é decrescente em I para todos os números reais a e b de I ,

se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$

Uma função constante em I é crescente e decrescente em I .

Extremos de uma função

Seja f uma função definida num intervalo $[a; b]$ dada a sua representação gráfica na figura que se segue:





- $f(a)$ é máximo absoluto de f .
- $f(d)$ é mínimo absoluto de f .
- $f(b)$ é relativo de f .
- $f(c)$ é máximo relativo f .

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo x de D :

$f(a) \geq f(x)$ significa que se escolhermos qualquer valor do domínio D , o valor da função será sempre maior que o valor da função o ponto a .

- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo x de D :

$f(b) \leq f(x)$ significa que se escolhermos qualquer valor do domínio D , o valor da função será sempre menor que o valor da função o ponto a .

- $f(a)$ é o máximo relativo de f se existir um intervalo aberto I contendo a tal que $f(a) \geq f(x)$ qualquer que seja $x \in I \cap D$.

- $f(b)$ é o mínimo relativo de f se existir um intervalo aberto J contendo b tal que $f(b) \leq f(x)$ qualquer que seja $x \in J \cap D$.

Os extremos da função (extremos absolutos) da função determinam –se com muita facilidade desde que se conheça o contradomínio da função.

Sempre que for necessário falar de extremos relativos deve referir a palavra relativo ou relativos.

As vezes diz-se apenas máximo da função ou mínimo da função para referir o máximo e mínimo absoluto.

Definição

Aos máximos e mínimos da função dá-se o nome de extremos da função.

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$

- Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a; b[$, f é estritamente crescente em $[a; b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a; b[$, então f é estritamente decrescente em $[a; b]$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$

- Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a; b[$, f é estritamente crescente em $[a; b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a; b[$, então f é estritamente decrescente em $[a; b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a; b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo aberto $]a; b[$. Então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Definição

Um número c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.



A determinação dos máximos e mínimos de uma função num intervalo fechado $[a; b]$ baseia-se na aplicação do teorema e definição acima referidos bastando apenas seguir o seguinte procedimento:

- (1) Determinar os pontos críticos de f em $]a; b[$.
- (2) Calcular $f(c)$ para cada ponto crítico c , determinado em (1)'
- (3) Calcular $f(a)$ e $f(b)$.
- (4) O máximo e o mínimo de f em $[a; b]$ são o maior e o menor dos valores calculados em (2) e (3).

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo x de D :

$$f(a) \geq f(x)$$

- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo x de D :

$$f(b) \leq f(x)$$

- $f(a)$ é o máximo relativo de f se existir um intervalo aberto I contendo a tal que $f(a) \geq f(x)$ qualquer que seja $x \in I \cap D$.

- $f(b)$ é o mínimo relativo de f se existir um intervalo aberto J contendo b tal que $f(b) \leq f(x)$ qualquer que seja $x \in J \cap D$.

- Sempre que for necessário falar de extremos relativos deve referir a palavra relativo ou relativos.

Pois, frequentemente, diz-se apenas máximo da função ou mínimo da função para referir o máximo e mínimo absolutos.

- Aos máximos e mínimos da função dá-se o nome de extremos da função.

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, f é estritamente crescente em $[a; b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a; b[$, então f é estritamente



decrecente em $[a; b]$

Teorema

Se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a; b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo aberto $]a; b[$. Então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Definição

Um número c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

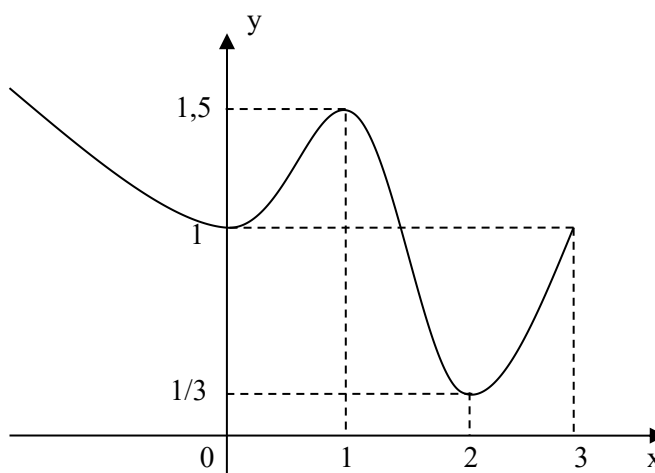
Vamos em conjunto realizar actividades de fixação.

Actividades



Actividades

1. Observe o gráfico da função f de domínio $]-\infty; 3]$



Identifique:

- os intervalos de monotonia;
- os extremos (absolutos)
- os extremos relativos

Resolução

- A função é decrescente nos intervalos $]-\infty; 0]$ e $[1, 2]$

é crescente nos intervalos $[0; 1]$ e $[2; 3]$

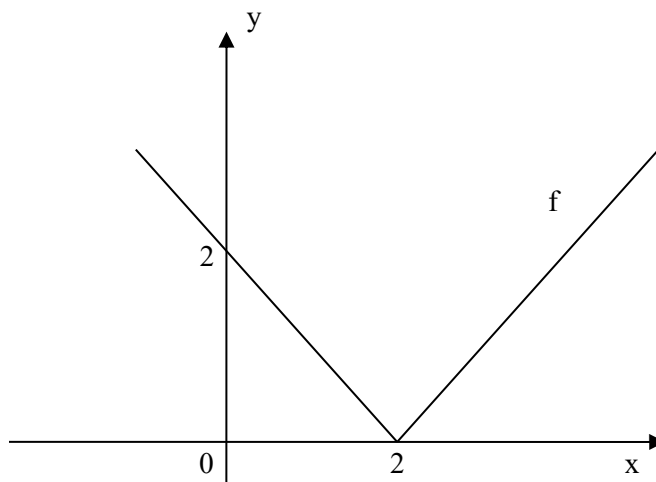
- A função não tem máximo absoluto.
- $f(2) = \frac{1}{3}$ é o mínimo absoluto
- $f(1) = 1,5$ e $f(3) = 1$ são máximos relativos.
- $f(0) = 1$ é mínimo relativo.



2 . Determine se existirem os extremos da função

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$$

Resolução



$$f(x) = |x-2|; f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 2 \\ -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2-0}{x-2} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x-2} = -1$$

$$f'(2) \text{ não existe pois } f'(2^+) \neq f'(2^-)$$

O mínimo absoluto é $f(2)$, não tem máximo.

Percebeu bem os procedimentos? Se não, volte a ler o texto, se percebeu vamos agora considerar os seguintes exercícios.

Avaliação



Avaliação

Determine se existem os extremos da função

$$\begin{cases} -x+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x=1 \\ -1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Lição 13

Extremos de uma função

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Caro estudante vamos investigar os extremos relativos de uma função com ajuda da primeira derivada dessa função.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Calcular* os extremos relativos de uma função aplicando a primeira derivada da função dada.

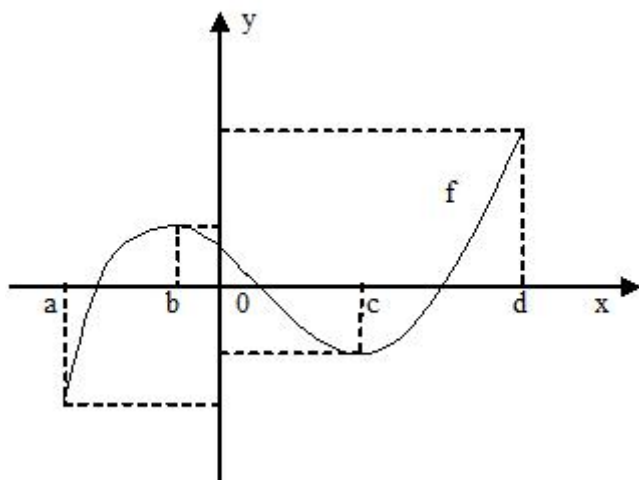
Extremos da função

A primeira derivada de uma função também pode ajudar a encontrar os extremos relativos.

Seja c um ponto crítico da função f , e suponha-se que é contínua em c e derivável num intervalo aberto I contendo c , com a possível excepção de poder não ser derivável em c .

Se f' muda de positiva em c , então $f(x)$ tem um máximo relativo para x igual a c .

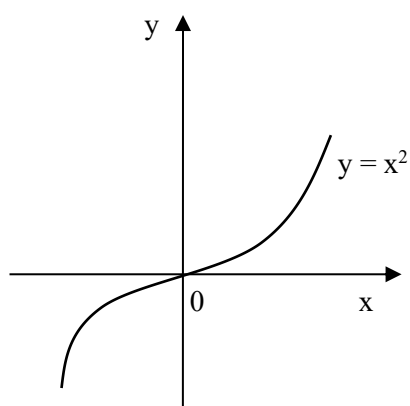
Se f' muda de negativa em c , então $f(c)$ é um mínimo relativo.



Tabela

x	a	b		c	d
f'	+	0	-	0	+
f		$f(b)$ Máx.rel		$f(c)$ Mín.rel	

Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo o x do intervalo I excepto para $x = c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f .



$$f'(x) = 3x^2; f'(x) > 0, \text{ qualquer } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 0$$

$f(0)$ não é extremo relativo de f



Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

A primeira derivada de uma função também pode ajudar a encontrar os extremos relativos.

Seja c um ponto crítico da função f , e suponha-se que é contínua em c e derivável num intervalo aberto I contendo c , com a possível exceção de poder não ser derivável em c .

- ✓ Se f' muda de positiva em c , então $f(x)$ tem um máximo relativo para x igual a c .
- ✓ Se f' muda de negativa em c , então $f(c)$ é um mínimo relativo.

Actividades



Actividades

Determine intervalos de monotonia e os extremos relativos

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

Resolução

$$a) f(x) = x + \frac{4}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

A derivada de f anula-se para $x = 2$ e $x = -2$

Tabela

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f		-4				4	

✓ A função é crescente em $]-\infty, -2]$ e $[2, +\infty[$

✓ A função é decrescente em $[-2, 0[$ e $]0, 2]$

✓ $f(-2) = -4$ é máximo relativo de f .

✓ $f(2) = 4$ é mínimo relativo de f .



Resolva agora, os exercícios que se seguem para a sua auto-avaliação.

Avaliação



Avaliação

Determine intervalos de monotonia e os extremos relativos da função

$$g(x) = e^x + \frac{1}{e^x} \quad .$$

Lição 14

Concavidades e pontos de inflexão

Introdução

Erro! Marcador não definido.

A palavra concavidade não é novidade para si, falou muito dela quando estudou a função quadrática em que o gráfico correspondente era uma parábola com a concavidade voltada ora para cima ora para baixo dependendo do sinal de a na função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Determinar* a segunda derivada de uma função.
- *Aplicar* a segunda derivada para investigar a concavidade e pontos de inflexão.

Concavidades e pontos de inflexão

Segunda derivada de uma função

A segunda derivada de uma função, aplicada no estudo da concavidade e pontos de inflexão de uma função. Mas existem também várias aplicações desta derivada.

Definição

A segunda derivada (ou função derivada de ordem 2) de uma função f é uma função:

- Cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em f' tem derivada.



- Em que cada ponto do domínio faz corresponder a derivada da função f' nesse Representa-se por:

$$f''(x) \text{ ou } \frac{d^2f}{dx^2} \text{ ou } D^2f$$

Um exemplo mais frequente de segunda derivada é a aceleração do movimento uniforme dos corpos que aprendeu na disciplina de física.

Exemplo:

A posição de um corpo em metros é dada em função do tempo em segundos por: $S = -4,9t^2 + 2t + 1$

A tarefa é calcular a velocidade e a aceleração do corpo no instante t .

Resolução

A velocidade, v , é a derivada da função S e expressa-se em m/s.

$$V(t) = \frac{d}{dt}(-4,9t^2 + 2t + 1) = -9,8t + 2$$

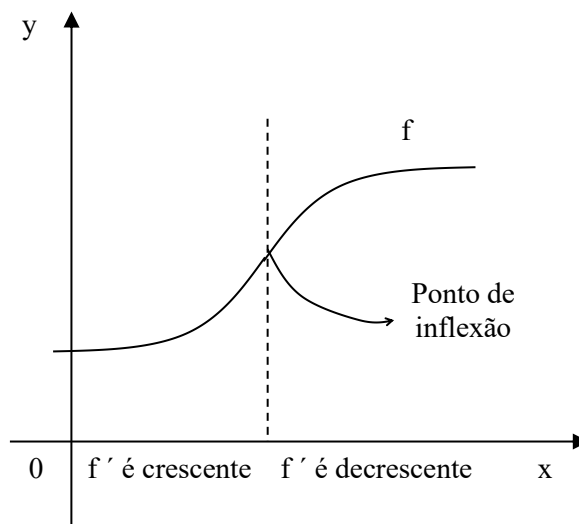
A aceleração a é a derivada da velocidade.

$$a(t) = \frac{d}{dt}(-9,8t + 2) = -9,8$$

A aceleração é a segunda derivada da função s e é expressa em m/s^2 .

Portanto para calcular a velocidade é só derivar a expressão dada do espaços (primeira derivada). E para calcular a aceleração basta derivar a expressão obtida da velocidade v (segunda derivada).

2. Concavidade e pontos de inflexão



O ponto $(c; f(c))$ do gráfico da função f é um ponto de inflexão se são verificadas as seguintes condições :

- f é contínua em c ;
- Existe um intervalo aberto $]a; b[$ contendo c de modo que o gráfico da função f tenha concavidades voltadas para baixo no intervalo aberto $]a; c[$ e a concavidade voltada para cima no intervalo aberto $]c; d[$, ou vice-versa.

Seja f uma função derivável no intervalo $]a; b[$. O gráfico da função f tem:

- A concavidade voltada para cima se a sua derivada for crescente;
- A concavidade voltada para baixo se a sua derivada for decrescente.

A monotonia de uma função f , num intervalo em que ela é derivável, está relacionada com o sinal da sua derivada f' nesse intervalo e a monotonia de f' está relacionada com o sinal da segunda derivada designada por f'' .



Se a derivada f'' da função f existe num intervalo aberto $E =]a; b[$, então o gráfico da função f :

- ✓ Tem a concavidade voltada para cima no intervalo aberto E se f'' for maior que zero neste intervalo E . (ou seja se f'' tomar valores positivos no intervalo aberto E)
- ✓ Tem a concavidade voltada para baixo no intervalo aberto E se f'' for menor que zero neste intervalo E (ou seja se f'' tomar valores negativos no intervalo aberto E).

Nota bem: Alguns autores consideram necessário para que $(c, f(c))$ seja um ponto de inflexão que, além das condições referidas, o gráfico da função tenha tangente no ponto.

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A segunda derivada (ou função derivada de ordem 2) de uma função f é uma função:

Cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em f' tem derivada.

Em que cada ponto do domínio faz corresponder a derivada da função f' nesse. Representa-se por:

$$f''(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad D^2f$$

- A monotonia de uma função f , num intervalo em que ela é derivável, está relacionada com sinal da sua derivada f' nesse intervalo e a monotonia de f' está relacionada com o sinal da segunda derivada designada por f'' .
- Se a segunda derivada f'' da função f existe num intervalo aberto $E =]a; b[$, então o gráfico da função f :
 - Tem a concavidade voltada para cima no intervalo aberto E se f'' for maior que zero neste intervalo E . (ou seja se f'' tomar valores positivos no intervalo aberto E)
 - Tem a concavidade voltada para baixo no intervalo aberto E se f'' for menor que zero neste intervalo E (ou seja se f'' tomar valores negativos no intervalo aberto E).

Agora é o momento de fazer os exercícios de fixação.



Actividades



Actividades

Estudo da concavidade e pontos de inflexão.

1. A função f é polinomial e portanto contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$$

Resolução

Fácil, calcular em primeiro lugar as derivadas de primeira e segunda ordens da função

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 3 \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 18x \quad ; \quad f''(x) = 6x - 18$$

Montar um quadro para estudar o sinal das funções derivadas.

Tabela de sinais

X	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	-	3	+
F	$\cap$	PI	$\cup$

Tire as conclusões : $f(3) = 27 - 81 + 3 = -51$

O gráfico da função tem a concavidade:

- Voltada para baixo em $]-\infty, 3[$

- voltada para cima em $]3, +\infty[$

O ponto $(3, -51)$ é ponto de inflexão do gráfico da função.

Resolva os exercícios seguintes para a sua avaliação.

Avaliação



Avaliação

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$g(x) = \frac{2}{x-1}$$



Lição 15

Problemas de otimização

Introdução

Erro! Marcador não definido.

Para problemas da vida real ou de outras ciências para além da matemática procura-se sempre soluções óptimas .

Essas soluções são muitas vezes encontradas determinando os extremos (máximos e mínimos) de uma função.

A qualquer problema deste tipo chama-se problema de otimização.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Resolver problemas de otimização com base em derivadas.

Problemas de otimização

A qualquer problema onde esteja em causa encontrar solução óptima chama-se problema de otimização e para a sua resolução teremos o seguinte procedimento.

1. Compreender o problema

Qual é a incógnita? Quais são os valores conhecidos? Quais são as condições a que obedecem as variáveis?

2. Fazer um esquema

Quais são os dados para colocar no esquema?

3. Introduzir símbolos

Como representar as variáveis? Quais as letras mais apropriadas?

4. Expressar a incógnita em função de uma só variável

Qual é a variável independente?

5. Usar métodos analíticos para encontrar a

Solução

Quais são os zeros da 1.^a derivada?

Quais são os extremos?

6. Discutir a solução

Resolvendo alguns problemas concretos você poderá entender melhor, vamos a isso:



Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Para resolver problemas de otimização deve:

1. Compreender o problema
2. Fazer um esquema
3. Introduzir símbolos
4. Expressar a incógnita em função de uma só variável
5. Usar métodos analíticos para encontrar a solução
6. Discutir a solução e dar resposta ao problema.

A resolução dos problemas de otimização compreende três passos importantes depois de formar a função, a saber.

1º) Achar 1ª derivada e os respectivos zeros;

2º) Montar um quadro de sinais para estudar a variação do sinal da 1ª derivada e o comportamento da função, e ;

3º) Decidir sobre os extremos (máximo e mínimo) para dar resposta ao problema colocado.

Tente resolver sozinho o seguinte problema de otimização para que possa avaliar o nível de compreensão da matéria.

Actividades

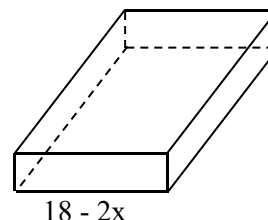
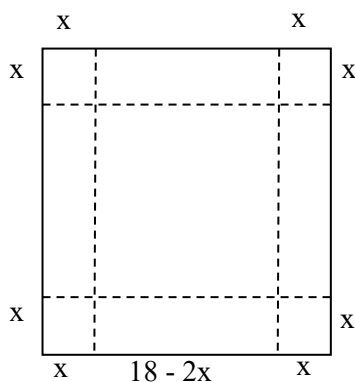


Actividades

1. Numa folha de cartolina quadrada de 18dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais construindo-se seguidamente por dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.

Resolução

Faça o esboço da situação em primeiro lugar para ajudar o seu raciocínio num rascunho. Depois de entender o problema poderá fazer o desenho matemático, como o seguinte:



Representando por x a medida em (dm) do lado do quadrado a cortar, a medida em (dm^3) do volume da caixa será dada por:

$$V = (18 - 2x)^2 x \quad \text{com } 0 < x < 9$$

A seguir, calculemos a derivada da nossa expressão V .



$$\begin{aligned} V' &= -4(18-2x)x + (18-2x)^2 \\ &= (18-2x)(-4x+18-2x) \\ &= (18-2x)(18-6x) \end{aligned}$$

A derivada V' anula-se para $x = 9$ e para $x = 3$

Ora, dado que $V' < 0$ para $3 < x < 9$ e $V' > 0$ para $x < 3$, a função admite um máximo relativo para $x = 3$.

tem-se pois a caixa de volume máximo é obtida, cortando em cada um dos cantos da folha um quadrado de 3dm de lado.

2. Determinar, num segmento AB de comprimento a (fixo), um ponto P de modo a que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados AP e PB.

A soma S das áreas dos quadrados de lados AP e PB é dada por :

$$S = x^2 + (a-x)^2$$

representado por x o comprimento do lado de um dos quadrados.

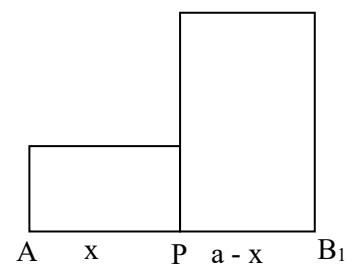
(terá de ser $0 < x < a$ porque?)

Derivando S , tem-se:

$$S' = 2x - 2(a-x)$$

$$S' = 4x - 2a$$

A derivada anula-se para $x = \frac{a}{2}$



Estude o sinal da derivada e conclua que S é mínimo para $x = \frac{a}{2}$.

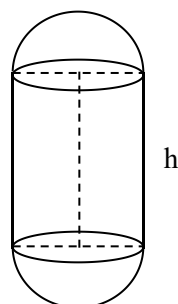
Avaliação



Avaliação

Problema

Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semi-esferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste. Supondo que a superfície total é igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h , averiguar qual é o sólido de volume máximo.





Lição 16

Equação das assíptotas

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Para esta lição é indispensável o conhecimento sobre limites, veja como na matemática a relação entre os temas tratados é uma constante. Isto significa que é necessário reler a lição sobre o conceito de limite, para facilitar a sua aprendizagem em relação à determinação das equações das assíptotas.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

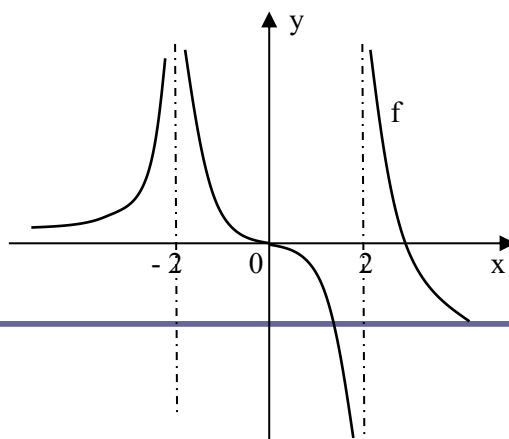


Objectivos

- Identificar a assíptota vertical.
- Identificar a assíptota horizontal.

Equação das assíptotas

Observemos o gráfico da seguinte função f .



Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Diz-se que a recta $x = -2$ é assíptota vertical bilateral do gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Diz-se que a recta $x = 2$ é assíptota vertical bilateral do gráfico da função

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Diz-se que a recta $y = 0$ é assíptota não vertical ou horizontal do gráfico da função.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, a assíptota $y = 0$ é unilateral.

Note que:

Uma assíptota não vertical pode ser intersectada pelo gráfico da função.

1. Assíptotas verticais

Para se determinar as equações das assíptotas verticais do gráfico de uma função f é necessário determinar:

Primeiro

Domínio da função.

Segundo



Os pontos de abcissa a tais que:

$a \in D_f$ e f é descontínua em a ou $a \notin D_f$ mas é ponto de acumulação do domínio de f .

Terceiro

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Se algum destes limites for $+\infty$ ou $-\infty$, a recta $x = a$ é uma assíptota vertical. Se ambos os limites forem infinitos, a assíptota é bilateral.

1. Assíptotas não verticais

A existência de assíptotas não verticais depende do comportamento da função quando x tende para $+\infty$

Ou quando x tende para $-\infty$.

Vamos mostrar com exemplos concretos quando chegar o momento da realização de actividades.

Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Na determinação das equações das assíptotas verticais do gráfico de uma função f observe o seguinte:

- Domínio da função,
- Os pontos de abscissa a tais que: $a \in D_f$ e f é descontínua em a ou $a \notin D_f$ mas é ponto de acumulação do domínio de f .
- Os limites laterais de f quando x tende para a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

- Se os limites laterais forem iguais temos uma assíptota vertical bilateral.



Actividades



Actividades

1. Procure as assíntotas verticais dos gráficos de cada uma das seguintes funções:

$$1) f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Resolução

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Como f é contínua em todos os pontos do seu domínio, a única possibilidade de existência de uma assíntota vertical é a recta $x = -1$, uma vez que $-1 \notin D_f$ mas é ponto de acumulação de D_f .

Calculemos $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-3}{x+1} = +\infty$$

Logo, a recta $x = -1$ é assíntota vertical bilateral.

- 2) Procure assíntotas não verticais de $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

Resolução

Seja a recta $y = mx + b$ uma assíntota não vertical, então

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Seja x tendente para $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-3}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x(x+1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$$

Logo: a recta $y = 1$ é uma assíptota horizontal bilateral pois, mesmo que calculássemos o limites quando x tende para $-\infty$ obteríamos os mesmos valores.

Agora tente resolver sozinho o exercício seguinte para que possa avaliar o seu nível de compreensão da matéria.



Avaliação



Avaliação

1. Procure as assíntotas verticais dos gráficos de cada uma das seguintes funções:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2. Determine, se existirem, as assíntotas do gráfico da função f e interprete o resultado graficamente.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{1 - x}$$

Lição 17

Aplicação da derivada no estudo do sinal da função

Erro! Marcador não definido.

Introdução

Os conceitos de funções e gráficos que estudou no primeiro ciclo será um requisito para presente lição.

- *fazer* o estudo completo da função aplicando as derivadas de 1ª e 2ª ordens.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Fazer* o estudo da função aplicando as derivadas de 1ª e 2ª ordens.

Aplicação da derivada no estudo da função

Caro estudante, para fazer o estudo completo de uma função, você deve respeitar os procedimentos que se seguem para facilitar a sua tarefa.

- Domínio
- Determinação dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados
- Assíntota horizontal e assíntota vertical
- Extremos e Variação da função
- Pontos de inflexão



- Convexidade
- Paridade
- Esboço ou construção do gráfico

Tomemos diferentes exemplos para mostrar estes procedimentos:

1. Desenhar o gráfico da função real definida por

$$y = x^2 - 2x + 3$$

Do estudo feito anteriormente sobre a função quadrática, sabemos já que o gráfico é uma parábola. Vejamos como esboçar rapidamente a parábola.

- Domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $D'_f = [2; +\infty[$

Calculando a derivada de y Tem-se:

$$y' = 2x - 2$$

A derivada anula-se para $x = 1$, sendo negativa para $x < 1$ e positiva para $x > 1$. Podemos formar o seguinte quadro.

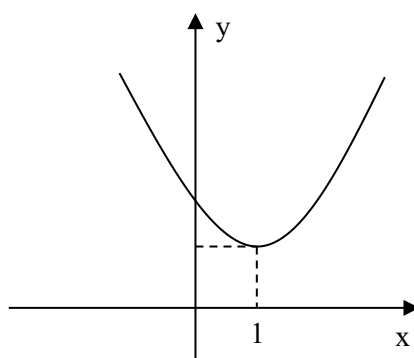
Quadro

$-\infty$		1	$+\infty$
y'	+	0	+
Y		Mín	

em que usamos o sinal $\nearrow$ para indicar que a função é crescente e o sinal $\searrow$ para indicar que é decrescente.

Como se vê, a função é decrescente até ao ponto $x=1$ e é crescente a partir deste ponto. O valor 2, que a função toma para $x=1$, é não só um mínimo relativo, como até o mínimo absoluto, isto é, o menor dos seus valores em todo domínio.

Podemos agora esboçar se o gráfico:



O domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $D_f' = [2; +\infty[$

Vamos em conjunto realizar as seguintes actividades de fixação



Resumo



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Para fazer o estudo completo de uma função, você deve respeitar os procedimentos que se seguem para facilitar a sua tarefa.

- Domínio
- Determinação dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados
- Assíntota horizontal e assíntota vertical
- Extremos e Variação da função
- Pontos de inflexão
- Convexidade
- Paridade
- Esboço ou construção do gráfico

Actividades



Actividades

1. Faça o estudo analítico da função: $f(x) = y = x^4 - 2x^2 + 4$

- $D = \mathbb{R}$ pois, se trata de uma função polinomial.
- A função é polinomial, logo é contínua em $\mathbb{R}$.
- Pontos de intersecção com o eixo dos y

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x^4 - 2x^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad p \rightarrow (0, 4)$$

- Pontos de intersecção com o eixo dos x

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x^4 - 2x^2 + 4 \end{cases} \quad x^4 - 2x^2 + 4 = 0, \quad x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t + 4 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1 - 4} \quad (\text{impossível})$$

A equação não tem zeros:

$$\bullet \quad f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 4 = x^4 - 2x^2 + 4 = f(x).$$

Como $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, a função é par

$$\bullet \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$



Tabela

x	$-\infty$	-1		0		+1	$+\infty$
4x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
y'	-	0	+	0	-	0	+
y		Min		Máx		Min	

• A função é decrescente em $]-\infty; -1] e [0; 1]$.

• A função é crescente em $[-1; 0] e [1; +\infty[$

• $F(-1)=3$ é mínimo relativo

• $F(0)=0$ é máximo relativo

• $y'' = 12x^2 - 4$, $y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela

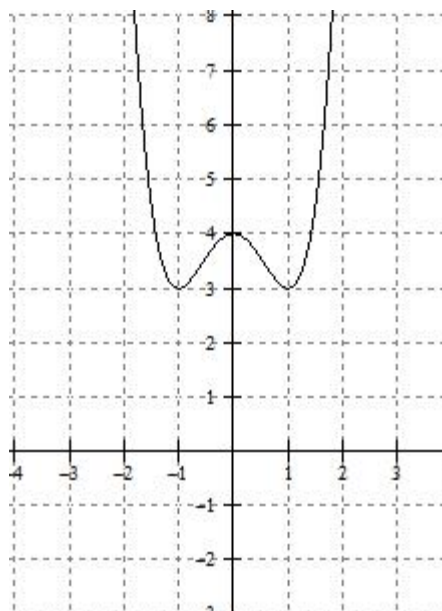
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
y''	+	0	-	0	+
y	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{31}{9}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ são os pontos de inflexão. A concavidade é

voltada para cima em $]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}[$ e $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ e a concavidade está

voltada para baixo em $\left] -\frac{\sqrt{3}}{3}; +\frac{\sqrt{3}}{3} \right[$.

- O gráfico da função não tem assíntotas, pois é polinomial.
- Contradomínio $D'_f = [3; +\infty[$.
- Gráfico



Viu como foi fácil! Mas, é necessário prestar muita atenção durante os cálculos porque um erro num dos passos pode complicar os passos subsequentes.

2. Esboçar o gráfico da função homográfica (1)

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$:

- como $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = -\infty$ pode se concluir-se



que a recta $x = -3$ é uma assíntota vertical.

$$\bullet y' = \frac{1 \cdot (x+3)' - 1' \cdot (x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

tem-se o quadro:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+	n	+
y		n	

(1) Toda a função definida por $y = \frac{a+bx}{a'+b'x}$ com a, b, a', b' constantes tais

que $ab' - a'b \neq 0$ chama-se função homográfica. o gráfico de uma função homográfica é uma hipérbole equilátera de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

(2) por n entenda-se não definida

Não há máximos nem mínimos relativos ; a função é crescente no

Intervalo $]-\infty, -3[$ e no intervalo $]-3, +\infty[$.

• Determinação da assíntota horizontal

A expressão $\frac{x-2}{x+3}$ pode tomar a forma equivalente $1 + \frac{-5}{x+3}$

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} + \frac{-5}{x+3}$$

$$\text{ora } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-5}{x+3} \right) = 1^{(1)} \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{-5}{x+3} \right) = 1^{(1)}$$

A recta $y = 1$ é a assíntota horizontal.

A expressão $\frac{-5}{x+3}$ tende para 0 por valores negativos quando $x \rightarrow +\infty$ e tende para 0 por valores positivos quando $x \rightarrow -\infty$.

relativamente a assíntota horizontal e a assíntota vertical pode fazer-se esboço seguinte:

- Zeros da função $x = 2$

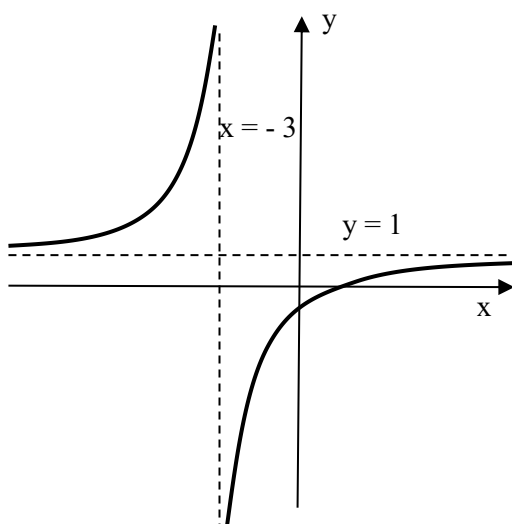
(1) Pode concluir-se imediatamente que o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ é 1 quando

$x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

(2) basta entender ao 2.º membro da expressão

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x+3} \quad (x \neq -3).$$

De tudo que foi estudado anteriormente pode concluir-se que o gráfico da função é o seguinte:





Da leitura do gráfico pode concluir-se que o contradomínio da função

$$\text{é }]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\quad [2, +\infty[.$$

Agora, você pode resolver os exercícios que se seguem sem sobressaltos para a sua auto-avaliação.

Avaliação



Avaliação

1. Desenhar a imagem geométrica da função real de variável real de variável definida pela expressão: $y = x^3 - 27x - 10$
2. Desenhar a imagem geométrica da função real de variável definida pela expressão $y = x^4 - 6x^2 + 5$ sabendo que -1 e +1 são zeros do polinómio $x^4 - 6x^2 + 5$

Agora, confira as suas respostas no final do módulo.



Soluções Módulo 8

Soluções do Modulo 8

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

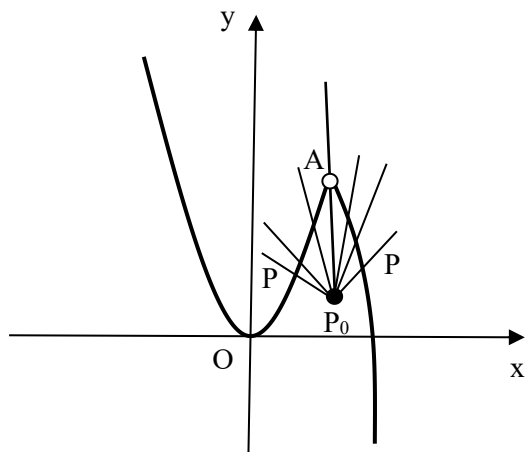
Lição 1

1. **V**
2. **V**
3. **F** uma função tem derivada num ponto se nele a razão incremental tiver limite finito ou infinito com sinal determinado. Portanto é condição necessária a existência de limite nesse ponto.o que não é referido nesta afirmação.
4. **V**
5. **V**
6. **F** trata-se de limite num ponto por isso a derivada da função é também num ponto.

Lição 2

R: Não tem, derivada.

Interpretação geométrica



Com base na interpretação geométrica da derivada, vê-se que a posição

limite das secantes, tanto à esquerda como à direita, e a semi-recta P_0A

paralela ao eixo OY, Os conhecimentos da geometria analítica já deixavam

prever que o declive infinito corresponderia a paralelas ao eixo OY ,

Os sinais $-$ (menos) e $+$ (mais) esquerda e direita respectivamente

, resultam, das inclinações das semi-secantes relativamente ao eixo OX.

Neste

caso, as duas semi-rectas coincidem, não resultando da sua reunião uma recta .



Lição 3

1. Verificar esta resolução, primeiro passo

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= (x + \Delta x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 \\ &= 3x\Delta x(x + \Delta x + \Delta x^2) \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{3x\Delta x(x + \Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x(x + \Delta x + \Delta x^2)\end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x(x + \Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

$$2. a) f(x) = 4x^2 - 7$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= 4[(x + \Delta x)^2 - 7] - (4x^2 - 7) \\ &= 4[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 7] + 4x^2 + 7 \\ &= 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 7 - 4x^2 + 7 \\ &= 4\Delta x(2x + \Delta x) \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{4\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 4(2x + \Delta x)\end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4(2x + \Delta x) = 4 \cdot 2x = 8x$$

$$\text{b) } f(x) = 7x + 2$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= [7 \cdot (x + \Delta x) + 2] - (7x + 2) \\ &= 7x + 7\Delta x + 2 - 7x - 2\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7 = 7$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= [3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)] - (3x^2 - 2x) \\ &= [3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 2x - 2\Delta x] - (3x^2 - 2x) \\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x - 3x^2 - 2\Delta x + 2x \\ &= 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3\Delta x - 2 = 6x - 2$$



$$d) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{(x + \Delta x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \\ &= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x(x + \Delta x)}{-\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}$$

Lição 4

$$1) f(x) = x^{13}$$

$$f'(x) = 13x^{12}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^4} \right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$3) h(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$h'(x) = (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x})' = (\sqrt[6]{x})' = x^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

$$4) h(p) = \frac{1}{p^4 \cdot p^3}$$

$$h'(p) = \left(\frac{1}{p^4 \cdot p^3} \right)' = \left(\frac{1}{p^7} \right)' = (p^{-7})' = -7p^{-8} = -\frac{7}{p^8}$$

Lição 5

$$\begin{aligned} a) \left(\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 1 \right)' &= \left(\frac{1}{2}x^3 \right)' + (3x^2)' + (1)' = \frac{3}{2}x^2 + 6x + 0 = \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 6x \end{aligned}$$

$$b) (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\begin{aligned} c) \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x} \right)' &= \left(\frac{1}{x} (x^2 - 7x + 4) \right)' \\ &= (x)' - (7)' + \left(\frac{4}{x} \right)' = 1 - 0 + (4x^{-1})' = \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Lição 6

$$\begin{aligned} 1) y' &= (x-3)'(2x+5) + (x-3)(2x+5)' = 1 \cdot (2x+5) + (x-3) \cdot 2 = \\ &= 2x+5+2x-6 = 4x-1 \end{aligned}$$



$$2) y' = \frac{1\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x-1)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

Lição 7

$$1) \left[(5 - x^2)^4 \right]' = 4(5 - x^2)^3 (5 - x^2)' = 4(5 - x^2)^3 \cdot 2x = -8x(5 - x^2)^3$$

$$2) \left[(\sqrt{4 + 3x - x^2})^3 \right]' = 3(\sqrt{4 + 3x - x^2})^2 (4 + 3x - x^2)' = 3(-2x+3)(\sqrt{4 + 3x - x^2})^2 = (-6x+9)(4 + 3x - x^2) = -24x-18x^2+6x^3+36+27x-9x^2 = 6x^3-27x^2+3x+36$$

$$3) \left[\frac{1}{3(x-1)} \right]' = \frac{1' \cdot [3(x-1)] - [3(x-1)] \cdot 1'}{[3(x-1)]^2} = \frac{0 - [3'(x-1) + 3(x-1)']}{[3(x-1)]^2} = \frac{0 - (0+3 \cdot 1)}{[3(x-1)]^2} = \frac{-3}{9(x-1)^2} = \frac{1}{3(x-1)^2}$$

Lição 8

$$\begin{aligned} 1) \quad 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right) &= 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)\right]' + 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)\right] = 0 + 4\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)' = \\ &= \frac{4}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) \end{aligned}$$

$$2) \quad (7\cos^2 x)' = -7 \cdot 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x = -14\operatorname{sen}x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} 3) \quad [-3\cos(4\sqrt{x})]' &= 3\operatorname{sen}(4\sqrt{x})(4\sqrt{x})' = 3\operatorname{sen}(4\sqrt{x})\frac{4}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{6\operatorname{sen}(4\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$4) \quad [3\operatorname{sen}(3x+5)]' = 3\cos(3x+5)(3x+5)' = 9\cos(3x+5)$$

$$5) \quad (\operatorname{sen}x + \cos x)' = (\operatorname{sen}x)' + (\cos x)' = \cos x - \operatorname{sen}x$$

Lição 9

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= 10^x \\ y' &= 10^x \ln 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &= \log_{\frac{1}{2}} x \\ y' &= \frac{1}{x \ln \frac{1}{2}} \end{aligned}$$



$$3) y = 2^{-3x}$$

$$y' = 2^{-3x} \ln 2 (-3x)' = -3 \cdot 2^{-3x} \cdot \ln 2$$

$$4) y = x \ln^2 x$$

$$y' = x' \ln^2 x + 2 \ln x = \ln^2 x + 2 \ln x$$

Lição 10

$$1) y = (2x - 3)^2$$

achar a inversa de $y \quad (2x - 3) = \sqrt{y}$

$$2x = \sqrt{y} + 3$$

$$x = \frac{\sqrt{y} + 3}{2}$$

2) Calcular as derivadas

$$y' = 2(2x - 3)(2x - 3)' = 2(2x - 3) \cdot 2 = 4(2x - 3) = 8x - 12$$

$$x' = (\sqrt{y} + 3)' \cdot 2 = 2'(\sqrt{y} + 3) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8\sqrt{y}}$$

Conclusão

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{1}{8\sqrt{y}}} = \frac{1}{8(2x - 3)} = \frac{1}{16x - 24}$$

$$2) y = \sqrt{4 + 3x}$$

Achar a função inversa de y

$$y = \sqrt{4 + 3x}$$

$$y^2 = 4 + 3x$$

$$4 + 3x = y^2$$

$$3x = y^2 - 4$$

$$x = \frac{y^2 - 4}{3} = \frac{y^2}{3} - \frac{4}{3}$$

Calcular as derivadas

$$y' = (\sqrt{4 + 3x})' = \left[(4 + 3x)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{(4 + 3x)'}{2\sqrt{4 + 3x}} = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3x}}$$

$$x' = \left(\frac{y^2}{3} \right)' - \left(\frac{4}{3} \right)' = \frac{2}{3}y$$

Conclusão

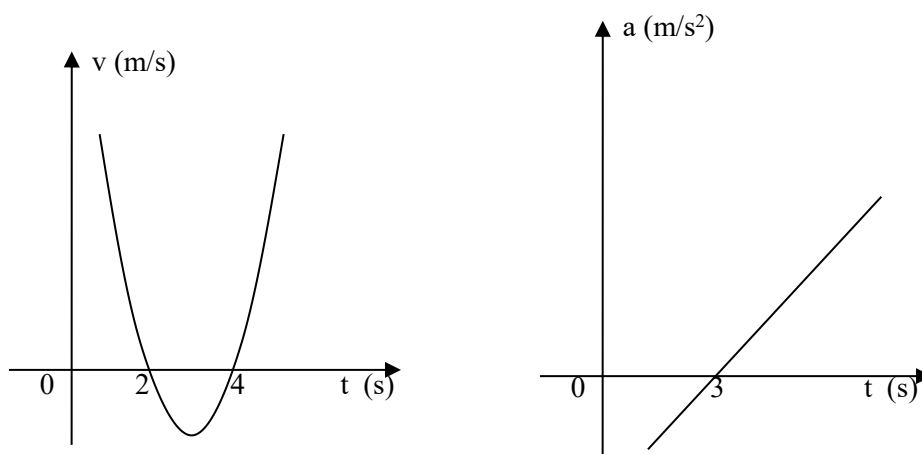
$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{2}{3}y} = \frac{3}{2y} = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3x}}$$

Lição 11

1. I. S é crescente quando $v = \frac{ds}{dt} > 0$

$$v = 3t^2 - 9.2t + 24 = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8)$$

$$= 3(t - 2)(t - 2)$$



Então:

I) S e crescente para $t > 2$ ou $t > 4$ segundos

S e decrescente para $2 < t < 4$ segundos

II) V e crescente para $t > 3$ segundos

V e decrescente para $t < 3$ segundos

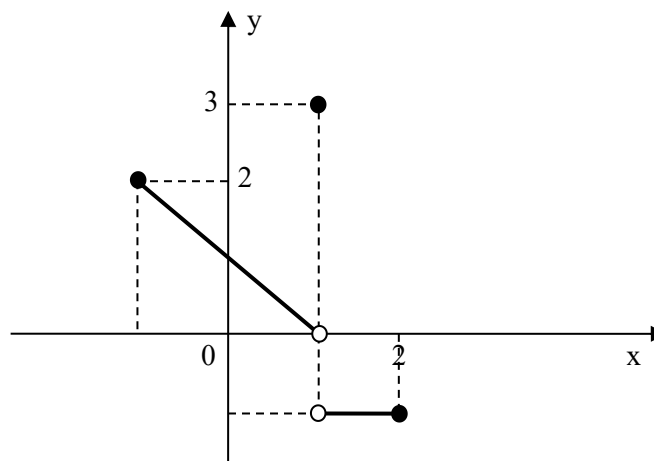
Portanto, o movimento é acelerado quando v e a tem o mesmo sinal, isto é, quando $2 < t < 3$ s ou $t > 4$ s.

O movimento é retardado quando os sinais são opostos, isto é, quando $0 < t < 2$ s ou $3 < t < 4$ s.

2. A taxa de variação $= \frac{dy}{dx} = 200 - 2x$

vejamos que: $\frac{dy}{dx} > 0$ para $x < 100$ kg, quer dizer, a produção esta a crescer quando $x < 100$ kg. Depois de por 100 kg, aumentar a quantidade de adubo conduz a uma redução na produção.

Lição 12



$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-3}{x-1} = -\infty$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-2}{x-1} = +\infty$$

$$f' \text{ não existe em } 1, \quad f(-1)=2 \quad f'(2)=-1 \quad f(1)=3$$

As derivadas laterais não coincidem, logo:

$F(1)=3$ é máximo absoluto e $f(2)$ é o mínimo absoluto



Lição 13

$$g(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$$

$$g'(x) = e^x + \frac{-e^x}{(e^x)^2} = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

A derivada de g existe em $\mathbb{R}$ e anula-se para $x = 0$

Tabela

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	2	$\nearrow$

- ✓ A função é crescente em $[0, +\infty[$
- ✓ A função é decrescente em $] -\infty, 0]$
- ✓ $g(0) = 2$ é um mínimo relativo.

Lição 14

$$g(x) = \frac{2}{x-1} \quad ; \quad g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad g''(x) = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$g''(x)$$

$$g''(x) \text{ não tem zeros.}$$

Tabela de sinais

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	-	s.s	+
g	$\cap$		$\cup$

O gráfico da função tem a concavidade:

- voltada para baixo em $]-\infty; 1[$

- voltada para cima em $]1; +\infty[$

Não existem pontos de inflexão para o gráfico de g.

Lição 15

O volume V do sólido é dado por

$$V = \pi x^2 h + \frac{4}{3} \pi x^2$$

Sendo $4\pi a^2$ a superfície total tem-se

$$2\pi x h + 4\pi x^2 = 4\pi a^2$$

ou seja;

$$h = \frac{2(a^2 - x^2)}{x} \quad \text{devera ser } 0 < x \leq a, \text{ porque?}$$



Substituindo em (1) o valor de h dado por (2), obtém-se a expressão de V em função de x

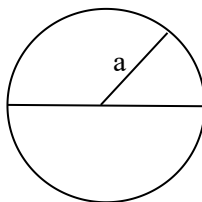
$$V = \frac{2}{3} \pi x (3a^2 - x^2)$$

Derivando, teremos:

$$V' = 2\pi(a^2 - x^2)$$

A derivada anula-se para $x = a$. A este valor de x corresponde o volume máximo. Justifique

Como se vê, o volume máximo corresponde a um caso extremo: uma esfera de raio a .



Lição 16

1. $D_g = R$

A função g não é contínua em $x = 0$. Vamos ver se a recta $x = 0$ é assíntota vertical

Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Logo, a recta $x = 0$ é assíntota vertical unilateral.

2. Resolução

Assíntotas verticais

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{1 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{1 - x} = -\infty$$

Assíntotas não verticais

$$y = mx + b \quad ; \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

para $x \rightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{1 - x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2x}{1 - x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + x - x^2}{1 - x} = 1$$

Se $x \rightarrow -\infty$, obteríamos os mesmos valores

Logo, a recta $y = -x + 1$ é assíntota não vertical bilateral ou seja assíntota horizontal bilateral.



Lição 17

Exercício 1

Calculando a primeira derivada

Tem-se:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$$

- O quadro a formar ,relativo a esta função ,será:

Tabela

x	$-\infty$	-3		+3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y		44		-64	
		Máx		Mín	

- No ponto -3 a função tem um máximo relativo igual a 44; no ponto 3

a função tem um mínimo relativo - 64

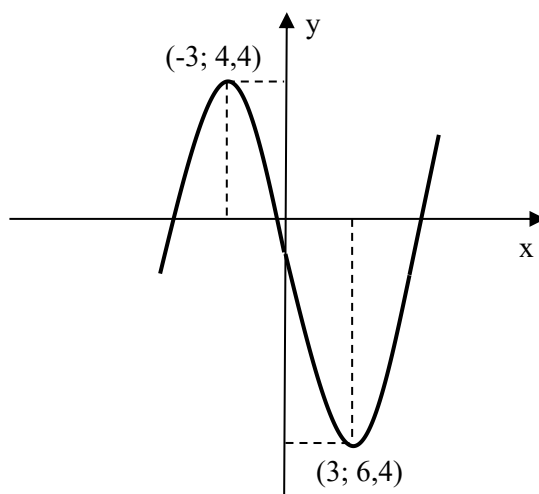
- A segunda derivada permite-nos estudar o sentido da concavidade .

$$y'' = 6x$$

- A função tem um pouco de inflexão para $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	-	0	+
y'	$\cap$	-10	$\cup$

Pode agora esboçar se o gráfico:



Exercício 2

Resolução:

- $Df = \mathbb{R}$
- Zeros da função :

A regra de Ruffini permite-nos determinar os zeros da

Função



Método de Ruffini

	1	0	-6	0	5	
	1		1	1	-5	-5
	1	1	-5	-5	0	
	-1		-1	0	+5	
Resol	1	0	-5	0		0

Fazendo $t = x^2$.

Para além dos zeros fornecidos podemos ter:

$$x^2 - 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \quad x = \pm\sqrt{5}$$

Assim : $+1$, -1 , $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ zeros da função.

- O estudo do sinal da função pode então fazer se, atendendo a que

$$y = (x+1)(x-1) (x - \sqrt{5}) (x + \sqrt{5})$$

Com estes elementos podemos começar a desenhar a imagem geométrica,fixando as zonas do plano onde ela se poderá situar e os pontos em que cruza o eixo x (zeros).

- Calculando a primeira derivada

$$y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$

- O estudo do sinal da primeira derivada permite-nos conhecer os intervalos de monotonia da função.

$$y = (x+1)(x-1) (x - \sqrt{5}) (x + \sqrt{5})$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		-1		+1		$+\sqrt{5}$	$+\infty$
x+1	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-\sqrt{5}$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+\sqrt{5}$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
p	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Com estes elementos podemos começar a desenhar a imagem geométrica, fixando as zonas do plano onde ela se poderá situar e os pontos em que cruza o eixo x (zeros).

- Calculando a primeira derivada

$$y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$

- O estudo do sinal da primeira derivada permite-nos conhecer os intervalos de monotonia da função.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$	$+\infty$
4x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
y'	-	0	+	0	-	0	+
y		-4				-4	



Conclusão: a função admite máximos e mínimos relativos para

$x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ e máximo para $x = 0$.

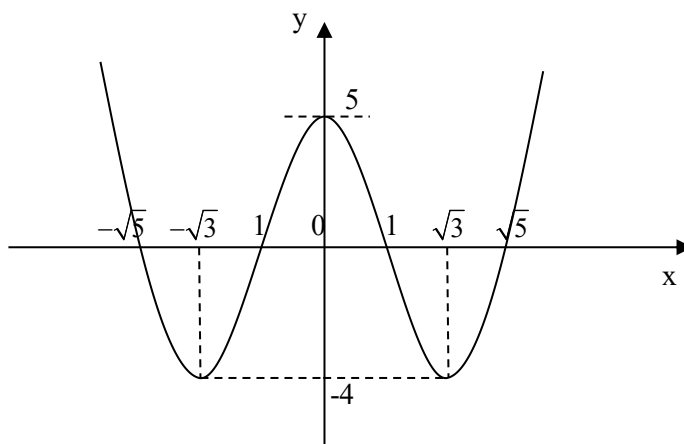
- Por último calculamos a segunda derivada da função para vermos o sentido da concavidade.

$$y'' = 12x^2 - 12(x^2 - 1)$$

x	$-\infty$	-1		+1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
y''	+	0	-	0	+
y	∪	0	∩	0	∪

O gráfico tem dois pontos de inflexão para $x = -1$ e $x = +1$

O contradomínio da função é : $[-4; +\infty[$



Módulo 8 de Matemática

Teste Preparação de Final de Módulo

Erro! Marcador não definido.

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1. Derivada

- a) Toda a função que admite derivada num ponto é contínua nesse ponto
- b) Toda a função que admite derivada num ponto é contínua nesse ponto e vice-versa
- c) Todas as funções contínuas num ponto são deriváveis nesse ponto
- d) Existem funções contínuas num ponto que não são deriváveis nesse ponto
- e) A derivada de uma potência de expoente negativo é um caso particular da derivada de um quociente
- f) Geometricamente a derivada à esquerda dum ponto a representa o declive da semi-tangente à esquerda
- g) Geometricamente a derivada à esquerda dum ponto a representa o declive da semi-tangente à direita
- h) Quando as derivadas laterais de um ponto a , função corespondente tem derivada nesse ponto a e o valor da desta é igual ao dessas derivadas laterais
- i) A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita



j) uma função é derivável num ponto a quando tem derivada nesse ponto

2 MÀXIMOS E MÍNIMOS

a) A condição para que uma função tenha um máximo ou mínimo relativos num ponto a é que neste ponto a derivada seja nula

b).A condição para que a função tenha um máximo relativo é que a derivada nesse ponto seja igual a infinito

c) O mínimo relativo se determina calculando a derivada da função nesse ponto.

3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

a) AS concavidades de uma função se determinam a partir da segunda derivada

b) Quando num intervalo a segunda derivada é maior que zero, o gráfico de f tem concavidade para cima nesse intervalo

c) Quando num intervalo a segunda derivada é nula o gráfico da função tem concavidade para baixo

d) Pontos de inflexão são pontos onde a segunda derivada é nula

e) A derivada de uma função é nula nos pontos de inflexão

f) A concavidade de do gráfico de uma função, muda de sentido nos pontos de inflexão.

4. Calcule aplicando a definição de derivada: $f(x) = 3x^2 + 1$ no ponto $x = 2$

5. Considere $g(x)$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x} & ; x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $g'(4)$.

b) Defina analiticamente a recta tangente ao gráfico da função no ponto da abcissa igual a 4.

6. Considere as funções $f(x) = x^3 - 3x^2$ e $g(x) = x^3 + 1$. Determine o domínio de cada uma das funções seguintes:

- a) Verifique que as duas funções têm derivada nula para $x = 0$
- b) Mostre que para $x = 0$, f tem um máximo relativo, o que é que se pode dizer em relação ao $g(x)$ terá ou não o máximo relativo em $x = 0$?
- c) Calcule os pontos de inflexão de f e g
- d) Esboce o gráfico de cada uma das funções

7. Calcule a derivada de:

a) $y = 4x^3 - 3x^2$

b) $y = (x - 1)^4$

c) $y = \frac{2}{x}$

d) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

e) $y = \sqrt[3]{6x + 1}$

8. No ponto $(1, 2)$ a derivada da função $y = ax + b$, a, b pertence a $\mathbb{R}$ é igual a -4. Calcule a e b .

9. Considere a função real de variável real $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

a) Defina a função derivada de g



b) Calcule $g'(3)$ e $g'(-2)$

c) Determine os zeros de $g'(x)$

Soluções do teste de preparação do Módulo 8

CONFIRA AS RESPOSTAS

1. DERIVADA

a) V

b) F

c) F

d) V

e) V

f) V

g) F

h) V

i) V

j) V

2 . MÁXIMOS E MÍNIMOS

a) V

b).F

c) V

3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO



a) V

b) V

c) F

d) V

e) F

f) V

4. $f(x) = 3x^2 + 1$; no ponto $x = 2$

$f(x) = 3x^2 + 1$ no ponto $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{como } f(2) = 13 \text{ temos}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1 - 13}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3(x + 2) = 12$$

$$5. \text{ Dada } g(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x} & ; x > 1 \end{cases}$$

a) Para valores x maiores que 1 a função está definida por:

$$g'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$$

.

b) O declive da tangente é $\frac{1}{4}$ (valor da derivada no ponto $x = 4$). As

coordenadas do ponto de tangência são $(8, 2)$ pois

$$g(4) = \sqrt{4} = 2$$

A equação da tangente pode ser $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 4)$

6. a)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad g'(x) = 3x^2$$

$$\text{Para } x=0 \quad f'(0)=0 \quad \text{e } g'(x)=0$$

$$\text{b) como } f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	$\nearrow +$	0	$\searrow -$	0	$\nearrow +$

$f(0)=0$ é um máximo relativo de f

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ e como para } x \neq 0,$$

$$g'(x) > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$\nearrow +$	0	$\nearrow +$

A função g não tem extremos relativos, pois é crescente em todo o domínio.

$$\text{c) } f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

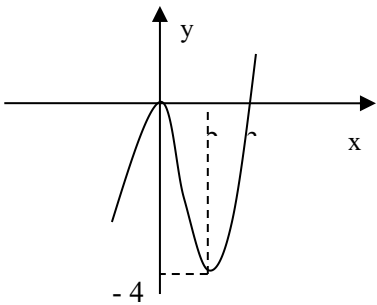
$$g''(x) = 6x = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

d) Esboce o gráfico de cada uma das funções



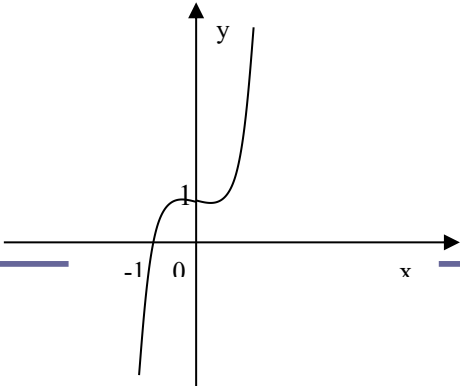
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\cap$	-2	$\cup$

x	0	1	2	3
f(x)	0	-2	-4	0



x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	$\cap$	1	$\cup$

x	-1	0
g(x)	0	1



7. Cálculo da derivada de:

$$\text{a) } y = 4x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = (4x^3)' - (3x^2)' = 12x^2 - 6x$$

$$\text{b) } y = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \left(\frac{2}{x} \right)' = \frac{0 - 2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\text{c) } y = (x-1)^4 \Rightarrow y' = \left[(x-1)^4 \right]' = 4(x-1)^3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y = \frac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow y' &= \left(\frac{x^2}{x^2-4} \right)' = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } y = \sqrt[3]{6x+1}$$

$$y = \sqrt[3]{6x+1} \Rightarrow y' = \left(\sqrt[3]{6x+1} \right)' = \frac{1(6x+1)'}{3\sqrt[3]{(6x+1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+1)^2}}$$

8. No ponto $(1, 2)$ para $y = ax + b$

$$y' = 4 \Rightarrow a = -4$$

$$2 = -4 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 2 + 4 = 6$$



9. Considere a função real de variável real $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

$$a) g'(x) = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$b) g'(3) = \frac{3 - 3 \cdot 3^2}{(3^2 + 1)^2} = \frac{3 - 27}{100} = -\frac{24}{100} = -\frac{6}{25} \text{ e}$$

$$g'(-2) = \frac{3 - 3 \cdot (-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{3 - 12}{25} = -\frac{9}{25}$$

$$c) g'(x) = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$