MÓDULO 6

FÍSICA

OSCILAÇÕES E ONDAS MECÂNICAS

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
INSTITUTO DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - INDE

Conteúdos

Acerca deste Módulo

FÍSICA

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 7ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 8ª, 9ª e 10ª classes, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 8ª, 9ª e 10ª classes. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 10ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as resposta no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da unidade.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem

Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que “ ***o livro é o melhor amigo do homem***”. Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Oscilações e Onda Mecânicas

Introdução

As oscilações mecânicas são mais um exemplo de movimentos da natureza que ocorrem no nosso dia a dia. Por exemplo, quando as folhas de uma árvore são sopradas pelo vento elas oscilam assim como os seu ramos ou quando as senhoras caminham com uma lata de água na cabeça, a água no seu interior também oscila.

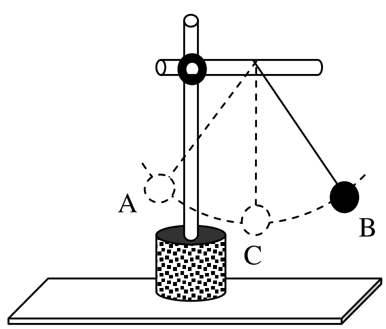
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Identificar* as características de uma oscilação mecânica.
- *Identificar* as grandezas físicas que caracterizam uma oscilação mecânica.
- *Determinar* as grandezas físicas que caracterizam uma oscilação mecânica.

Elongação, Amplitude

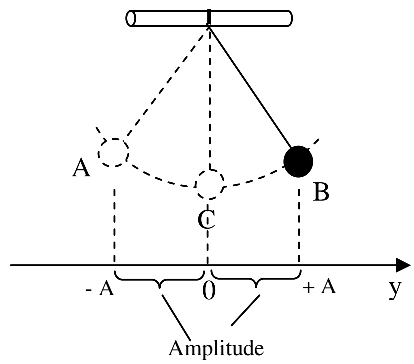
A figura representa um corpo a oscilar entre os pontos "A" e "B" passando pelo ponto "C". O sistema assim constituído chama-se pêndulo mecânico.



Da sua experiência do dia a dia sabe que o corpo oscilante ao fim de algum tempo para na posição “C”. A posição “C” é o chamada ***posição de equilíbrio***.

Sempre que um corpo realiza um movimento em torno ou a volta da sua posição de equilíbrio diz-se que ele está a realizar um movimento oscilatório ou simplesmente, ***oscilação mecânica***.

Como vê, em relação a posição de equilíbrio, o corpo desloca-se para a direita e para a esquerda deste. Assim, podemos projectar o deslocamento do corpo oscilante sobre um eixo horizontal, como mostra a figura.



Qualquer posição ocupada pelo corpo ao longo do eixo horizontal “y”, dá-se o nome de ***elongação***. A elongação para a direita da posição de equilíbrio é considerada positiva e para o lado esquerdo da posição de equilíbrio é negativa. No entanto, tanto para a direita assim como para a esquerda o corpo tem um deslocamento máximo. O valor do deslocamento máximo tanto para a direita ou para a esquerda é igual e corresponde a uma elongação máxima e é chamada ***amplitude***.

Período e Frequêcia

Voltando ao pêndulo mecânico, sabemos que se deslocarmos o corpo oscilante da sua posição de equilíbrio, ao fim de algum tempo ele volta a sua posição inicial. Assim, considera-se que um corpo realizou uma ***oscilação completa*** quando ele volta a posição inicial da qual ele partiu. tempo que o corpo. Ao tempo que o corpo leva a realizar uma oscilação completa dá-se o nome de ***período***. No entanto o período “T”das oscilações corpo podem ser determinadas através da divisão do tempo “t” gasto pelo corpo a realizar “n” oscilações completas. Assim a fórmula para o seu cálculo é:

$$\boxed{T = \frac{t}{n}}$$

Onde “T” é o período, t é o tempo necessário para realizar “n” oscilações completas.

A unidade do período no SI é o segundo “s”.

A frequência é a grandeza física que mede o número de oscilações que um corpo realiza na unidade de tempo. Por isso a expressão para o seu cálculo é:

$$\boxed{f = \frac{n}{t}}$$

Como pode ver a equação do período e da frequência são inversas. Isto acontece porque a frequência e o período são grandezas inversamente proporcionais, isto é, quando o período aumenta a frequência diminui e quando o período diminui a frequência aumenta. Por isso, podemos escrever que:

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

A unidade da frequência no SI é o Hertz “Hz”, em honra ao cientista Germânico Heinrich Hertz.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

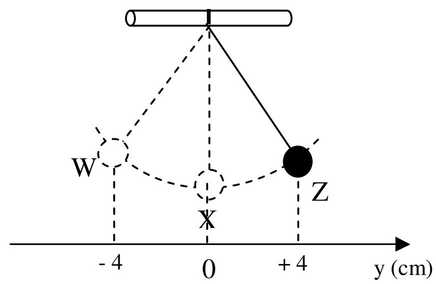
- Posição de equilíbrio – é o ponto no qual o corpo oscilante pára após oscilar.
- Oscilação mecânica é o movimento de um corpo em torno da sua posição de equilíbrio.
- Elongação - é qualquer posição ocupada pelo corpo durante as suas oscilações.
- Amplitude – é a elongação máxima do corpo durante as suas oscilações.
- Período – é o tempo gasto pelo corpo a realizar uma oscilação completa.
- Frequência '- é o número de oscilações que um corpo realiza na unidade de tempo.
- A unidade do período no SI é o segundo "s" e da frequência é o Hertz "Hz".

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adequirir.

Actividades

Actividades

1. A figura representa um pêndulo mecânico cujo corpo oscila entre os postos W e Z passando pelo ponto X. Sabe-se que o corpo realiza 40 oscilações em 10 segundos.



a) Determine a amplitude das oscilações.

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência das oscilações.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

a) A amplitude é de 4 cm (A = 4 cm), porque a sua elongação máxima é de 4 cm, tanto para a esquerda como para a direita.

b) Para calcularmos o período temos que tirar os dados a aplicara a fórmula ara o seu cálculo.

Dados	Fórmula	Resolução
n = 40 t = 10 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{40}{10}$ $T = 4\,s$

Resposta: O Período é de 4 s.

c) Para responder a esta alínea também temos que tirar os dados e aplicar a fórmula para o cálculo da frequência.

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 4$ s $f = ?$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{4}$ $f = 0{,}25$ Hz

Resposta: A frequência é de 0,25 Hz.

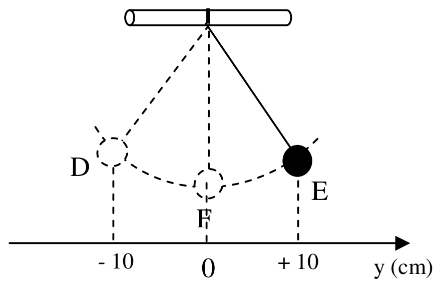
Nota: Nesta alínea também pode se aplicara fórmula $f = \frac{n}{t}$, que também está correcto.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos "D" e "E", passando pelo ponto "F". O corpo realiza 30 0scilações em 60 segundos.



a) Determine a amplitude do movimento.

b) Calcule o período do movimento.

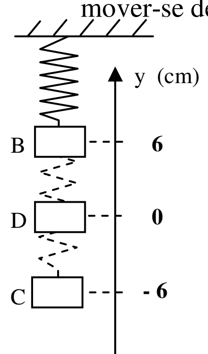
c) Calcule a frequência das oscilações.

2. Uma campainha eléctrica realiza 150 oscilações em 3 segundos.

a) Calcule a frequência das oscilações.

b) Calcule o período do movimento.

3. A figura representa um corpo suspenso numa mola oscilando entre os pontos "B" e "C". O ponto "D" representa a posição de equilíbrio do mesmo. Sabe-se que o corpo gasta 2 segundo de a mover-se de "B" para "C".



a) Determine a amplitude do movimento.

b) Determine o período do movimento.

c) Calcule a frequência das oscilações.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 2

Equação da Elongação em Função do Tempo

Introdução

Na lição anterior aprendemos que a elongação é a qualquer posição que o corpo oscilante pode ocupar ao longo de um eixo de projecção horizontal. Porém o eixo de projecção também pode ser vertical, como no caso de um corpo suspenso numa mola que oscila verticalmente.

Nesta lição vamos aprender como calcular a posição que o corpo oscilante pode ocupar ao longo do tempo.

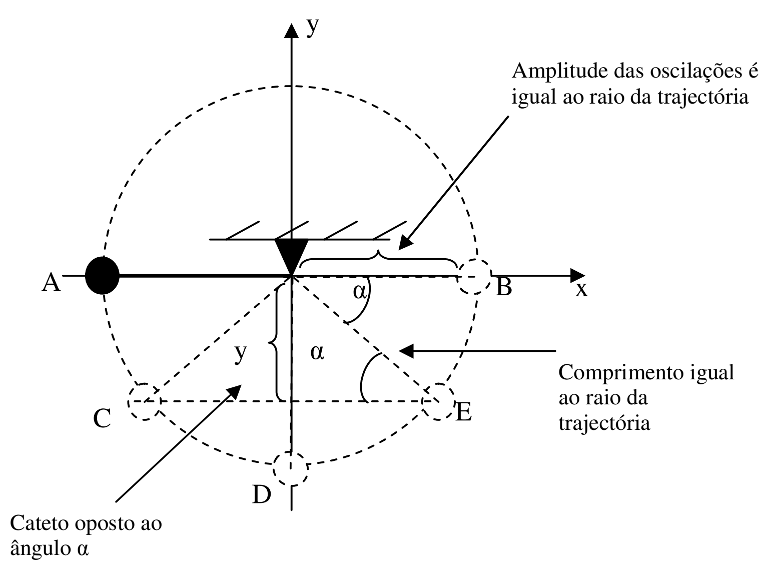
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Aplicar* a equação da elongação em função do tempo na resolução de exercícios concretos.

Equação da Elongação em Função do Tempo

A figura representa um corpo a oscilar entre os pontos “A” e “B” passando pelos ponto “C”, “D” e “E”.



Repare que na figura o ponto “D” é o ponto ou posição de equilíbrio do pêndulo e os pontos extremos das oscilações são os pontos “A” e “B”, por isso a amplitude das oscilações é igual ao raio da trajectória do pêndulo.

Quando o pêndulo está na posição “E” por exemplo, forma um ângulo “α” com o eixo “x” e por isso o lado “y” é o cateto oposto ao ângulo “α” e a hipotenusa é igual ao comprimento do raio.

Da Matemática já sabe que o seno de um ângulo é a razão ou o quociente entre a medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa:

$$\text{seno de um ângulo} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Então podemos escrever, para o ângulo “α”:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{r}$$

Porque a medida do cateto oposto é igual a “y” e a medida da hipotenusa é igual a “r”. Assim,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

Do movimento circular sabe que a velocidade angular é o ângulo descrito na unidade de tempo, por isso,

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Onde ”ω” é a velocidade angular, “α” é o ângulo descrito e “t” é a tempo gasto a descrever o ângulo dado. Não se esqueça porém que a unidade da velocidade angular no SI é o radiano por segundo “rad/s”. Assim,

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega \cdot t$$

Agora podemos então substituir o produto “ω.t” no lugar de “α” na equação: $y = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$, e ao mesmo tempo podemos substituir a letra “r” pela letra “A”, porque o raio é igual a amplitude das oscilações.

Substituir “r” por “A”

substituir o produto “ω.t”

$$y = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

Assim obtemos a equação:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Esta expressão representa a **equação da elongação em função do tempo** e que se representa por **"y(t)"**. Assim,

$$\boxed{y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)}$$

Onde "y" é a elongação, , "A" é a amplitude, "ω" é a velocidade angular e "t" é o tempo. No SI a elongação vem expressa em metros.

Da equação da velocidade angular $\omega = \frac{\alpha}{t}$, tendo em conta que para uma volta completa o ângulo "α" é igual a 2π rad (ou seja 360º) e que o tempo para uma volta completa é o período "T", então podemos escrever a fórmula:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Onde "ω" é a velocidade angular ou frequência cíclica ou ainda frequência angular

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$

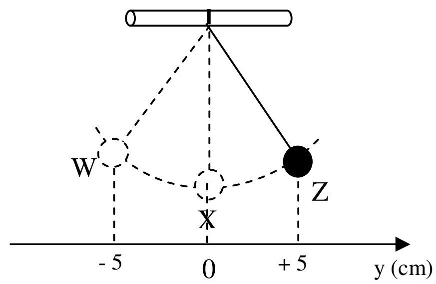
A velocidade angular ou frequência cíclica ou ainda frequência angular pode ser calculada pela expressão: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. A figura representa um pêndulo mecânico cujo corpo oscila entre os postos W e Z passando pelo ponto X. Sabe-se que o corpo realiza 120 oscilações em 30 segundos.



a) Determine a amplitude das oscilações.

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência das oscilações.

d) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

a) A = 5 cm

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 120 t = 30 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{30}{120}$ $T = 0{,}25s$

Resposta: O Período é de 0,25 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 0{,}25\ s$ $f = ?$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{0{,}25}$ $f = 4\ Hz$

Resposta: A frequência é de 4 Hz.

Nota: Nesta alínea também pode se aplicara fórmula $f = \frac{n}{t}$, que também está correcto.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 0{,}25\ s$ $\omega = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{0{,}25}$ $\omega = 8\pi\ rad/s$

Resposta: A frequência cíclica é de 8π rad/s.

e) Para escrever a equação da elongação em função do tempo temos que substituir na equação $y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$ o valor da amplitude "A" e da frequência cíclica "ω". Como,

A = 5 cm = 0,05 m

ω = 8π rad/s

podemos escrever: $y(t) = 0{,}05 \cdot sen(8\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela

expressão: $y(t) = 0{,}05 \cdot sen(8\pi \cdot t)$

2. A equação da elongação em função do tempo de um movimento oscilatório é dada pela expressão: $y(t) = 2 \cdot sen\left(\frac{5\pi}{2} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

a) Qual é a amplitude das oscilações?

b) Qual é a frequência cíclica das oscilações?

c) Calcule o período das oscilações.

d) Calcule a frequência das oscilações.

Passemos então a resolução da segunda actividade proposta.

Para resolver as alíneas a) e b) devemos comparar a equação da elongação $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$ e a equação da elongação dada $y(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} \cdot t\right)$. Assim,

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$y(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} \cdot t\right)$$

Assim podemos concluir que:

a) $A = 2$ m

b) $\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s $T = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\frac{5\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}$ $T = \frac{4\pi}{5\pi}$ $T = 0{,}8$ s

Resposta: O período é de 0,8 s.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 0{,}8$ s $f = ?$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{0{,}8}$ $f = 1{,}25\,\text{Hz}$

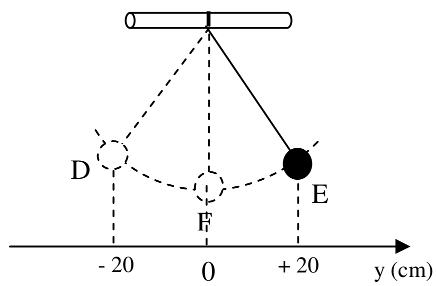
Resposta: A frequência é de 1,25 Hz.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos "D" e "E", passando pelo ponto "F". O corpo realiza 10 0scilações em 20 segundos.



a) Determine a amplitude do movimento.

b) Calcule o período do movimento.

c) Calcule a frequência das oscilações.

d) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo.

2. Um oscilador de mola realiza 16 oscilações em 16 segundos com uma amplitude de 1 mm.

a) Calcule a frequência das oscilações.

b) Calcule o período do movimento.

c) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

3. A equação da elongação em função do tempo de um movimento oscilatório é dada pela expressão: $y(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

a) Qual é a amplitude das oscilações?

b) Qual é a frequência cíclica das oscilações?

c) Calcule o período das oscilações.

d) Calcule a frequência das oscilações.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 3

Gráfico da Elongação em Função do Tempo

Introdução

Já sabemos representar a equação da elongação em função do tempo que é dada pela expressão $y(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t)$ onde "A" é a amplitude e "ω" é a frequência cíclica.

Nesta lição vamos ver como representa-la graficamente e como interpretar o mesmo gráfico.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Construir* o gráfico da elongação em função do tempo.
- *Interpretar* o gráfico da elongação em função do tempo.

Objectivos

Gráfico da elongação em Função do Tempo

Para podermos ter uma fácil interpretação do gráfico da elongação em função do tempo vamos começar por realizar uma experiência simples.

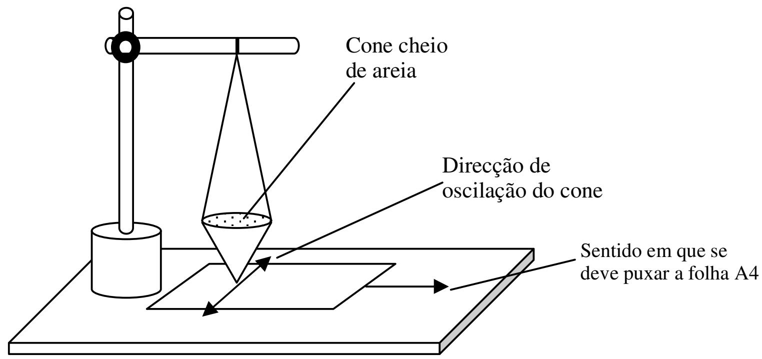
Material

- 1 folhas A4
- 1 cartolina ou cartão
- Areia
- 1 m de fio
- 1 suporte para fixar o fio

Montagem e Realização

- Construa um cone com a cartolina e faça um corte no bico do mesmo para que ao se deitar areia dentro esta saia lentamente.

- Monte o pêndulo representado na figura.

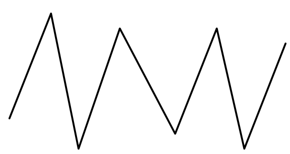


- Deixe o pêndulo oscilar livremente realizando oscilações de pequena amplitude. Com o cone cheio de areia a oscilar puxe lentamente a folha A4 no sentido indicado na figura.

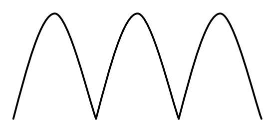
Avaliação

De acordo com a experiência que acaba de realizar assinale a figura que melhor se assemelha com a deixada pela areia sobre a folha A4.

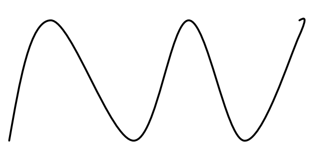
a)



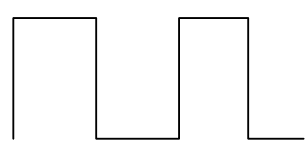
b)



c)



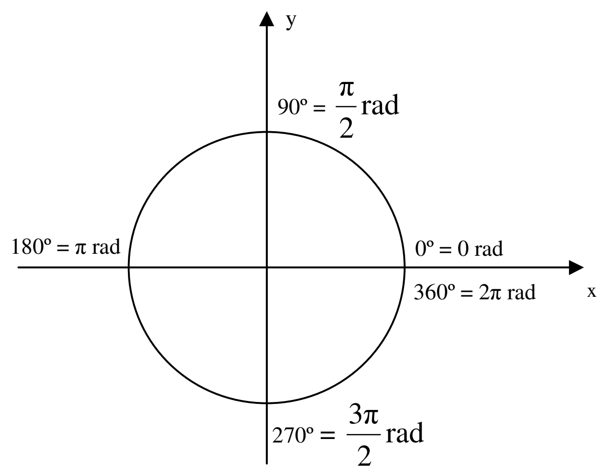
d)



Certamente que a figura da alínea c) é a melhor se assemelha com a deixada pela areia sobre a folha A4. Vamos lá ver então porquê.

Para isso comecemos por recordar os senos dos ângulos notáveis que aprendeu na disciplina de Matemática bem como a relação entre a medida dos ângulos em graus e radianos.

Na figura está representado o circulo trigonométrico com as medidas dos ângulos notáveis em graus e em radianos.



Como pode ver da figura do círculo trigonométrico o ângulo de 180º, por exemplo é igual a π rad ou seja, 3,14 radianos.

A tabela seguinte representa o valor do seno dos ângulos notáveis representados no círculo trigonométrico. Estes valores deverá fixa-los para uma melhor rapidez nos cálculos para a representação gráfica da equação da elongação em função do tempo.

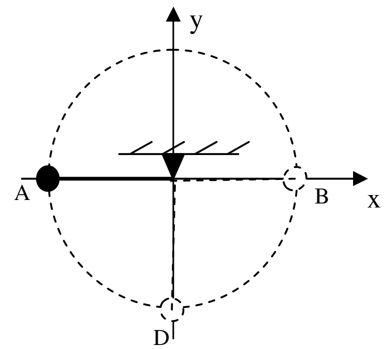
α (rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sen α	0	1	0	- 1	0

A figura representa o pêndulo da lição anterior. Recorda-se que o período é o tempo necessário para que o pêndulo realize uma oscilação completa. Porém considera-se que o pêndulo realiza uma oscilação completa, por exemplo se partido do ponto “A” vai até ao ponto “B” 2 retorna a “A”.

Verificando o ângulo descrito pelo pêndulo durante uma oscilação completa, facilmente poderá observar que:

- de “A” para “D”, o pêndulo descreve um ângulo de 90º,
- de “A” para “B”, o pêndulo descreve um ângulo de 180º,
- de “A” para “B” e voltar a “D”, o pêndulo descreve um ângulo de 270º,

- de "A" p ara "B" e voltar a "A", o pêndulo descreve um ângulo de 360º.



Já sabemos que se o pêndulo parte de "A", vai até "B" e volta ao ponto "A" o tempo que ele gasta corresponde a 1 (um) período "T". Por isso podemos agora verificar que:

- de "A" para "D", o pêndulo gasta o tempo correspondente a um quarto do período "$\frac{T}{4}$",
- de "A" para "B", o pêndulo gasta o tempo correspondente a metade de um período "$\frac{T}{2}$",
- de "A" para "B" e voltar a "D", o pêndulo gasta o tempo correspondente a três quartos do período "$\frac{3T}{4}$",
- de "A" para "B" e voltar a "A", o pêndulo gasta o tempo correspondente a um período "T",

Agora chegou a vez de aplicarmos os conhecimentos até aqui adquiridos na construção do gráfico da elongação em função do tempo. Vai ver que não é difícil. Só precisa de conhecer o valor do seno dos ângulos notáveis e saber fazer corresponder o tempo através do período.

Vamos então resolver em conjunto o seguinte exercício.

Um pêndulo de um relógio realiza 60 oscilações em 120 segundos com uma amplitude de 10 cm.

a) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

b) Represente graficamente a equação da elongação em função do tempo.

Já sabe que para escrever a equação da elongação em função do tempo deve começar por tirar os dados, calcular o período, depois a frequência cíclica e substituir na expressão correspondente.

a)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 60 t = 120 A = 10 cm = 0,1 m y(t) = ?	$T = \frac{t}{n}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$T = \frac{120}{60}$ $T = 2\text{ s}$ $\omega = \frac{2\pi}{2}$ $\omega = \pi\text{ rad/s}$ $y(t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão $y(t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

c) Para construirmos os gráfico da elongação em função do tempo temos que preencher a tabela que se segue, em que numa coluna temos a elongação em metros e na outra o tempo em segundos.

y (m)	**t (s)**
	$0 \cdot T$
	$\frac{T}{4}$
	$\frac{T}{2}$
	$\frac{3T}{4}$
	T

Repare que os valores para os tempos foram escolhidos em função do período das oscilações. Por isso,

- Para: $t = 0 \cdot T \Rightarrow t = 0\ \text{s}$
- Para: $t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{2}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ \text{s}$ (não se esqueça que o período é de 2 s)
- Para: $t = \frac{T}{2} \Rightarrow t = \frac{2}{2} \Rightarrow t = 1\ \text{s}$ (não se esqueça que o período é de 2 s)
- Para: $t = \frac{3T}{4} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 2}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{2}\ \text{s}$ (não se esqueça que o período é de 2 s)
- Para: $t = T \Rightarrow t = 2\ \text{s}$ (não se esqueça que o período é de 2 s)

Assim podemos preencher os valor dos tempos na tabela anterior, veja de seguida.

y (m)	**t (s)**
	0
	$\frac{1}{2}$
	1
	$\frac{3}{2}$
	2

Agora podemos calcular o valor da elongação para cada um dos tempos usando a equação que escrevemos na alínea a) "$y(t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$". Para tal, devemos substituir, sucessivamente, os valores 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e 2 segundos no lugar da letra "t" na equação da elongação em função do tempo. Assim,

Para: t = 0 s

$$y(0) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0)$$
$$y(0) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(0)$$
$$y(0) = 0{,}1 \cdot 0$$
$$y(0) = 0\ \text{m}$$

[não se esqueça que: $\text{sen}(0) = 0$]

Para: $t = \frac{1}{2}$ s

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}1 \cdot 1$$
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}1\ \text{m}$$

[não se esqueça que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$]

Para: t = 1 s

$$y(1) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 1)$$
$$y(1) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi)$$
$$y(1) = 0{,}1 \cdot 0$$
$$y(1) = 0\ \text{m}$$

[não se esqueça que: $\text{sen}(\pi) = 0$]

Para: $t = \frac{3}{2}$ s

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot \frac{3}{2}\right)$$
$$y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}1 \cdot (-1)$$
$$y\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}1\ \text{m}$$

[não se esqueça que: $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$]

Para: t = 2 s

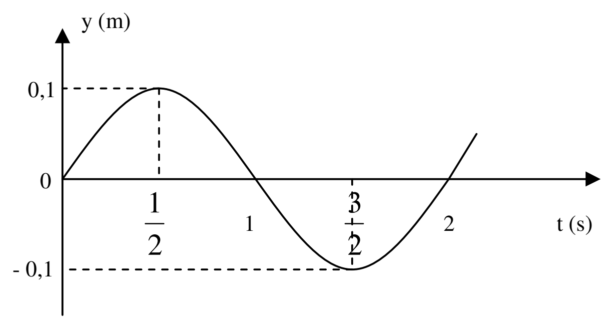
$$y(2) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 2)$$
$$y(2) = 0{,}1 \cdot \text{sen}(2\pi)$$
$$y(2) = 0{,}1 \cdot 0$$
$$y(2) = 0 \text{ m}$$

[não se esqueça que: $\text{sen}(2\pi) = 0$]

Finalmente podemos acabar de preencher a tabela.

y (m)	**t (s)**
0	0
0,1	$\frac{1}{2}$
0	1
-0,1	$\frac{3}{2}$
0	2

Agora podemos construir o gráfico fazendo corresponder os valores da elongação "y" aos respectivos valores de "t". Assim obteremos o seguinte gráfico.



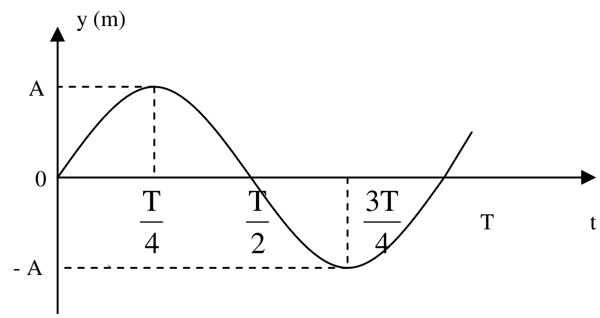
Como vê, o gráfico obtido é semelhante a figura que obteve na experiência com o cone de areia. Esta linha é chamada sinusóide, porque representa a função seno. Por isso, podemos afirmar que o gráfico da elongação em função do tempo é uma linha sinusoidal, cujos máximos correspondem a amplitude.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O gráfico da elongação em função do tempo é uma linha sinusoidal, cujos máximos correspondem a amplitude.

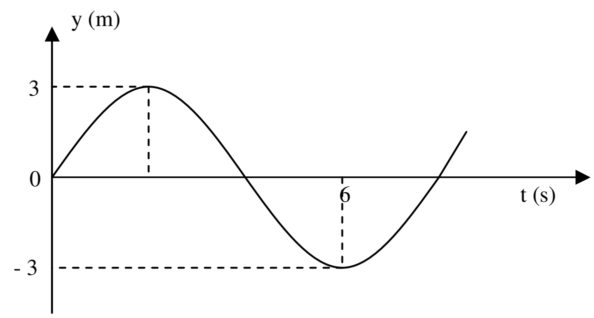


Agora vamos realizar conjuntamente a actividade que se segue para que possa aprender a interpretar o gráfico da elongação em função do tempo.

Actividades

Actividades

1. A figura representa o gráfico da elongação em função do tempo das oscilações realizadas por um pêndulo mecânico.



a) Determine a amplitude das oscilações.

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência das oscilações.

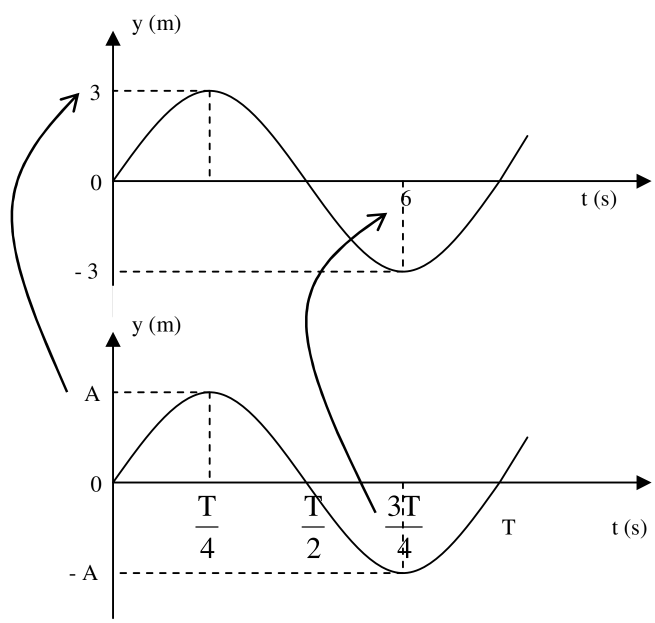
d) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

Para resolver esta questão temos que comparar o gráfico dado com o gráfico do nosso resumo.

a) Repare que no lugar da amplitude "A" temos o valor "3". Por isso esse é o valor da amplitude. Por isso a resposta é: A = 3 m



b) Repare que no gráfico o valor "6" foi colocado no lugar de $\frac{3T}{4}$.

Por isso vamos escrever:

$$\frac{3T}{4} = 6 \Rightarrow T = \frac{6 \cdot 4}{3}$$
$$\Rightarrow T = 8\,s$$

Resposta: O Período é de 8 s.

c) Para calcular a frequência é só aplicar a fórmula que já conhecemos, porque já sabemos qual é o valor do período.

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 8\ s$ $f\ = ?$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{8}$ $f = 0{,}125\,Hz$

Resposta: A frequência é de 0,125 Hz.

d) Também temos que recorrer à fórmula que já conhecemos.

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 8\ s$ $\omega\ = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{8}$ $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de $\frac{\pi}{4}$ rad/s.

e) Para escrever a equação da elongação em função do tempo temos que substituir na equação $y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$ o valor da amplitude "A" e da frequência cíclica "ω". Como,

$A = 3\ m$ e $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s

podemos escrever: $y(t) = 3 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela

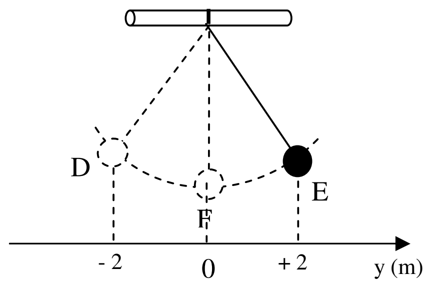
expressão: $y(t) = 3 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar se percebeu como construir e interpretar o gráfico da elongação em função do tempo.

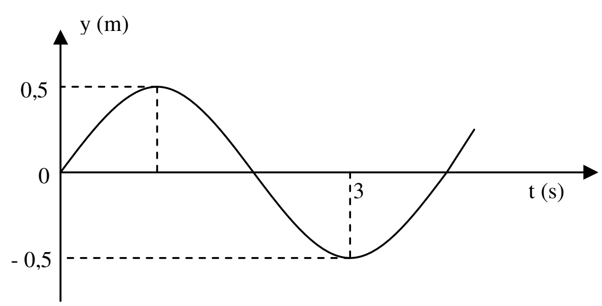
1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos “D” e “E”, passando pelo ponto “F”. O corpo realiza 80 0scilações em 320 segundos.



a) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo.

b) Construa o gráfico da elongação em função do tempo para as oscilações realizadas pelo pêndulo.

2. O gráfico representa as oscilações realizadas por um oscilador de mola em função do tempo.



a) Qual é a amplitude das oscilações realizadas pelo oscilador?

b) Calcule o período do movimento.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 4

Equação da Velocidade em Função do Tempo

Introdução

Certamente que já observou que durante as oscilações mecânicas a velocidade do corpo oscilante aumenta quando o corpo desloca-se em direcção do ponto de equilíbrio mas diminui até parar quando se afasta deste, tanto para um lado como para o outro.

Nesta lição vamos aprender a escrever e a interpretar a equação que descreve este movimento.

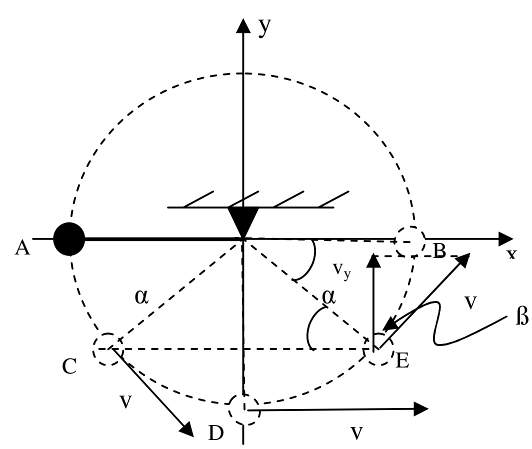
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Aplicar* a equação da velocidade em função do tempo na resolução de exercícios concretos.

Equação da velocidade em função do tempo

A figura representa um corpo a oscilar entre os pontos "A" e "B". Neste caso, por exemplo, a velocidade do pêndulo aumenta de "A" para "D" e diminui de "D" para "B" acabando por parar. Porém, de regresso, a sua velocidade aumenta até ao ponto "D" e depois diminui novamente até parar em "A".



Da figura pode ver que a velocidade é sempre tangente à trajectória descrita pelo corpo oscilante.

No ponto “E” fez-se a projecção vertical da velocidade e chamou-se “v_y” a componente vertical da velocidade.

Podemos chamar “ß” ao ângulo entre “v” e “v_y”, e “v” é a hipotenusa, veja a figura.

Como vê, “v_y” é o cateto adjacente ao ângulo “ß”.

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v \cdot \cos(\beta)$$

Já sabe que durante uma oscilação completa o tempo que o corpo oscilante gasta é igual ao período “T”. Mas durante uma oscilação completa o Pèndulo percorre uma distância igual ao perímetro da circunferência) repare que de “A” para “B” o corpo percorre uma distÂncia igual a metade do perímetro da circunferência e a volta percorre mais uma metade). Deste modo teríamos:

tempo = T

distância percorrida = perímetro da circunferência = 2πr

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto a percorrer a distância}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}}$$

Mas como já sabemos que: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e $v = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$, repare que a parte dentro da linha tracejada é igual a freq “ω”. Por isso,

$$\boxed{v = \omega \cdot r}$$

Fixe esta equação que iremos aplica-la mais adiante. Mas antes vamos verificar uma relação Metemática muito importante para obtermos a equação da velocidade em função do tempo.

Observando a figura, vê-se que: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$

Mas isto significa que: $\beta = 90^{\circ} - \alpha$

Assim: $\cos(\beta) = \cos(90^{\circ} - \alpha)$

Da Matemática é válida a relação: $\cos(90^{\circ} - \alpha) = \cos(\alpha)$ (fórmula de redução ao 1º quadrante). Isto significa que: $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$

Agora podemos usar a fórmula $v = \omega \cdot r$ e a relação $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ para obtermos a equação que desejamos.

Podemos então substituir "$\omega \cdot r$" no lugar de "v" e "$\cos(\alpha)$" no lugar de "$\cos(\beta)$", na equação $v_x = v \cdot \cos(\beta)$.

$\omega \cdot r$ $\qquad\qquad$ $\cos(\alpha)$

$$v_x = v \cdot \cos(\beta)$$

Deste modo obtemos a relação: $v_y = \omega \cdot r \cdot \cos(\alpha)$

Mas como:

- "r" é igual a amplitude "A",
- $\alpha = \omega \cdot t$, e
- substituindo "v_y" por "v(t)",

Obtemos a equação que pretendemos:

$$\boxed{v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

Onde "v(t)" é a equação da velocidade em função do tempo, "A" é a amplitude e "ω" é a frequência cíclica.

A unidade da velocidade no SI é o metro por segundo "m/s".

O produto da amplitude pela frequência "A.ω" cíclica é a dá-nos a velocidade máxima "v_{max}" do corpo oscilante. Por isso,

$$\boxed{v_{max} = A \cdot \omega}$$

A equação da velocidade em função do tempo também pode ser deduzida aplicando 1ª derivada da equação da elongação em função do tempo. Assim:

$$x(t) = A\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$\Rightarrow x'(t) = [A\mathrm{sen}(\omega t)]'$$
$$\Rightarrow x'(t) = A \cdot [\mathrm{sen}(\omega t)]' \cdot (\omega t)'$$
$$\Rightarrow x'(t) = A\cos(\omega t) \cdot \omega$$
$$\Rightarrow x'(t) = A \cdot \omega\cos(\omega t)$$

Como vê: $v(t) = x'(t)$.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

onde "v(t)" é a equação da velocidade em função do tempo, "A" é a amplitude e "ω" é a frequência cíclica.

- A velocidade máxima é dada pela expressão:

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

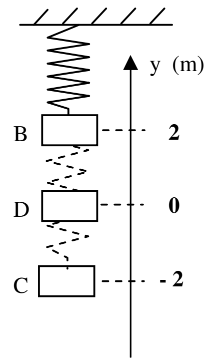
onde "v_{max}" é a velocidade máxima.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. A figura representa um oscilador de mola cujo corpo oscila entre os postos B e C passando pelo ponto D. Sabe-se que o corpo realiza 5 oscilações em 20 segundos.



a) Determine a amplitude das oscilações.

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Escreva a equação da velocidade em função do tempo para as oscilações

Passemos então a resolução da actividade proposta.

a) A = 2 m

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 5 t = 20 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{t}{n}$

Resposta: O Período é de 4 s.

c) s

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 4$ s $\omega = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{4}$ $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de $\frac{\pi}{2}$ rad/s.

d) Para escrever a equação da elongação em função do tempo fazemos o mesmo que fizemos para a equação da elongação em função do tempo. Por isso, substituímos o valor da amplitude e da frequência cíclica.

Dados	Fórmula	Resolução
$A = 2$ m $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s $v(t) = ?$	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$ $v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da vfelocidade em função do tempo é dada pela expressão: $v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

Podemos agora resolver mais um exercício para aplicarmos a equação aprendida nesta lição.

2. A equação da velocidade em função do tempo para as oscilações de um pêndulo é dada pela expressão $v(t) = 16 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ em unidades do SI.

   a) Qual é o valor da frequência cíclica?

   b) Qual é o valor da velocidade máxima do corpo oscilante?

   c) Calcule o valor da amplitude das oscilações.

   d) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

Para resolvermos este exercício temos que comparar a equação dada com a equação que aprendemos nesta lição.

$$v(t) = 16 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Assim podemos ver facilmente que:

a) $v_{max} = 16\pi$ m/s

b) $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s

c) Para responder a esta alínea temos que usar os valores que já temos e aplicar a fórmula da velocidade máxima.

Dados	**Fórmula**	**Resolução**
$v_{max} = 16\pi$ m/s $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s $A = ?$	$v_{max} = A \cdot \omega$	$16 \cdot \pi = A \cdot \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow A = \dfrac{16 \cdot \pi \cdot 2}{\pi}$ $\Rightarrow A = 32$ m

Resposta: A amplitude das oscilações é de 32 m.

d) Neste caso fazemos o mesmo que já fizemos nas lições anteriores.

Dados	**Fórmula**	**Resolução**
$\omega = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s $A = 32$ m	$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$y(t) = 32 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot t\right)$

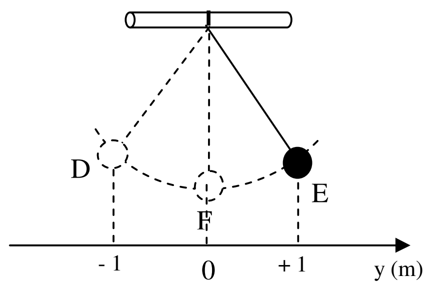
Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = 32 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

Agora tente resolver, no seu caderno as actividades que se seguem. Não tenha receio, que não vai ser difícil. O importante é perceber bem os exemplos resolvidos. Sucessos.

Avaliação

Avaliação

1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos “D” e “E”, passando pelo ponto “F”. O corpo realiza 10 0scilações em 120 segundos.



a) Determine a amplitude do movimento.

b) Calcule o período do movimento.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

2. A equação da velocidade em função do tempo para as oscilações de um corpo é da pela expressão: $v(t) = 9 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$.

a) Qual é a velocidade máxima do corpo oscilante?

b) Qual é a frequência cíclica das oscilações?

c) Calcule a amplitude das oscilações.

d) Escreva a equação da elongação em função do tempo das oscilações.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 5

Gráfico da Velocidade em Função do Tempo

Introdução

Já sabemos que a equação da velocidade em função do tempo que é dada pela expressão $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ onde "A" é a amplitude e "ω" é a frequência cíclica.

Nesta lição vamos ver como representa-la graficamente e como interpretar o mesmo gráfico.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Construir* o gráfico da velocidade em função do tempo.
- *Interpretar* o gráfico da velocidade em função do tempo.

Gráfico da velocidade em Função do Tempo

Para podermos construir fácil interpretação do gráfico da elongação em função do tempo vamos começar por recordar o co-seno dos ângulos notáveis. Já sabe que deverá fixar estes valores para uma melhor rapidez nos cálculos para a representação gráfica da equação da elongação em função do tempo. Veja a tabela que se segue.

α (rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Cos (α)	1	0	-1	0	1

Passemos então à construção do gráfico da velocidade em função do tempo. Vai ver que não é difícil. Só precisa de conhecer o valor do co-seno dos ângulos notáveis e saber fazer corresponder o tempo através do período. Para tal vamos mais uma vez construir o gráfico com base num exercício concreto.

Um menino oscila numa corda muito comprida realizando 20 oscilações em 400 segundos com uma amplitude de 10 m.

a) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

b) Represente graficamente a equação da velocidade em função do tempo.

Já sabe que para escrever a equação da velocidade em função do tempo deve começar por tirar os dados, calcular o período, depois a frequência cíclica e substituir na expressão correspondente.

a)

Dados	**Fórmula**	**Resolução**
$n = 20$ $t = 400$ $A = 10\ m$ $v(t) = ?$	$T = \frac{t}{n}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$T = \frac{400}{20}$ $T = 20\ s$ $\omega = \frac{2\pi}{20}$ $\omega = \frac{\pi}{10}$ rad/s $v(t) = 10 \cdot \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$ $v(t) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela

expressão $v(t) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

c) Para construirmos os gráfico da velocidade em função do tempo temos que preencher a tabela que se segue, em que numa coluna temos a velocidade em metros e na outra o tempo em segundos.

Já sabe que os tempos que escolhemos devem ser $0 \cdot T$, $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, e T.

v (m/s)	t (s)
	$0 \cdot T$
	$\frac{T}{4}$
	$\frac{T}{2}$
	$\frac{3T}{4}$
	T

Repare mais uma vez que os valores para os tempos foram escolhidos em função do período das oscilações. Por isso,

- Para: $t = 0 \cdot T \Rightarrow t = 0$
- Para: $t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{20}{4} \Rightarrow t = 5\,s$ (não se esqueça que o período é de 20 s)
- Para: $t = \frac{T}{2} \Rightarrow t = \frac{20}{2} \Rightarrow t = 10\,s$ (não se esqueça que o período é de 20 s)
- Para: $t = \frac{3T}{4} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 20}{4} \Rightarrow t = 15\,s$ (não se esqueça que o período é de 20 s)
- Para: $t = T \Rightarrow t = 20\,s$ (não se esqueça que o período é de 20 s)

Assim podemos preencher os valor dos tempos na tabela anterior, veja de seguida.

y (m)	t (s)
	0
	5
	10
	15
	20

Agora podemos calcular o valor da velocidade para cada um dos tempos usando a equação que escrevemos na alínea a) “ $v(t) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$ ”. Para tal, devemos substituir, sucessivamente, os valores 0, 5, 10, 15 e 2 0no lugar da letra “t” na equação da velocidade em função do tempo. Assim,

Para: t = 0 s

$$v(0) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 0\right)$$

$$v(0) = \pi \cdot \cos(0) \qquad \text{[não se esqueça que: } \cos(0) = 1 \text{]}$$

$$v(0) = \pi \cdot 1$$

$$v(0) = \pi \text{ m/s}$$

Para: t = 5 s

$$v(5) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 5\right)$$

$$v(5) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{[não se esqueça que: } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{]}$$

$$v(5) = \pi \cdot 0$$

$$v(5) = 0 \text{ m/s}$$

Para: t = 10 s

$$v(10) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 10\right)$$
$$v(10) = \pi \cdot \cos(\pi) \qquad \text{[não se esqueça que: } \cos(\pi) = -1 \text{]}$$
$$v(10) = \pi \cdot (-1)$$
$$v(10) = -\pi \text{ m/s}$$

Para: t =15 s

$$v(15) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 15\right)$$
$$v(15) = \pi \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{[não se esqueça que: } \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{]}$$
$$v(15) = \pi \cdot (0)$$
$$v(15) = 0 \text{ m/s}$$

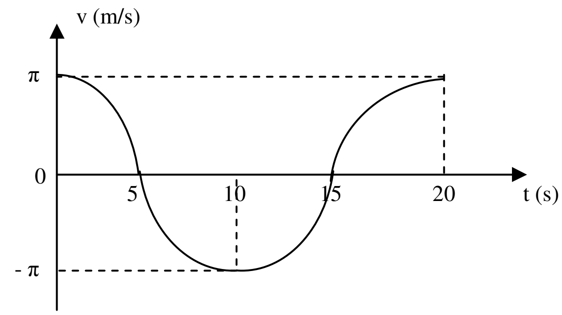
Para: t = 20 s

$$v(20) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right)$$
$$v(20) = \pi \cdot \cos(2\pi) \qquad \text{[não se esqueça que: } \cos(2\pi) = 1 \text{]}$$
$$v(20) = \pi \cdot 1$$
$$v(20) = \pi \text{ m/s}$$

Finalmente podemos acabar de preencher a tabela.

v (m/s)	t (s)
π	0
0	5
$-\pi$	10
0	15
π	20

Agora podemos construir o gráfico fazendo corresponder os valores da velocidade "v" aos respectivos valores de "t". Assim obteremos o seguinte gráfico.



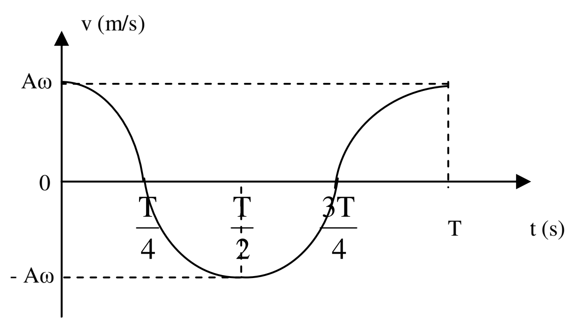
O gráfico obtido é uma linha que representa que também é chamada sinusóide, apesar de representar a função co-seno. Os máximos correspondem a velocidade máxima.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O gráfico da velocidade em função do tempo é uma linha sinusoidal, cujos máximos correspondem a velocidade máxima.

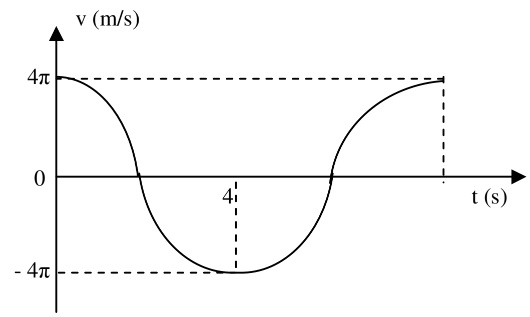


Agora vamos realizar conjuntamente a actividade que se segue para que possa aprender a interpretar o gráfico da velocidade em função do tempo.

Actividades

Actividades

1. A figura representa o gráfico da velocidade em função do tempo das oscilações realizadas por um oscilador de mola.



a) Qual é a velocidade máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Determine a amplitude das oscilações.

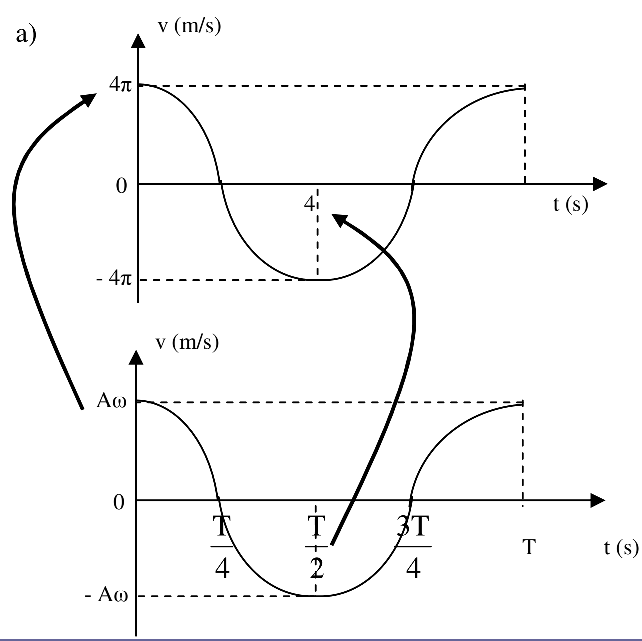
e) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

f) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

Para resolver esta questão temos que comparar o gráfico dado com o gráfico do nosso resumo.

a)



Da comparação resulta que: $v_{max} = 4\pi$ rad/s

b) Voltando a comparar os dois gráficos temos:

$$\frac{T}{2} = 4 \Rightarrow T = 2 \cdot 4$$
$$\Rightarrow T = 8\ s$$

Resposta: O Período é de 8 s.

c) Neste caso só tiramos os dados e aplicamos a fórmula para o cálculo da frequência cíclica.

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 8$ s $\omega = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{8}$ $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de $\frac{\pi}{4}$ rad/s.

d) Temos uma vez mais que usar os dados que já temos e calcular a amplitude.

Dados	Fórmula	Resolução
$v_{max} = 4\pi$ rad/s $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s $A = ?$	$v_{max} = A \cdot \omega$	$4 \cdot \pi = A \cdot \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4}{\pi}$ $\Rightarrow A = 16\ m$

Resposta: A amplitude é de 16 m.

e)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = 16$ m $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s $v(t) = ?$	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = 16 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$ $\Rightarrow v(t) = 4\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão: $v(t) = 4\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

f)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 16 m $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s y(t) = ?	$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$y(t) = 16 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela

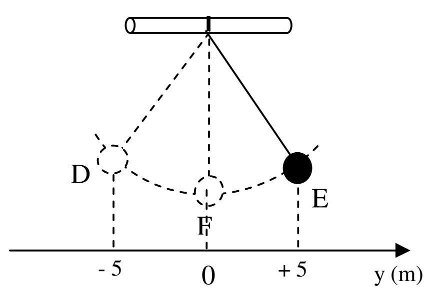
expressão: $y(t) = 16 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar se percebeu como construir e interpretar o gráfico da velocidade em função do tempo.

1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos "D" e "E", passando pelo ponto "F". O corpo realiza 100 0scilações em 20 segundos.



a) Determine a amplitude das oscilações.

b) Calcule o período das oscilações.

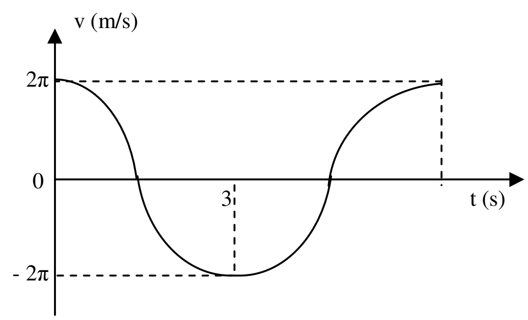
c) Calcule a frequência cíclica.

d) Escreva a equação velocidade em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo.

e) Construa o gráfico da velocidade em função do tempo.

f) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo.

2. O gráfico representa as oscilações realizadas por um pêndulo em função do tempo.



a) Qual é a velocidade máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Calcule a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da velocidade em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

f) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 6

Equação da Aceleração em Função do Tempo

Introdução

Até agora já aprendeu equação da elongação e da velocidade em função do tempo bem como a representação gráfica de cada uma destas expressões. Porém, como o movimento é acelerado sempre que o corpo se dirige ao ponto de equilíbrio e retardado sempre que se afasta deste. Por isso, outra grandeza física que caracteriza o movimento oscilatório de um corpo é a aceleração.

Nesta lição vamos aprender como calcular a aceleração que o corpo oscilante adquire com o decorrer das oscilações.

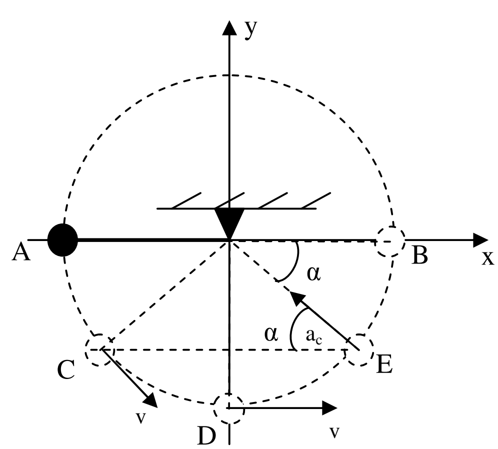
Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Aplicar* a equação da aceleração em função do tempo na resolução de exercícios concretos.

Objectivos

Equação da Aceleração em Função do Tempo

A figura representa novamente um corpo a oscilar entre os pontos "A" e "B" passando pelos ponto "C", "D" e "E".



Como a velocidade é tangente a trajectória do corpo oscilante, a velocidade muda constantemente de direcção. Por exemplo no ponto “C” a direcção da velocidade é oblíqua mas em “D” a direcção da velocidade é horizontal. A variação da direcção da velocidade na unidade de tempo dá-se o nome de aceleração centrípeta.

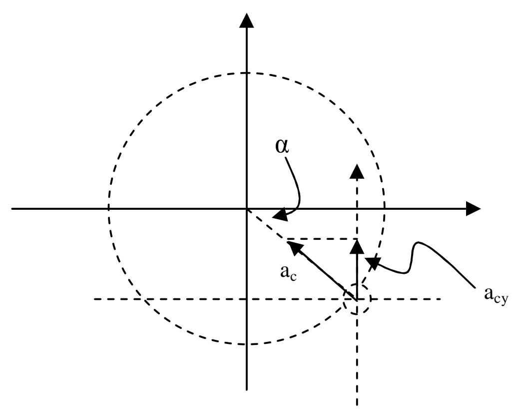
A aceleração centrípeta é uma grandeza vectorial, por isso tem ponto de aplicação, direcção, sentido e módulo ou valor.

No ponto “E” da figura está representada a aceleração centrípeta. Como vê, o ponto de aplicação da aceleração centrípeta é o centro de gravidade do corpo oscilante. A sua direcção é sempre perpendicular à trajectória do corpo e o seu sentido é sempre em direcção do centro da trajectória. O módulo da aceleração centrípeta pode ser determinado pela relação:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_c = \omega^2 \cdot r}$$

onde “a_c” é a aceleração centrípeta, “v” é a velocidade, “r” é o raio e “ω” é a frequência cíclica.

A unidade da aceleração centrípeta no SI é o metro por segundo ao quadrado “m/s^2”.



Já sabemos que quando o pêndulo está na posição “E” por exemplo, forma um ângulo “α” com o eixo “x” e por isso o lado “a_y” é o cateto oposto ao ângulo “α” e “a_c” é a hipotenusa, veja a figura.

Da Matemática já sabe que o seno de um ângulo é a razão ou o quociente entre a medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa:

$$\text{seno de um ângulo} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Então podemos escrever, para o ângulo “α”:

$$sen(\alpha) = \frac{a_y}{a_c}$$

Porque a medida do cateto oposto é igual a "a_y" e a medida da hipotenusa é igual a "a_c". Assim,

$$sen(\alpha) = \frac{a_y}{a_c} \Rightarrow a_y = a_c \cdot sen(\alpha)$$

Como: $\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega \cdot t$

Agora podemos então substituir o produto "ω.t" no lugar de "α" na equação: $a_{cy} = a_c \cdot sen(\alpha)$, e ao mesmo tempo podemos substituir o produto "ω^2.r" no lugar de "a_c", porque $a_c = \omega^2 \cdot r$.

substituir "α" pelo produto "ω.t"

Substituir "a_c" por "ω^2.r"

$$a_{cy} = a_c \cdot sen(\alpha)$$

Assim obtemos a equação:

$$a_{cy} = \omega^2 \cdot r \cdot sen(\omega \cdot t)$$

Representado "a_{cy}" por "a(t)" e substituir "r" por "A", porque o raio da trajectória é igual a amplitude obtemos a **equação da aceleração em função do tempo.** Assim,

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot sen(\omega \cdot t)}$$

Onde "a" é a aceleração, , "A" é a amplitude, "ω" é a velocidade angular e "t" é o tempo. No SI a aceleração vem expressa em metros por segundo ao quadrado "m/s^2".

O produto "$\omega^2 \cdot A$" dá-nos o valor da aceleração máxima. Por isso,

$$\boxed{a_{max} = \omega^2 \cdot A}$$

O sinal negativo na aceleração é porque o seu sentido é sempre oposto ao sentido da elongação. Por exemplo no ponto “E”, onde foi representada a aceleração centrípeta sobre o corpo oscilante, a aceleração é positiva porque aponta par cima mas a elongação é negativa porque o ponto “E” está na parte negativa do eixo “y”.

A equação da aceleração em função do tempo também pode ser deduzida com base na 2ª derivada da equação da elongação em função do tempo: a(t) = x´´(t) (o que corresponde a 1ª derivada da velocidade em função do tempo:

Assim:

$$v(t) = A \cdot \omega\cos(\omega t)$$
$$\Rightarrow v(t)' = \left[A \cdot \omega\cos(\omega t)\right]'$$
$$\Rightarrow v(t)' = A \cdot \omega \cdot \left[\cos(\omega t)\right]' \cdot (\omega t)'$$
$$\Rightarrow v(t)' = -A \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \cdot (\omega)$$
$$\Rightarrow v(t)' = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

Como vê: a(t) = v´(t)

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- A aceleração centrípeta é a variação da direcção da velocidade na unidade de tempo.
- A aceleração centrípeta é uma grandeza vectorial, por isso tem ponto de aplicação, direcção, sentido e módulo ou valor.
- O ponto de aplicação da aceleração centrípeta é o centro de gravidade do corpo oscilante.
- A direcção da aceleração centrípeta é sempre perpendicular à trajectória do corpo.
- O sentido da aceleração centrípeta é sempre em direcção do centro da trajectória.
- O módulo da aceleração centrípeta pode ser determinado pela relação:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_c = \omega^2 \cdot r}$$

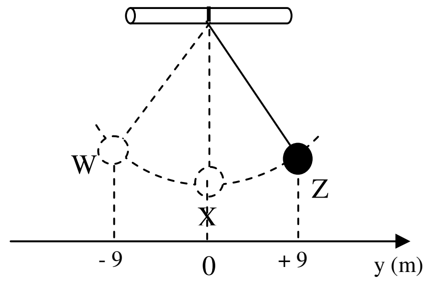
- A equação da aceleração em função do tempo é dada pela expressão: $a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot sen(\omega \cdot t)$.
- A aceleração máxima é dade pela expressão; $a_{max} = \omega^2 \cdot A$
- O sinal negativo na equação da aceleração em função do tempo é porque o seu sentido é sempre oposto ao sentido da elongação "y".

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades

Actividades

1. A figura representa um pêndulo mecânico cujo corpo oscila entre os postos W e Z passando pelo ponto X. Sabe-se que o corpo realiza 5 oscilações em 30 segundos.



a) Qual é a amplitude das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Escreva a equação da aceleração em função do tempo.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

a) A = 9 m

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 5 t = 30 s T = ?	$T=\frac{t}{n}$	$T=\frac{30}{5}$ $T=6\,s$

Resposta: O Período é de 6 s.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 6 s ω = ?	$\omega=\frac{2\pi}{T}$	$\omega=\frac{2\pi}{6}$ $\omega=\frac{\pi}{3}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de $\frac{\pi}{3}$ rad/s.

e) Para escrever a equação da aceleração em função do tempo temos que substituir na equação $a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t)$ o valor da amplitude "A" e da frequência cíclica "ω". Como,

A = 9 m

$\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s

podemos escrever:

$$a(t) = -9 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$$
$$a(t) = -9 \cdot \frac{\pi^2}{3^2} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$$
$$a(t) = -\pi^2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$$

Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela

expressão: $a(t) = -\pi^2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

2. A equação da aceleração em função do tempo de um movimento oscilatório é dada pela expressão: $a(t) = -16\pi^2 \cdot \mathrm{sen}(4\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

a) Qual é a aceleração máxima das oscilações?

b) Qual é a frequência cíclica das oscilações?

c) Calcule o período das oscilações.

d) Calcule a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

f) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

Passemos então a resolução da segunda actividade proposta.

Para resolver as alíneas a) e b) devemos comparar a equação da aceleração $a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot sen(\omega \cdot t)$ e a equação da aceleração dada $a(t) = -16\pi^2 \cdot sen(4\pi \cdot t)$. Assim,

$$a(t) = -\underbrace{\omega^2 \cdot A} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$a(t) = -\overbrace{16\pi^2} \cdot sen(4\pi \cdot t)$$

Assim podemos concluir que:

a) $a_{max} = 16\pi^2\ m/s^2$

b) $\omega = 4\pi$ rad/s

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = 4\pi$ rad/s $T = ?$	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$4\pi = \dfrac{2\pi}{T}$ $T = \dfrac{2\pi}{4\pi}$ $T = 0{,}5\ s$

Resposta: O período é de 0,5 s.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$a_{max} = 16\pi^2\ m/s^2$ $\omega = 4\pi$ rad/s $A = ?$	$a_{max} = \omega^2 \cdot A$	$16\pi^2 = (4\pi)^2 \cdot A$ $A = \dfrac{16\pi^2}{16\pi^2}$ $A = 1\ m$

Resposta: A amplitude é de 1 m.

e)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 1 m $\omega = 4\pi$ rad/s y(t) = ?	$y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = sen(4\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão $y(t) = sen(4\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

. f)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 1 m $\omega = 4\pi$ rad/s y(t) = ?	$v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = 4\pi \cdot 1 \cdot \cos(4\pi \cdot t)$ $v(t) = 4\pi \cdot \cos(4\pi \cdot t)$

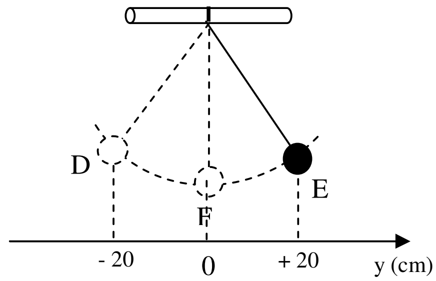
Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão $v(t) = 4\pi \cdot \cos(4\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

1. A figura representa um pêndulo que oscila entre os pontos “D” e “E”, passando pelo ponto “F”. O corpo realiza 10 0scilações em 20 segundos.



a) Qual é a amplitude das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Escreva a equação da aceleração em função do tempo.

2. A equação da aceleração em função do tempo de um movimento oscilatório é dada pela expressão: $a(t) = -9\pi^2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

a) Qual é a aceleração máxima das oscilações?

b) Qual é a frequência cíclica das oscilações?

c) Calcule o período das oscilações.

d) Calcule a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

f) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 7

Gráfico da aceleração em Função do Tempo

Introdução

Já sabemos que a equação da aceleração em função do tempo que é dada pela expressão $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t)$ onde "A" é a amplitude e "ω" é a frequência cíclica.

Nesta lição vamos ver como representa-la graficamente e como interpretar o mesmo gráfico.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Construir* o gráfico da aceleração em função do tempo.
- *Interpretar* o gráfico da aceleração em função do tempo.

Objectivos

Gráfico da aceleração em Função do Tempo

Na lição 3 quando construímos o gráfico da elongação em função do tempo, vimos a tabela dos senos dos ângulos notáveis. Para esta lição vamos precisar dela novamente porque como sabe, a equação da aceleração em função do tempo é representada pela função seno. Por isso veja mais uma vez a tabela e verifique os valores dos seno desses ângulos.

Para construir o gráfico da aceleração em função do tempo, vamos também usar um exercício concreto para que possa perceber com maior facilidade.

Um sino de uma igreja oscila realizando 3 oscilações em 9 segundos com uma amplitude de 0,1 m.

a) Calcule o período do movimento.

b) Calcule a frequência cíclica.

c) Escreva a equação da aceleração em função do tempo.

d) Represente graficamente a equação da aceleração em função do tempo.

Já sabe que para calcular o período e a frequência cíclica tendo o número de oscilações e o tempo necessário para realizar as oscilações, deve começar por tirar os dados, calcular o período, depois a frequência cíclica.

a)

Dados	Fórmula	Resolução
$n = 3$ $t = 6$ s $T = ?$	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{6}{3}$ $T = 3\,s$

Resposta: O período é de 3 s.

b)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 3$ s $\omega = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{3}$ $\omega = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad/s}$

Resposta: A frequência cíclica é de $\omega = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad/s}$.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 0,1 m = $\frac{1}{10}$ m $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad/s a (t) = ?	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)$	$a(t) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$ $a(t) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{4\pi^2}{9} \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$ $a(t) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela expressão $a(t) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot sen\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$.

d) Para construirmos os gráfico da aceleração em função do tempo temos que preencher a tabela que se segue, em que numa coluna temos a velocidade em metros e na outra o tempo em segundos.

Já sabe que os tempos que escolhemos devem ser $0 \cdot T$, $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, e T.

a (m/s²)	**t (s)**
	$0 \cdot T$
	$\frac{T}{4}$
	$\frac{T}{2}$
	$\frac{3T}{4}$
	T

Repare mais uma vez que os valores para os tempos foram escolhidos em função do período das oscilações. Por isso,

a. Para: $t = 0 \cdot T \Rightarrow t = 0$

b. Para: $t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{4}\,s$ (não se esqueça que o período é de 3 s)

c. Para: $t = \frac{T}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{2}\,s$ (não se esqueça que o período é de 3 s)

d. Para: $t = \frac{3T}{4} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 3}{4} \Rightarrow t = \frac{9}{4}\,s$ (não se esqueça que o período é de 3 s)

e. Para: $t = T \Rightarrow t = 3\,s$ (não se esqueça que o período é de 3 s)

Assim podemos preencher os valor dos tempos na tabela anterior, veja de seguida.

a (m/s^2)	**t (s)**
	0
	$\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{2}$
	$\frac{9}{4}$
	3

Agora podemos calcular o valor da aceleração para cada um dos tempos usando a equação que escrevemos na alínea c) "$a(t) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)$". Para tal, devemos substituir, sucessivamente, os valores 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$ e 3, no lugar da letra "t" na equação da aceleração em função do tempo. Assim,

Para: t = 0 s

$$a(0) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 0\right)$$

$$a(0) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}(0)$$

[não se esqueça que: $\text{sen}(0) = 0$]

$$a(0) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot 0$$

$$a(0) = 0 \text{ m/s}^2$$

Para: t = $\frac{3}{4}$ s

$$a\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

$$a\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

[não se esqueça que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$]

$$a\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot 1$$

$$a\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \text{ m/s}^2$$

Para: t = $\frac{3}{2}$ s

$$a\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

$$a\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot \text{sen}(\pi)$$

[não se esqueça que: $\text{sen}(\pi) = 0$]

$$a\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2\pi^2}{45} \cdot 0$$

$$a\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ m/s}^2$$

Para: $t = \frac{9}{4}$ s

$$a\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)$$
$$a\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$a\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot(-1)$$
$$a\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{2\pi^2}{45}\ \text{m/s}^2$$

[não se esqueça que: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$]

Para: t = 3 s

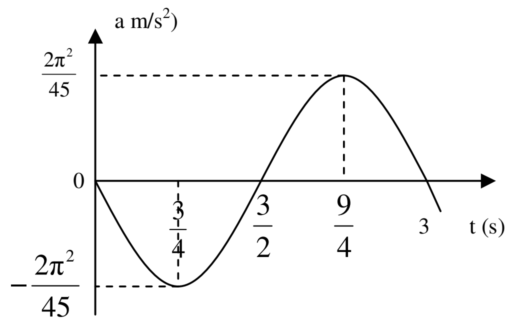
$$a(3) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right)$$
$$a(3) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot \operatorname{sen}(2\pi)$$
$$a(3) = -\frac{2\pi^2}{45}\cdot 0$$
$$a(3) = 0\ \text{m/s}^2$$

[não se esqueça que: $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$

Finalmente podemos acabar de preencher a tabela.

a (m/s²)	t (s)
0	0
$-\frac{2\pi^2}{45}$	$\frac{3}{4}$
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{2\pi^2}{45}$	$\frac{9}{4}$
0	3

Agora podemos construir o gráfico fazendo corresponder os valores da velocidade "v" aos respectivos valores de "t". Assim obteremos o seguinte gráfico.



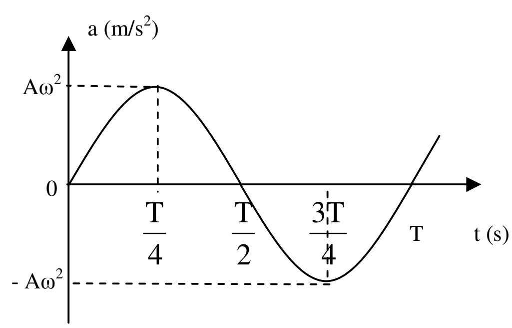
Como vê, o gráfico obtido é uma linha que representa também é chamada. Os máximos correspondem a aceleração máxima.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O gráfico da aceleração em função do tempo é uma linha sinusoidal, cujos máximos correspondem a aceleração máxima.

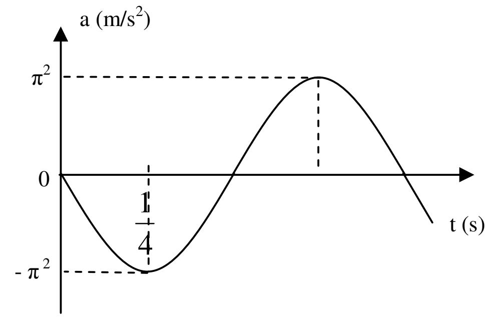


Agora vamos realizar conjuntamente ainda mais uma actividade segue para que possa aprender a interpretar o gráfico da aceleração em função do tempo.

Actividades

Actividades

1. A figura representa o gráfico da aceleração em função do tempo das oscilações realizadas por um oscilador de mola.



a) Qual é a aceleração máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Determine a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da aceleração em função do tempo.

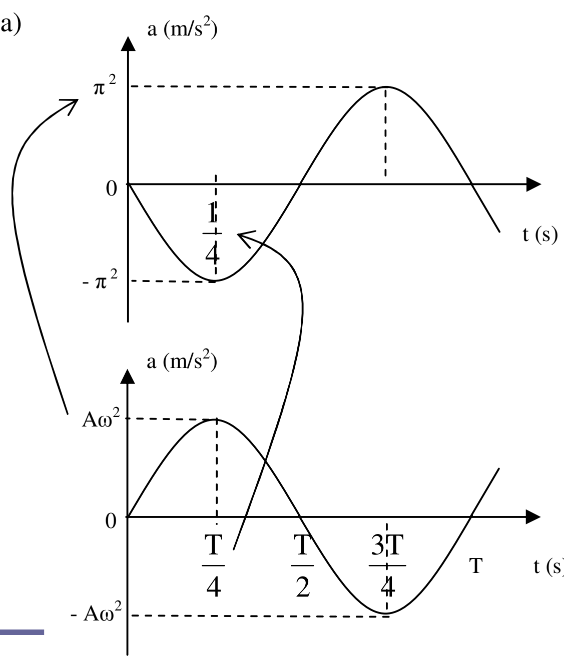
f) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

g) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

Passemos então a resolução da actividade proposta.

Para resolver esta questão temos que comparar o gráfico dado com o gráfico do nosso resumo.

a)



Da comparação resulta que: $a_{max} = \pi^2 rad/s$

b) Voltando a comparar os dois gráficos temos:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow T = \frac{1 \cdot 4}{4}$$

$$\Rightarrow T = 1\,s$$

Resposta: O Período é de 1 s.

c) Neste caso só tiramos os dados e aplicamos a fórmula para o cálculo da frequência cíclica.

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 1\ s$ $\omega\ = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{1}$ $\omega = 2\pi\ rad/s$

Resposta: A frequência cíclica é de $\omega = 2\pi\ rad/s$.

d) Temos uma vez mais que usar os dados que já temos e calcular a amplitude.

Dados	Fórmula	Resolução
$a_{max} = \pi^2 rad/s$ $\omega = 2\pi\ rad/s$ $A = ?$	$a_{max} = A \cdot \omega^2$	$\pi^2 = A \cdot (2\pi)^2$ $\Rightarrow A = \frac{\pi^2}{4\pi^2}$ $\Rightarrow A = \frac{1}{4} m$

Resposta: A amplitude é de $\frac{1}{4}\ m$.

e)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4} m$ $\omega = 2\pi\ rad/s$ $a(t) = ?$	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)$	$a(t) = -\frac{1}{4} \cdot (2\pi)^2 \cdot sen(2\pi \cdot t)$ $\Rightarrow a(t) = -\pi^2 \cdot sen(2\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela

expressão: $a(t) = -\pi^2 \cdot sen(2\pi \cdot t)$

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4}$ m $\omega = 2\pi$ rad/s y(t) = ?	$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$y(t) = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela

expressão: $y(t) = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t)$.

f)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4}$ m $\omega = 2\pi$ rad/s v(t) = ?	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t)$ $v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela

expressão: $v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot t)$.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar se percebeu como construir e interpretar o gráfico da velocidade em função do tempo.

1. Um menino oscila num baloiço realizando 5 oscilações em 25 segundos com uma amplitude de 5 metros.

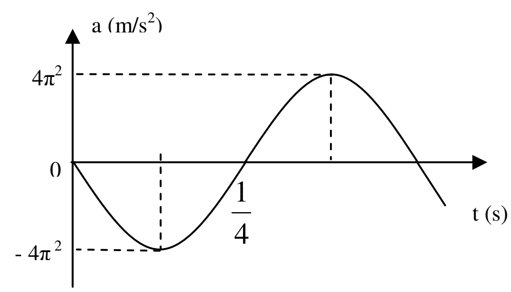
a) Calcule o período das oscilações.

b) Calcule a frequência cíclica.

c) Escreva a equação da aceleração em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo.

d) Construa o gráfico da aceleração em função do tempo.

2. O gráfico representa as oscilações realizadas por um oscilador de mola em funcão do tempo.



a) Qual é a aceleração máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Calcule a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da aceleração em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

f) Escreva a equação da velocidade em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

g) Escreva a equação da elongação em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 8

Equações de Thompson – Pêndulo Simples

Introdução

Certamente que já se deve ter interrogado porque é que o movimento oscilatório repete-se periódicamente sem nenhuma acção externa.

Este fenó,meno deve-se a presença de uma força chamada foraça restauradora a qual iremos estudar nesta lição. Será tembém com base nesta força que iremos verificar os factores de que depende o período de oscilação de um pêndulo.

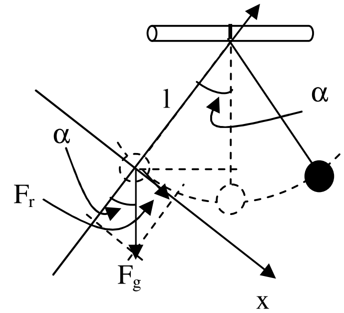
Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Aplicar* a relação de proporcionalidade entre o perído de oscilação de um pêndulo e o seu comprimento na explicação de fenómenos do dia a dia, da ciência e da técnica.
- *Aplicar* a relação de proporcionalidade entre o perído de oscilação de um pêndulo e a aceleração de gravidade no local na explicação de fenómenos do dia a dia, da ciência e da técnica.
- *Aplicar* a equação de Thompson na resolução de exercícios concretos.

Força Restauradora

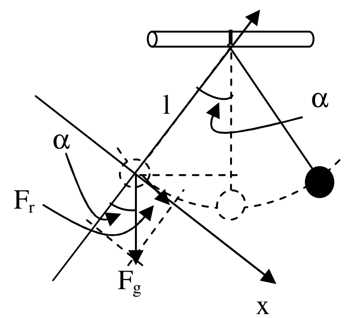
Na figura apresentada em seguida estão representadas as forças que actuam sobre um pêndulo numa das posições extremas. Como pode ver, a força gravidade actua verticalmente. Porém, decompondo esta força sobre o eixo “x” verifica-se que esta força actua so sentido do movimento do corpo oscilante.



A esta componente da força de gravidade, dá-se o nome de força restauradora "F_r", porque ela é responsável pela reposição do movimento do corpo. Recorda-se que nas posições extremas a velocidade do corpo oscilante é nula. Portanto, a força restauradora. É a força responsável pela reposição do movimento do corpo oscilante.

Equação de Thompson

Agora vamos usar o conhecimento da força restauradora para determinar a realação de proporcinalidade entre o período de oscilações de um pêndulo do seu comprimento e da aceleração de gravidade no local.



Já sabe que a força restauradora "F_r" é a força que resulta da decomposição da força de gravidade. Mas como a força restauradora é o cateto oposto ao ângulo "α", então podemos escrever:

$$\text{sen}\alpha = \frac{F_r}{m \cdot g}$$

Assim podemos escrever a seguinte expressão:

$$F_r = m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$$

Mas de acordo com a segunda Lei de Newton, a resultante das força que actuam sobre um corpo é directamente proporcional a aceleração popr ele adequirida. Por isso, a força restauradora representa a resultante das força que actuam sobre o corpo oscilante. Assim podemos escrever:

$$F_r = m \cdot a$$

Substituindo "F_r" pelo produto "m.a" na expressão: $F_r = m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$, obtemos:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot a$$

Mas se observarmos de novo a figura, vemos que temos um triângulo rectângulo em que a amplitude "A" é o cateto oposto ao ângulo "α" e o comprimento "l" do pêndulo é a hipotenusa. Por isso podemos escrever:

$$\text{sen}\alpha = \frac{A}{l}$$

Desta forma podemos substituir “senα” pelo quociente “$\frac{A}{l}$” na expressão “$m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot a$” e obtemos:

$$m \cdot g \cdot \frac{A}{l} = m \cdot a$$

Mas como da equação da aceleração em função da posição podemos escrever:

$$a = \omega^2 \cdot A$$

onde “ω” é a frequência cíclica e “A” é a amplitude.

Assim podemos substituir a aceleração “a” pelo produto “$\omega^2 \cdot A$” na expressão “$m \cdot g \cdot \frac{A}{l} = m \cdot a$” e obtemos a expressão:

$$m \cdot g \cdot \frac{A}{l} = m \cdot \omega^2 \cdot A \Rightarrow m \cdot g \cdot A = m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot l$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot A}{m \cdot A \cdot l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Após as transformações que fizemos vamos usar a equação “$\omega = \frac{2\pi}{T}$”.

Substituindo na equação: $\omega^2 = \frac{g}{l}$, obtemos,

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow T^2 g = 4\pi^2 l$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 l}{g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

A equação obtida é designada Equação de Thompson, em honra ao cientista Thompson.

Com base na equação obtida podemos verificar que o período é directamente proporcinal ao comprimento do pêndulo, mas inversamente proporcional ao valor da aceleração de gravidade no local.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O período é directamente proporcinal ao comprimento do pêndulo e inversamente proporcional ao valor da aceleração de gravidade no local.

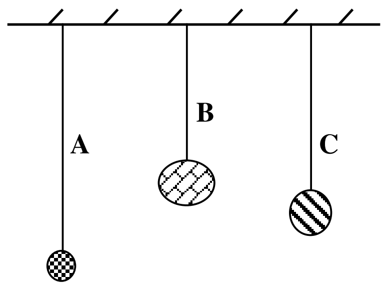
- A expressão para o cálculo do período ds oscilação de um pêndulo é: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Actividades

Actividades

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades seguem para que possa aprender a aplicar a equação para o cálculo do período das oscilações de um pêndulo simples.

1. A figura representa três pêndulos “A”, “B” e “C”.



a) Qual deles tem maior período? Porquê?

b) Se transportarmos os três pêndulos da Terra (g = 10 m/s^2) para Júpiter, onde a aceleração de gravidade vale 19,6 m/s^2, o período dos pêndulos aumenta ou diminui? Porquê?

Naturalmente que tem maior período o que tiver maior comprimento. Por isso o pêndulo “B” é o que tem maior período porque temcomprimento, pois o período é directamente proporcional ao comprimento.

É claro que o período vai diminuir porque a aceleração de gravidade aumentou e como sabe o período é inversamente proporcional à aceleração de gravidade no local.

2. Calcule o período das oscilações de um pêndulo de 10 metros de comprimento na superfície de Júpiter onde a celeração de gravidade é de cerca de 20 m/s^2.

Dados	Fórmula	Resolução
$l = 10$ m $g = 20$ m/s^2 $T = ?$	$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{10}{20}}$ $T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{0{,}5}$ $T = 6{,}28 \cdot 0{,}7$ $T = 4{,}4$ s

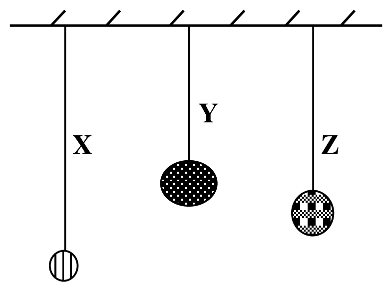
Resposta: O período é de cerca de 4,4 segundos.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar se percebeu a matéria a equação de Thompson.

1. A figura representa três pêndulos "X", "Y" e "Z".



   a) Qual deles tem menor período? Porquê?

   b) Se transportarmos os três pêndulos da Terra ($g = 10\ m/s^2$) para a lua, onde a aceleração de gravidade vale $1{,}6\ m/s^2$, o período dos pêndulos aumenta ou diminui? Porquê?

2. Calcule o período das oscilações de um pêndulo de 10 metros de comprimento na superfície da terra onde a aceleração de gravidade é de $10\ m/s^2$.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 9

Equação de Thompson – Oscilador de mola

Introdução

Na lição anterior vimos que o período de oscilação de um pêndulo simples é directamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao valor da aceleração de gravidade no local.

Nesta lição vamos aprender os valores de que depende o período das oscilação de um oscilador de mola.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Aplicar* a relação de proporcionalidade entre o perído de oscilação de um oscilador de mola e a massa do corpo oscilante na explicação de fenómenos do dia a dia, da ciência e da técnica.
- *Aplicar* a relação de proporcionalidade entre o perído de oscilação de um oscilador de mola e a constante elástica da mola na explicação de fenómenos do dia a dia, da ciência e da técnica.
- *Aplicar* a equação de Thompson na resolução de exercícios concretos.

Equação de Thompson

A semelhança do que fizemos na lição anterior, vamos usar o conhecimento da força restauradora para determinar a realação de proporcinalidade entre o período de oscilações de um oscilador de mola da sua massa e da constante elástica da mola.

A constante elástica de uma mola é a grandeza física que distingue se determinada mola é mais forte ou mais fraca do que outra. Entre duas molas, a mais forte é a que tiver maior é o valor da constante elástica.

De acordo com a Lei de Hooke, a força elástica ”F_{el}” é directamente proporcional à deformação ou elongação “X” sofrida pela mola. Por isso é válda a relação:

$$F_{el} = k \cdot X$$

Onde “k” é a constante elástica da mola.

Mas como "X" é igual a amplitude "A", que é a elongação máxima, então temos,

$$F_{el} = k \cdot A$$

Mas durante as oscilações, a força elástica "F_{el}" é a força restauradora "F_r", ou seja, a força responsável por repor o movimento oscilatório, então podemos sescrever:

$$F_r = k \cdot A$$

Já sabemos que é válida a segunda Lei de Newton "$F_r = m \cdot a$", por isso:

$$k \cdot A = m \cdot a$$

Substituindo a aceleração pela expressão que já conhece: "$a = \omega^2 \cdot A$", podemos escrever:

$$k \cdot A = m \cdot \omega^2 \cdot A$$

$$\omega^2 = \frac{k \cdot A}{m \cdot A} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Usando ainda a expressão da frequência cíclica "$\omega = \frac{2\pi}{T}$", temos

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow T^2 \cdot k = 4\pi^2 \cdot m$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{m} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot m}{k}}$$

Assim, obtemos finalmente a expressão da equação de Thompson para o oscilador de mola.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Com base na equação podemos verificar que o período de oscilação de um oscilador de mola é directamente proporcional à massa do corpo e inversamente proporcional à constante elástica da mola.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O período de oscilação de um oscilador de mola é directamente proporcional à massa do corpo e inversamente proporcional à constante elástica da mola.

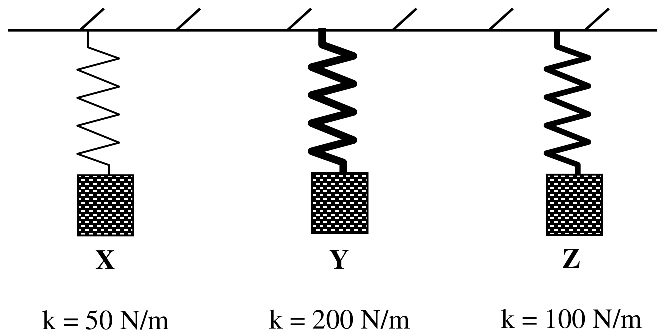
- A expressão para o cálculo do período das oscilações de um oscilador de mola é: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Actividades

Actividades

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades seguem para que possa aprender a aplicar mais uma das equações de Thompson.

A figura representa três osciladores de mola “X”, “Y” e “Z” com a mesma massa que é de 2 kg.



a) Qual deles tem menor período? Porquê?

b) Calcule o período das oscilações do oscilador “Y”.

É claro que o pêndulo “Y” terá menor período porque tem maior ocnstane elástica, e como sabe ao período é inversamente proporcional à constante elástica da mola.

Para calcular o período temos apenas que tirar os dados e aplicar a fórmula aprendida.

Dados	Fórmula	Resolução
$m = 2$ kg $k = 200$ N/m $T = ?$	$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}$ $T = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{0{,}01}$ $T = 6{,}28\cdot 0{,}1$ $T = 0{,}628$ s

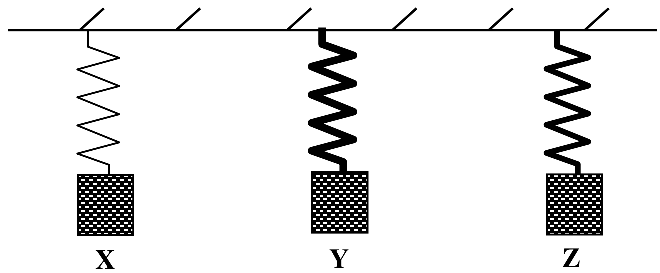
Resposta: O período é de 0,628 segundos.

Avaliação

Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar se percebeu esta matéria.

A figura representa três osciladores de mola "X", "Y" e "Z" com a mesma massa que é de 4 kg.



k = 50 N/m   k = 200 N/m   k = 100 N/m

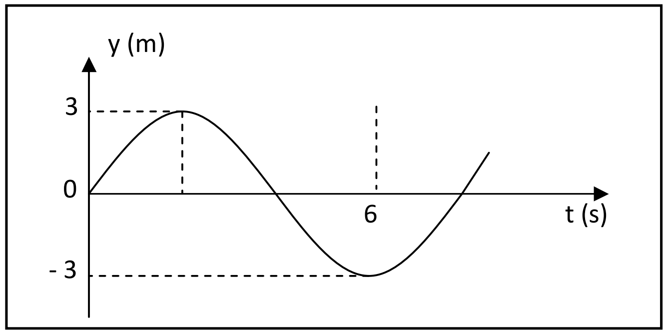
a) Qual deles tem maior período? Porquê?

b) Calcule o período das oscilações do oscilador "Z".

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Teste de preparação de final de módulo 6

1. A figura representa o gráfico da elongação em função do tempo das oscilações realizadas por um pêndulo mecânico.



a) Determine a amplitude das oscilações.

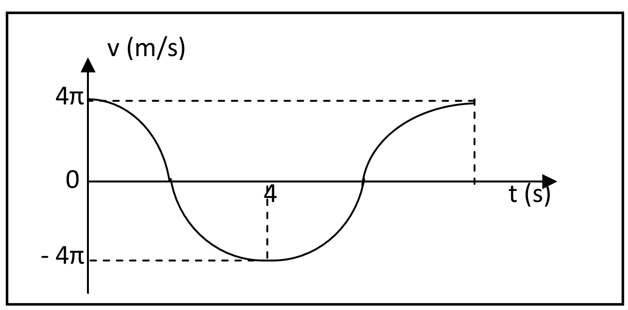
b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência das oscilações.

d) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

e) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

2. A figura representa o gráfico da velocidade em função do tempo das oscilações realizadas por um oscilador de mola.



a) Qual é a velocidade máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

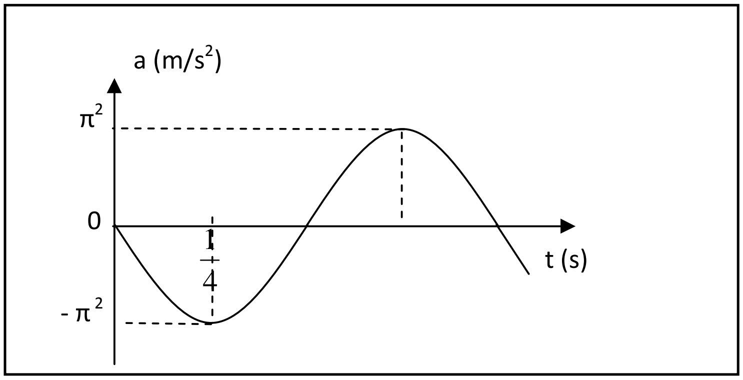
c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Determine a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

f) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

3. A figura representa o gráfico da aceleração em função do tempo das oscilações realizadas por um oscilador de mola.



a) Qual é a aceleração máxima das oscilações?

b) Calcule o período das oscilações.

c) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

d) Determine a amplitude das oscilações.

e) Escreva a equação da aceleração em função do tempo.

f) Escreva a equação da elongação em função do tempo.

g) Escreva a equação da velocidade em função do tempo.

Soluções - Módulo 6

Avaliação

Lição 1

1. a) A = 10 cm

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 30 t = 60 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{60}{30}$ $T = 2\ s$

Resposta: O Período é de 2 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 2 s f = ?	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{2}$ $f = 0{,}5\ Hz$

Resposta: A frequência é de 0,5 Hz.

2. a)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 150 t = 3 s f = ?	$f = \frac{n}{t}$	$f = \frac{150}{3}$ $f = 50\ Hz$

Resposta: A frequência é de 50 Hz.

b)

Dados	Fórmula	Resolução
f = 50 Hz T = ?	$T = \frac{1}{f}$	$T = \frac{1}{50}$ $T = 0{,}02\ \text{s}$

Resposta: O período é de 0,02 s.

3. a) A = 6 cm

b)

$$\frac{T}{2} = 2\ \text{s}$$
$$T = 2 \cdot 2\ \text{s}$$
$$T = 4\ \text{s}$$

Resposta: O período é de 4 segundos.

Nota: O período é de 4 segundos, porque o tempo de "B" para "C" corresponde a metade do período "$\frac{T}{2}$".

c)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 4 s f = ?	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{4}$ $f = 0{,}25\ \text{Hz}$

Resposta: A frequência é de 0,25 Hz.

Se acertou a todas questões está de parabéns. Caso não tenha acertado a todas, verifique de novo a resolução das questões que não acertou e tente mais uma vez. Mas se ainda tiver dificuldades, procure um colega do curso, amigo ou pode ir ao Centro de Recursos e discutir as suas dúvidas com o seu tutor.

Lição 2

1.

a) A = 20 cm

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 10 t = 20 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{20}{10}$ $T = 2\,s$

Resposta: O período é de 2 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 0,5 s f = ?	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{2}$ $f = 0.5\,Hz$

Resposta: A frequência é de 0.5 Hz..

d) Calcule a frequência cíclica das oscilações.

Dados	Fórmula	Resolução
T = 0,5 s ω = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{2}$ $\omega = \pi\,rad/s$

Resposta: A frequência cíclica é de π rad/s.

e)

$y(t) = 0{,}2sen(\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

2.

a)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 16 t = 16 s f = ?	$f = \frac{n}{t}$	$f = \frac{16}{16}$ $f = 1\ \text{Hz}$

Resposta: A frequência é de 1 Hz.

b)

Dados	Fórmula	Resolução
f = 1 Hz T = ?	$T = \frac{1}{f}$	$T = \frac{1}{1}$ $T = 1\,\text{s}$

Resposta: O período é de 1 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 1 s y(t) = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $y(t) = A\text{sen}(\omega \cdot t)$	$\omega = \frac{2\pi}{1}$ $\omega = 2\pi\ \text{rad/s}$ $y(t) = 0{,}001\text{sen}(2\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = 0{,}001\text{sen}(2\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

3.

a) A = 2 m

b) $\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s T = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\frac{5\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}$ $T = \frac{4\pi}{5\pi}$ $T = 0{,}8$ s

Resposta: O período é de 0,8 s.

d) Calcule a frequência das oscilações.

Dados	Fórmula	Resolução
T = 0,8 s f = ?	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{1}{0{,}8}$ $f = \frac{5}{4}$ Hz

Resposta: A frequência é de $\frac{5}{4}$ Hz.

Se acertou a todas questões está de parabéns. Caso não tenha acertado a todas, verifique de novo a resolução das questões que não acertou e tente mais uma vez. Mas se ainda tiver dificuldades, procure um colega do curso, amigo ou pode ir ao Centro de Recursos e discutir as suas dúvidas com o seu tutor.

Lição 3

1.

a)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 80 t = 320 A = 2 m y(t) = ?	$T = \frac{t}{n}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$T = \frac{320}{80}$ $T = 4\text{ s}$ $\omega = \frac{2\pi}{4}$ $\omega = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$ $y(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão $y(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

b)

Para: t = 0

$$y(0) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right)$$

$$y(0) = 2 \cdot \text{sen}(0)$$ [não se esqueça que: $\text{sen}(0) = 0$]

$$y(0) = 2 \cdot 0$$

$$y(0) = 0\text{ m}$$

Para: t =1

$$y(1) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$$

$$y(1) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{[não se esqueça que: } \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{]}$$

$$y(1) = 2 \cdot 1$$

$$y(1) = 2 \text{ m}$$

Para: t = 2

$$y(2) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$y(2) = 2 \cdot \text{sen}(\pi) \qquad \text{[não se esqueça que: } \text{sen}(\pi) = 0 \text{]}$$

$$y(2) = 2 \cdot 0$$

$$y(2) = 2 \text{ m}$$

Para: t = 3

$$y(3) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$$

$$y(3) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{[não se esqueça que: } \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \text{]}$$

$$y(3) = 2 \cdot (\text{-}1)$$

$$y(3) = -\ 2 \text{ m}$$

Para: t = 4

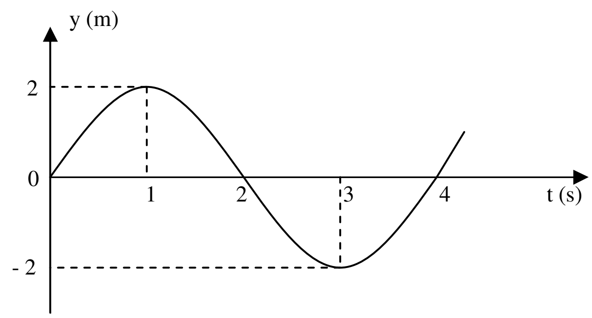
$$y(4) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$$

$$y(4) = 2 \cdot \text{sen}(2\pi) \qquad \text{[não se esqueça que: } \text{sen}(2\pi) = 0 \text{]}$$

$$y(4) = 2 \cdot 0$$

$$y(4) = 0 \text{ m}$$

y (m)	t (s)
0	0
2	1
0	2
-2	3
0	4



3.

A = 0,5 m

$$\frac{3T}{4} = 3 \Rightarrow T = \frac{4 \cdot 3}{3}$$
$$T = 4\,s$$

a) Calcule a.

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s T = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{4}$ $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica das oscilações é de $\frac{\pi}{2}$ rad/s.

b)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = 0{,}5\ m$ $\omega = \frac{\pi}{2}\ rad/s$ $y(t) = ?$	$y(t) = A sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = 0{,}5 sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela

expressão: $y(t) = 0{,}5 sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

Se acertou a todas questões está de parabéns. Caso não tenha acertado a todas, verifique de novo a resolução das questões que não acertou e tente mais uma vez. Mas se ainda tiver dificuldades, procure um colega do curso, amigo ou pode ir ao Centro de Recursos e discutir as suas dúvidas com o seu tutor.

Lição 4

1.

a) A = 1 m

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 10 t = 120 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{120}{10}$ $T = 12\,\text{s}$

Resposta: O período das oscilações é de 12 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 12 s ω = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{12}$ $\omega = \frac{\pi}{6}\,\text{rad/s}$

Resposta: A frequência cíclica é de $\frac{\pi}{6}\,\text{rad/s}$.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 1 m $\omega = \frac{\pi}{6}\,\text{rad/s}$ v(t) = ?	$v(t) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t$	$v(t) = 1\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right.$ $v(t) = \frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão: $v(t) = \frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$ em unidades do SI.

2.

a) $v_{max} = 9 \cdot \pi$ m/s

b) $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$v_{max} = 9\pi$ m/s $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s $A = ?$	$v_{max} = A \cdot \omega$	$9 \cdot \pi = A \cdot \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow A = \frac{9 \cdot \pi \cdot 3}{\pi}$ $\Rightarrow A = 27$ m

Resposta: A amplitude das oscilações é de 27 m.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s $A = 27$ m	$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$y(t) = 27 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = 27 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

Lição 5

1.

a) A = 5 m

b)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 100 t = 20 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{20}{100}$ $T = \frac{1}{5}$ s

Resposta: O período é de $\frac{1}{5}$ s .

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = \frac{1}{5}$ s ω = ?	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}}$ $\omega = 2\pi \cdot 5$ $\omega = 10\pi$ rad/s

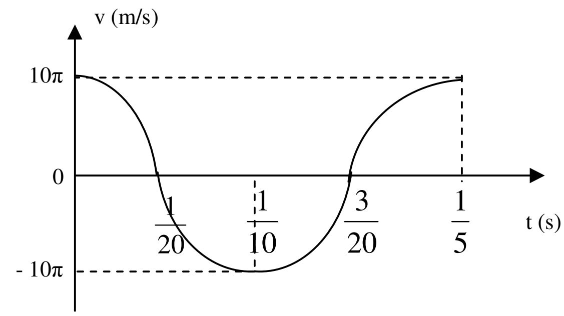
Resposta: A frequência cíclica é de 10π rad/s

d)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 5 m $\omega = 10\pi$ rad/s v (t) = ?	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = 5 \cdot 10\pi \cdot \cos(10\pi \cdot$ $v(t) = 50\pi \cdot \cos(10\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão: $v(t) = 50\pi \cdot \cos(10\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

e)



f)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 5 m $\omega = 10\pi$ rad/s y (t) = ?	$y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = 5 \cdot sen(10\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = 5 \cdot sen(10\pi \cdot t)$ em unidades do SI.

2.

a) $V_{max} = 2\pi$ rad/s

b)

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 3 \cdot 2$$
$$\Rightarrow T = 6\,s$$

Resposta: O período é de 6 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 6\ s$ $\omega = ?$	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$\omega = \dfrac{2\pi}{6}$ $\omega = \dfrac{\pi}{3}\,rad/s$

Resposta: A frequência cíclica é de $\dfrac{\pi}{3}\,rad/s$.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$V_{max} = 2\pi\ rad/s$ $\omega = \dfrac{\pi}{3}\,rad/s$ $A = ?$	$v_{max} = A \cdot \omega$	$2\pi = A \cdot \dfrac{\pi}{3}$ $A = \dfrac{2\pi \cdot 3}{\pi}$ $A = 6\ m$

Resposta: A amplitude é de 6m.

e)

Dados	Fórmula	Reso ução
$A = 6\ m$ $\omega = \dfrac{\pi}{3}\,rad/s$ $v\ (t) = ?$	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = 6 \cdot \dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot t\right)$ $v(t) = 2\pi \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão: $v(t) = 2\pi \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

f)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = 6\ m$ $\omega = \frac{\pi}{3} rad/s$ $v\ (t) = ?$	$y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = 6 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão: $y(t) = 6 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

Lição 6

1.

a) A = 20m

b)

Dados	Fórmula	Resolução
$n = 10$ $t = 20\ s$ $T = ?$	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{20}{10}$ $T = 2\ s$

Resposta: O período é de 2 s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$T = 2\ s$ $\omega = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{2} rad/s$ $\omega = \pi rad/s$

Resposta: A frequência cíclica é de $\omega = \pi rad/s$.

d)

Dados	Fórmul	Resolução
$A = 0.2$ m $\omega = \pi \text{rad/s}$ $a(t) = ?$	$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$a(t) = -(\pi)^2 \cdot 0.2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$ $a(t) = -\pi^2 \cdot 0.2 \cdot \text{sen}(\pi t)$ $a(t) = -0.2\pi^2 \cdot \text{sen}(\pi t)$

Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela expressão $a(t) = -0.2\pi^2 \cdot \text{sen}(\pi t)$ em unidades do SI.

2.

a) $a_{max} = 9\pi^2 \text{ m/s}^2$

b) $\omega = \pi \text{rad/s}$

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$\omega = \pi \text{rad/s}$ $T = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\pi = \frac{2\pi}{T}$ $T = 2$ s

Resposta: O período é de 2 s.

d)

Dados	Fórmula	Resolução
$a_{max} = 9\pi^2 \text{ m/s}^2$ $\omega = \pi \text{rad/s}$ $A = ?$	$a_{max} = \omega^2 \cdot A$	$9\pi^2 = (\pi)^2 \cdot A$ $A = 9$ m

Resposta: A amplitude é de 9 m.

e)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 9 m $\omega = \pi$rad/s y (t) = ?	$y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = 9 \cdot sen(\pi t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão $y(t) = 9 \cdot sen(\pi t)$ em unidades do SI.

f) Escreva a equação da velocidade em função do tempo para as oscilações efectuadas pelo corpo oscilante.

Dados	Fórmula	Resolução
A = 9 m $\omega = \pi$rad/s v (t) = ?	$v(t) = \omega \cdot A \cdot cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = \pi \cdot 9 \cdot cos(\pi t)$ $v(t) = 9\pi \cdot cos(\pi t)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão $v(t) = 9\pi \cdot cos(\pi t)$ em unidades do SI.

Lição 7

1.

a)

Dados	Fórmula	Resolução
n = 5 t = 25 s T = ?	$T = \frac{t}{n}$	$T = \frac{25}{5}$ $T = 5\,s$

Resposta: O período é de 5 s.

b)

Dados	Fórmula	Resolução
T = 5 s $\omega = ?$	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$\omega = \dfrac{2\pi}{5}$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de $\dfrac{2\pi}{5}$ rad/s.

c)

Dados	Fórmula	Resolução
A = 5 m $\omega = \dfrac{2\pi}{5}$ rad/s a (t) = ?	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)$	$a(t) = -5 \cdot \left(\dfrac{2\pi}{5}\right)^2 \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot t\right)$ $a(t) = -5 \cdot \dfrac{4\pi^2}{25} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot t\right)$ $a(t) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot t\right)$

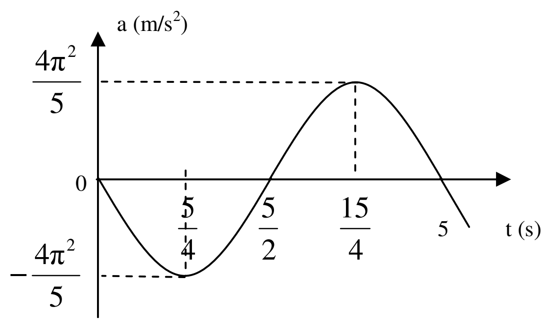
Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela expressão $a(t) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot t\right)$ em unidades do SI.

d)

a (m/s²)	t (s)
$a(0) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot 0\right) \Rightarrow a(0) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen(0)$ $a(0) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot 0 \Rightarrow a(0) = 0$	$0 \cdot T = 0 \cdot 5 = 0$
$a\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot \dfrac{5}{4}\right) \Rightarrow a\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ $a\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot 1 \Rightarrow a\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5}$	$0 \cdot \dfrac{T}{4} = \dfrac{5}{4}$
$a\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen\left(\dfrac{2\pi}{5} \cdot \dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow a\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot sen(\pi)$ $a\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{4\pi^2}{5} \cdot 0 \Rightarrow a\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$	$0 \cdot \dfrac{T}{2} = \dfrac{5}{2}$

$a\left(\frac{15}{4}\right)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{15}{4}\right)\Rightarrow a\left(\frac{15}{4}\right)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $a\left(\frac{15}{4}\right)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot(-1)\Rightarrow a\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{4\pi^2}{5}$	$0\cdot\frac{3T}{4}=\frac{3\cdot5}{4}=\frac{15}{4}$
$a(5)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\cdot5\right)\Rightarrow a(5)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot\text{sen}(2\pi)$ $a(5)=-\frac{4\pi^2}{5}\cdot0\Rightarrow a(5)=0$	$1\cdot T=1\cdot5=5$

Assim o gráfico da aceleração em função do tempo será representado pela linha sinusoidal seguinte.



2.

a) $a_{max} = 4\pi^2 \text{ m/s}^2$

b)

$$\frac{1}{4}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\frac{2}{4}$$
$$T=\frac{1}{2}\text{s}$$

c)

Dados	Fórmula	Resolução
$T=\frac{1}{2}\text{s}$ $\omega = ?$	$\omega=\frac{2\pi}{T}$	$\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$ $\omega=2\pi\cdot2$ $\omega=4\pi$ rad/s

Resposta: A frequência cíclica é de 4π rad/s .

d) Calcule a amplitude das oscilações.

Dados	Fórmula	Resolução
$a_{max} = 4\pi^2$ m/s^2 $\omega = 4\pi$ rad/s A = ?	$a_{max} = A \cdot \omega^2$	$4\pi^2 = A \cdot (4\pi)^2$ $4\pi^2 = A \cdot 16\pi^2$ $A = \frac{4\pi^2}{16\pi^2}$ $A = \frac{1}{4}$ m

Resposta: A amplitude é de $\frac{1}{4}$ m .

e)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4}$ m $\omega = 4\pi$ rad/s a (t) = ?	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t)$	$a(t) = -\frac{1}{4} \cdot (4\pi)^2 \cdot sen(4\pi \cdot t)$ $a(t) = -\frac{1}{4} \cdot 16\pi^2 \cdot sen(4\pi \cdot t)$ $a(t) = -4\pi^2 \cdot sen(4\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da aceleração em função do tempo é dada pela expressão $a(t) = -4\pi^2 \cdot sen(4\pi \cdot t)$.

f)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4}$ m $\omega = 4\pi$ rad/s v (t) = ?	$v(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t)$	$v(t) = \frac{1}{4} \cdot (4\pi) \cdot cos(4\pi \cdot t)$ $v(t) = \pi \cdot cos(4\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da velocidade em função do tempo é dada pela expressão $v(t) = \pi \cdot cos(4\pi \cdot t)$.

g)

Dados	Fórmula	Resolução
$A = \frac{1}{4}\,m$ $\omega = 4\pi$ rad/s y (t) = ?	$y(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t)$	$y(t) = \frac{1}{4} \cdot sen(4\pi \cdot t)$

Resposta: A equação da elongação em função do tempo é dada pela expressão $y(t) = \frac{1}{4} \cdot sen(4\pi \cdot t)$.

Lição 8

1.

a) Y, porque tem menor comprimento.

b) Aumenta porque a aceleração de gravidde é menor.

2.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot 3.14\sqrt{\frac{10}{10}} \Rightarrow T = 6.28\,s$$

Lição 9

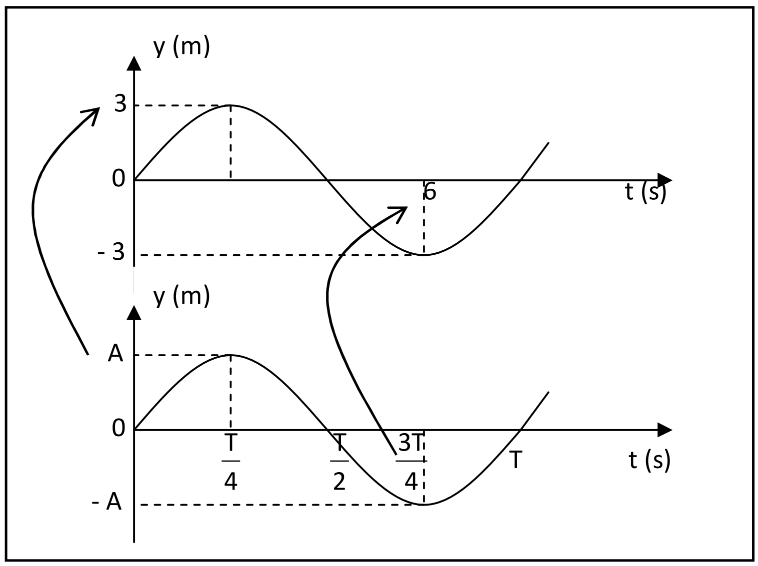
a) Z, porque tem maior constante elática.

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot 3.14\sqrt{\frac{4}{100}} \Rightarrow T = 1.256\,s$

Soluções do teste de preparação de final de módulo

1.Para resolver esta questão temos que comparar o gráfico dado com o gráfico do nosso resumo.

a) Repare que no lugar da amplitude "A" temos o valor "3". Por isso esse é o valor da amplitude. Por isso a resposta é: A = 3 m



b) Repare que no gráfico o valor "6" foi colocado no lugar de $\frac{3T}{4}$.

Por isso vamos escrever:

$$\frac{3T}{4} = 6 \Rightarrow T = \frac{6 \cdot 4}{3} \Rightarrow\Rightarrow T = 8 \text{ s}$$

c)

$$f = \frac{1}{8} \Rightarrow f = 0{,}125 \text{ Hz}$$

d) Também temos que recorrer à fórmula que já conhecemos.

$$\omega = \frac{2\pi}{8} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

e)

$$y(t) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$$

2.

a) $v_{max} = 4\pi$ rad/s

b)

$$\frac{T}{2} = 4 \Rightarrow T = 2 \cdot 4 \Rightarrow T = 8 \text{ s}$$

c)

$$\omega = \frac{2\pi}{8} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

d)

$$4 \cdot \pi = A \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4}{\pi} \Rightarrow A = 16 \text{ m}$$

e)

$$v(t) = 16 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right) \Rightarrow v(t) = 4\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$$

f)

$$y(t) = 16 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$$

3.

a) $a_{max} = \pi^2 \text{rad/s}$

b)

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow T = \frac{1 \cdot 4}{4} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

c)

$$\omega = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

d)

$$\pi^2 = A \cdot (2\pi)^2 \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{4\pi^2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \text{ m}$$

e)

$$a(t) = -\frac{1}{4} \cdot (2\pi)^2 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t) \Rightarrow a(t) = -\pi^2 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t)$$

f)

$$y(t) = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2\pi \cdot t)$$

g)

$$v(t) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t) \Rightarrow v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot t)$$