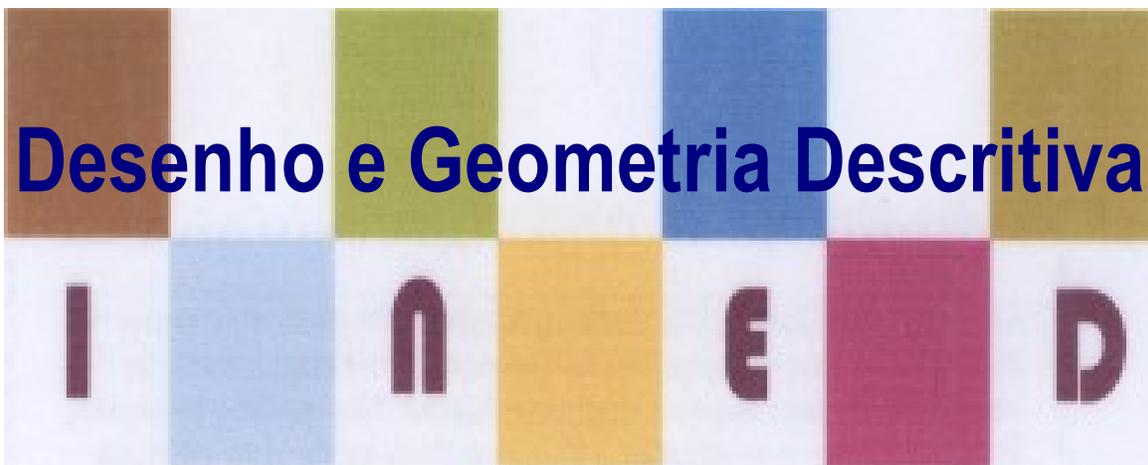


## MÓDULO 5

# Desenho e Geometria Descritiva



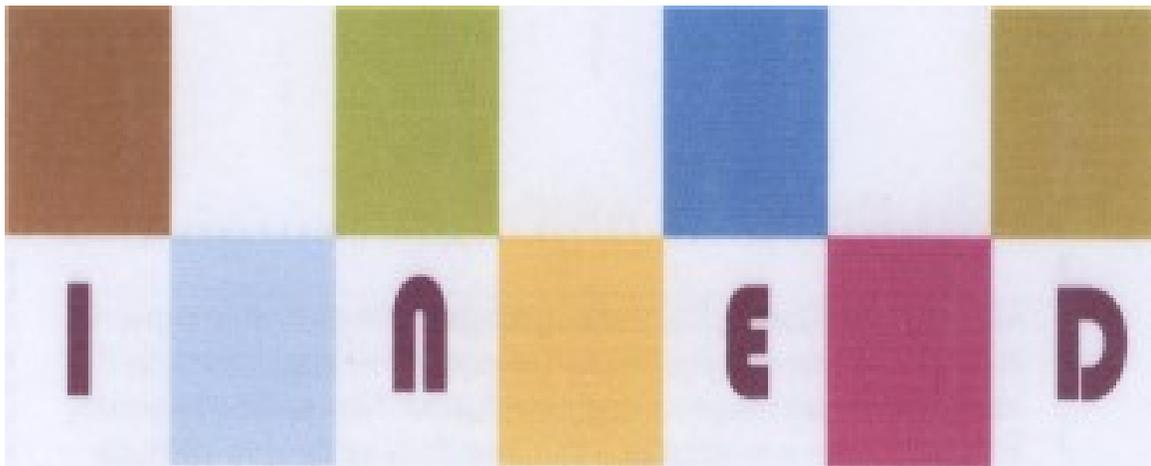
## INTERSECÇÕES DE DOIS PLANOS



# Direitos de autor

Este material é propriedade exclusiva do Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano da Republica de Moçambique. A sua reprodução é estritamente proibida e punível e nos termos da lei.

Respeite os nossos autores.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO**

**INSTITUTO DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO-INDE**

Av. 24 de Julho n 254 Maputo  
Moçambique

Fax: +2582149000 Tel. +25821490000

E-mail: [inde@inde.gov.mz](mailto:inde@inde.gov.mz)

Site da Internet: [www.mec.mz](http://www.mec.mz)



# Agradecimentos

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano e Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação deseja agradecer os abaixo mencionados pela sua contribuição na elaboração deste módulo:



# Conteúdos

<b>Acerca deste módulo</b>	<b>1</b>
Como está estruturado este módulo de DGD.....	1
<b>Visão geral do curso</b>	<b>3</b>
Boas vindas ao curso de ensino a distância de Desenho e Geometria Descritiva .....	3
MÓDULO 5 — Este curso é para você? .....	4
Objectivos de aprendizagem.....	4
Duração.....	4
Habilidades de aprendizagem .....	5
Necessita de ajuda?.....	5
Tarefas .....	5
Avaliações.....	6
<b>Organização deste módulo</b>	<b>7</b>
Ícones nas Margens.....	7
<b>Módulo 5</b>	<b>9</b>
Lição nº 1 .....	9
Introdução.....	9
Objectivos de aprendizagem.....	9
Duração.....	10
Intersecção de dois planos.....	10
Construção rigorosa.....	12
A- Intersecção entre os planos obliquo e projectante.....	13
B- Intersecção entre dois planos projectantes. ....	13
C- Intersecção entre os planos projectantes e rampa.....	14
D- Interseccao entre os planos de rampa.....	14
Resumo da Lição .....	16
Tarefas .....	17
Avaliações.....	18
<b>Módulo 5</b>	<b>19</b>
Lição nº 2.....	19
Introdução.....	19

Objectivos de aprendizagem.....	20
Duração.....	20
A- Intersecção de dois planos sendo um de nível com outro definido por rectas paralelas.....	21
Construção rigorosa.....	21
B- Intersecção de dois planos sendo um definido pelos traços e outro por rectas concorrentes.....	22
Construção rigorosa.....	22
C- Intersecção de dois planos definidos por rectas concorrentes e paralelas.....	23
Resumo da Lição .....	24
Tarefas .....	24
Avaliações.....	25
<b>Módulo 5</b> .....	<b>27</b>
Lição nº 3 .....	27
Introdução.....	27
Objectivos de aprendizagem.....	27
Duração.....	27
Intersecção de dois planos (casos particulares).....	28
Construção rigorosa.....	29
Construção rigorosa.....	31
Resumo da Lição .....	35
Tarefas .....	36
Avaliações.....	36
<b>Soluções</b> .....	<b>37</b>
Lição 1 .....	37
Lição 1.....	37
Lição 2.....	38
Lição 3.....	39
<b>Módulo 5 de Desenho e Geometria Descritiva</b> .....	<b>41</b>
Teste Preparação de Final de Módulo.....	41
Introdução.....	41
Teste 1 do Fim do módulo 3.....	42
Teste 2 do Fim do módulo 3.....	43
Teste 3 do Fim do módulo 3.....	44
Chave de Correção do Teste 1.....	45
Chave de Correção do Teste 2.....	47
Chave de Correção do Teste 3.....	49

## Acerca deste módulo

Módulo 5 de Desenho e Geometria Descritiva foi produzido pelo INDE. Todos módulos produzidos pelo INDE estão estruturados da mesma maneira, conforme delineado abaixo.

---

### Como está estruturado este módulo de DGD

#### A visão geral do curso

A visão geral do curso oferece-lhe uma introdução geral ao curso. A informação contida nesta visão geral do curso irá ajudar você a determinar:

- Se o curso é apropriado.
- O que você deverá conhecer de antemão.
- O que você pode esperar do curso.
- Quanto tempo irá investir para concluir o curso.

#### A visão geral também proporciona orientação acerca de:

- Habilidades de aprendizagem.
- Onde encontrar ajuda.
- Tarefas e avaliações ao longo do curso.
- Ícones de actividades.
- Lições.

Recomendamos insistentemente que você leia a visão geral cuidadosamente antes de iniciar o seu estudo.

## Conteúdo do curso

O curso está subdividido em módulos. E por sua vez este em lições, inclui:

- Uma introdução ao conteúdo da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade.
- Nova terminologia / Vocabulário de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Tarefas e/ou avaliações, conforme o caso.

## Recursos

Para aqueles que estão interessados em aprender mais acerca deste assunto, têm à sua disposição uma lista de recursos adicionais no fim deste módulo; tal como bibliografia, livros, artigos ou sites da Internet.

## Seu comentário

Depois da conclusão módulo agradecemos que você dedicasse um pouco do seu tempo para nos fornecer o seu *feedback* sobre qualquer aspecto deste curso. O seu *feedback* pode incluir comentários acerca de:

- Conteúdo e estrutura do curso.
- Materiais de leitura e recursos do curso.
- Tarefas do curso.
- Avaliações do curso.
- Duração do curso.
- Apoio geral durante o curso (tutores indicados, assistência técnica, etc.)

O seu *feedback* construtivo irá ajudar-nos a melhorar e otimizar este curso.

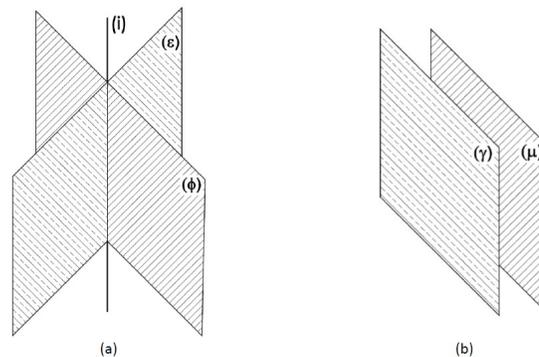
## Visão geral do curso

### Boas vindas ao curso de ensino a distância de Desenho e Geometria Descritiva

#### 1. INTRODUÇÃO

A intersecção de dois planos é uma linha recta e ela fica determinada se conhecermos dois pontos distintos da recta. Geralmente, a sua determinação é imediata, quando um dos planos é projectante, e noutros casos temos que recorrer a planos auxiliares.

Dois planos podem ser paralelos ou secantes. Enquanto dois planos paralelos não se interceptam, dois planos secantes se interceptam e sua intersecção sempre gera uma recta. Na Figura (a), os planos são secantes e a sua intersecção é a recta (i), enquanto figura (a) os planos não se interceptam porque são paralelos.



A recta formada pela intersecção de dois planos secantes nada mais é do que uma recta que pertence, simultaneamente, aos dois planos. Na verdade, a recta intersecção é a única recta comum a dois planos secantes. Conforme a regra de pertinência de recta e plano, uma recta pertence a um plano quando os seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano. Assim, a recta formada pela intersecção de dois planos deve ter seus traços sobre os traços de mesmo nome dos dois planos secantes. Em outras palavras, os traços da recta de intersecção encontram-se na intersecção dos traços de mesmo nome dos dois planos secantes.

---

## MÓDULO 5 — Este curso é para você?

Este curso destina-se a pessoas que tenham concluído a 10<sup>a</sup> classe ou equivalente.

---

### Objectivos de aprendizagem

Ao concluir o Modulo 4 de Desenho e Geometria Descritiva você será/deverá ser capaz de:



#### Objectivos

- *Interpretar* a intersecção.
- *Determinar* a intersecção de recta/plano e plano/plano.
- *Desenhar* a intersecção de uma recta com um plano.
- *Determinar* a intersecção de dois planos.
- *Determinar* a intersecção de três planos.
- *Desenhar* a os casos notáveis de intersecção.

---

### Duração



#### Quanto tempo?

Estão previstas 5 aulas para este módulo.

Para cada lição ira necessitar em média, cerca de 90 minutos para completar.

Recomendamos que resolve, pelo menos, duas lições por dia.

---

## Habilidades de aprendizagem



Estando já no 2º Ciclo do Ensino Secundário a sua forma de estudar será um pouco diferente do Ensino Secundário do 1º Ciclo:

Você escolherá o que quer estudar, você terá motivação pessoal para resolver os exercícios propostos e estará conciliando suas actividades de estudo com outras responsabilidades profissionais ou domésticas.

---

## Necessita de ajuda?



### Ajuda

Sempre que tiver duvidas ou dificuldades aconselham:

- Conversar com colegas e amigos para o esclarecimento;
- Contactar o centro de recursos junto ao tutor para superar as dúvidas;
- Consultar os materiais disponíveis no centro de recurso.

---

## Tarefas



### Trabalhos/Tarefas

Neste módulo tem em geral, no final de cada lição, pelo menos duas tarefas que resolvemos conjuntamente consigo, para que possa perceber melhor a execução dos exercício e outras que deves resolver sozinho sem consultar a solução no final do módulo.

---

## Avaliações



### Avaliações

No final de cada lição, após as tarefas, há uma ou duas avaliações que lhe ajudam a avaliar o seu progresso no estudo.

Aconselhamos a resolve-los sem consultar a solução, podendo fazê-lo no fim para determinar se assimilou a matéria ou não.

Quando concluir as avaliações propostas, devera se deslocar ao centro de recurso para realizar o teste de conclusão do módulo que lhe habilitara a passagem para o módulo seguinte.

A avaliação do final do módulo será corrigida pelo seu tutor;

A duração do teste de preparação para o final do módulo e do próprio teste de final de módulo será de 90 minutos.

## Organização deste módulo

### Ícones nas Margens

Ao trabalhar com este módulo, você observará o frequente estes ícones da imagem. Estes ícones servem sinal de uma parte particular de texto, ou de uma tarefa nova ou ainda, de mudança na actividade; foram incluídos para ajudar-lhe na percepção dos conteúdos do módulo. Nós sugerimos que você se familiarize com os ícones e o seu significado antes de começar seu estudo.

 Actividade	 Avaliação	 Tarefa	 Estudo de caso
 Discussão	 Actividade de grupo	 Ajuda	 Note!
 Objectivos de aprendizagem	 Leitura	 Reflexão	 Habilidades de aprendizagem
 Resumo	 Terminologia	 Tempo	 Dica



## Módulo 5

### Lição nº 1

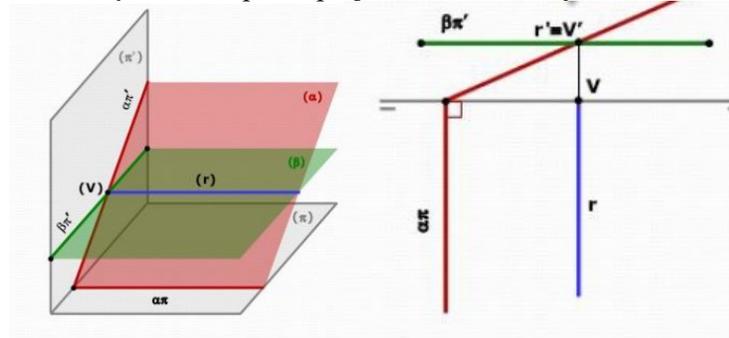
#### Intersecção de dois planos

##### Introdução

Dois planos que se intersectam fazem-no segundo uma recta.

A determinação, em projecções, da recta de intersecção de dois planos vai depender da forma como os dois planos estão definidos. Contudo, em qualquer dos casos, temos de ter em atenção que a recta de intersecção pertence aos dois planos, o que implica que ou os traços da recta estão simultaneamente nos traços dos planos (ponto de intersecção dos traços do mesmo nome) ou temos de determinar dois pontos da recta comum aos dois planos (caso em que os planos não são definidos pelos seus traços, ou então os traços não se cruzam no plano do papel).

Ex: Intersecção de um plano projectante com um plano de Nível.



### Objectivos de aprendizagem



#### Objectivos

Ao concluir o lição você será/deverá ser capaz de:

- *Desenhar* as projecções da intersecção de dois planos;
- *Representar* pontos notáveis na recta de intersecção;
- Determinar a intersecção entre diferentes planos.

## Duração



Neste módulo estão previstos 5 aulas de 90 minutos.

Quanto tempo?

## Conteúdos

.....

### Visão geral do curso

- Método geral da determinação da intersecção de dois planos.
- *Intersecção entre planos oblíquos.*
- *Intersecção ente planos projectantes;*
- Intersecção entre planos projectantes e oblíquos;
- *Intersecção entre planos projectantes e rampa.*
- *Intersecção entre planos de rampa.*

## Intersecção de dois planos

Chamam-se intersecção de dois planos a recta de contacto entre esses planos. Eles se intersectam se não forem paralelos.

### ***Determinação da recta de intersecção de dois planos***

#### **Método geral**

Existe um método geral para determinar a intersecção de dois planos e que consiste no seguinte:

Intersectamos ambos os planos por um terceiro plano projectante (plano Auxiliar).

Obtemos duas rectas, uma de um plano e outra do outro, mas ambas do plano auxiliar. Estas duas rectas, intersectando-se e vão determinar um ponto que é dos dois planos, logo da recta de intersecção.

Repetindo o processo, com outro plano auxiliar, obtemos um segundo ponto, e assim fica definida a recta de intersecção.

Este processo acarreta muitos traços, deve ser feito com cuidado e atenção, porém, na maioria dos casos o problema tem resoluções directas

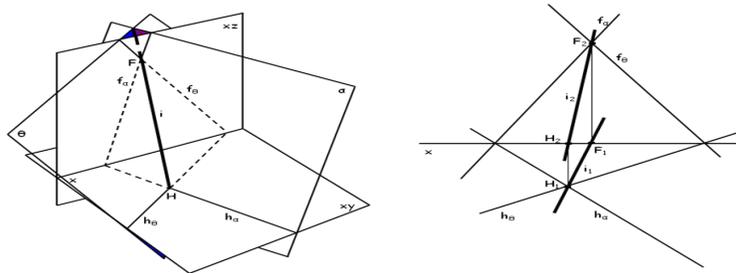
e simples e só em casos em que ambos os planos são definidos por rectas é que temos de recorrer ao método geral. Noutros casos um só plano auxiliar é suficiente e noutros nenhum.

### Planos definidos pelos seus traço se não projectantes

Os traços cruzam-se no limite do papel.

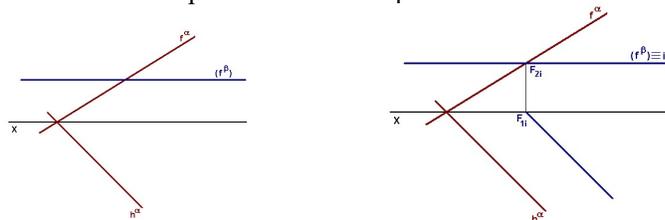
Neste caso, como a recta  $i$  de intersecção tem de ter os seus traços sobre os traços homólogos do plano (uma vez que pertence aos dois planos) os traços de  $i$  têm de estar sobre o cruzamento dos traços do mesmo nome do plano.

A intenção é determinar as projecções da recta de intersecção  $i$ , recta de intersecção entre dois planos oblíquos. Como a recta  $i$  pertence aos dois planos, os traços da recta  $i$  situam-se na intersecção dos traços dos dois planos, como mostra a imagem.



### Plano Obliquo com plano de nível ou de frente

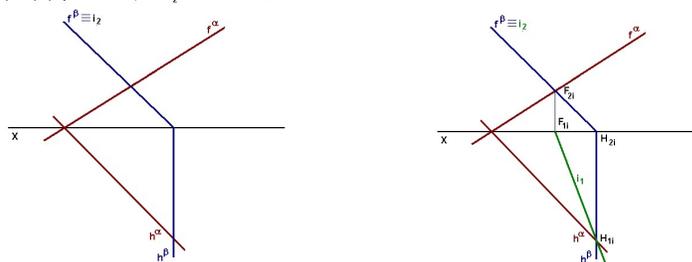
Neste caso uma das projecções de  $i$  é conhecida, logo só precisamos de fazer  $i$  pertencer ao outro plano.



### Plano Obliquo com um plano de topo ou vertical

Também uma das projecções é já conhecida, logo temos apenas de determinar a outra.

A intersecção entre estes dois planos pode dar origem a duas situações diferentes. Quando ambos os traços se cruzam resulta uma recta oblíqua; quando os traços frontais são paralelos resulta uma recta frontal.

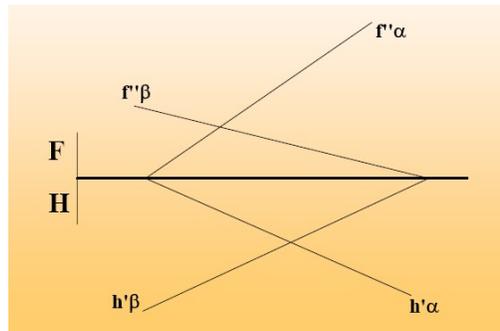


## Método geral

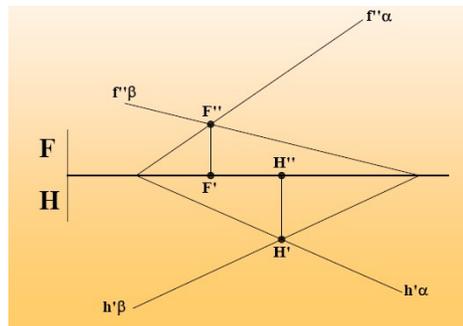
## Construção rigorosa

1. Sendo dados dois planos definidos pelos seus traços, determine a intersecção. Os planos são oblíquos.

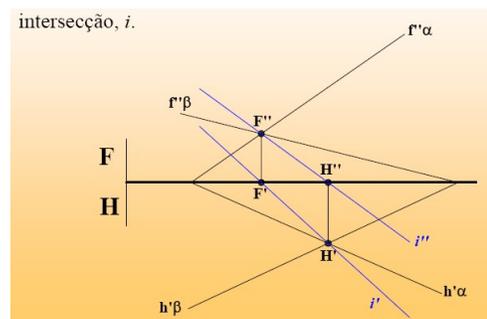
Represente as projecções dos planos na linha de terra ou eixo x, sendo um com (a.d.) e outro com (a.e.) intersectando traços do mesmo nome.



Traça-se linhas auxiliares perpendiculares que partem dos pontos F e H ate a LT, para determinar as projecções contrárias.



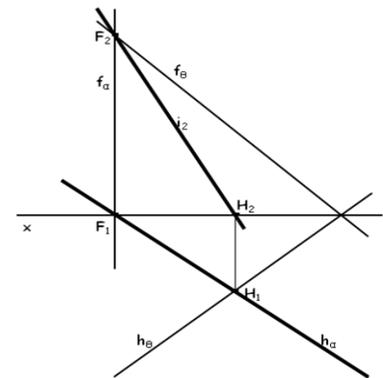
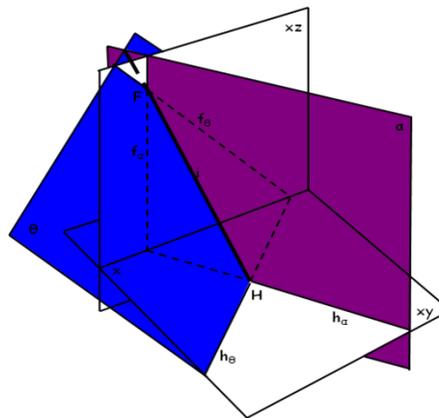
Unindo os pontos por uma recta teremos as projecções da recta de intersecção.



Intersecção de planos oblíquos

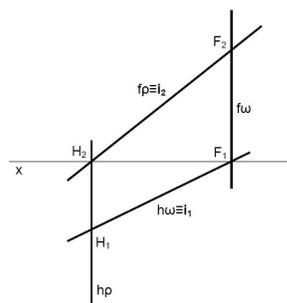
## A- Intersecção entre os planos oblíquo e projectante.

1. Considere dois planos definidos pelos seus traços, vertical e oblíquo.
2. Para determinar a sua intersecção, basta colocar os planos na mesma no eixo x, e intersectar os traços do mesmo nome. A recta será definida unindo as projecções dos dois pontos de intersecção dos planos.
3. Uma das projecções determina-se unindo as projecções homónimas do plano e a outra coincide com o traço do plano projectante.



## B- Intersecção entre dois planos projectantes.

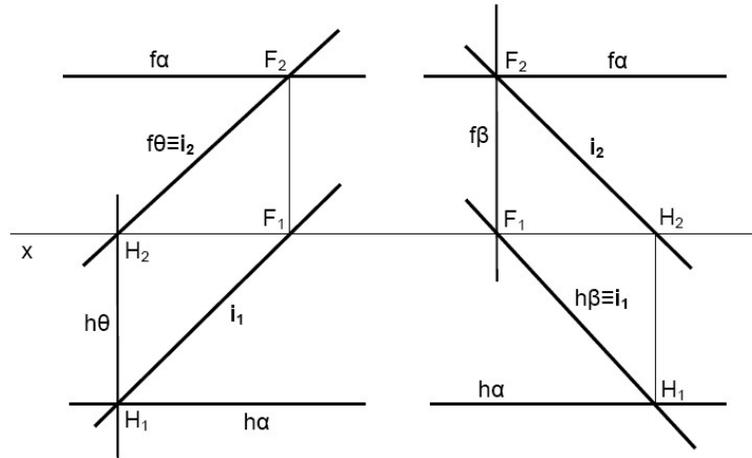
Considere os planos definidos pelos seus traços, sendo um de topo e outro vertical. A determinação desta intersecção resulta numa recta cujas projecções coincidem com os traços do mesmo nome dos planos.



### C- Intersecção entre os planos projectantes e rampa.

Considere os planos definidos pelos seus traços, sendo um de topo e outro de rampa.

Para determinar a sua intersecção, coloca-se os planos na mesma LT e intersectam-se os traços do mesmo nome. A recta será definida unindo as projecções das projecções dos dois pontos de intersecção dos planos.



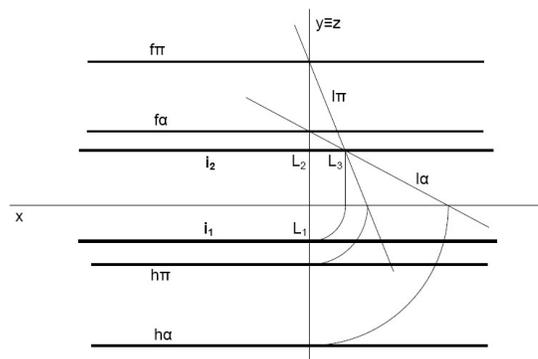
### D- Intersecção entre os planos de rampa

Recorrendo aos traços laterais

Considere os planos definidos pelos seus traços.

Para determinar a sua intersecção, coloca-se os traços dos planos alternados em relação a LT e intersectam-se os traços do mesmo nome usando um outro plano auxiliar.

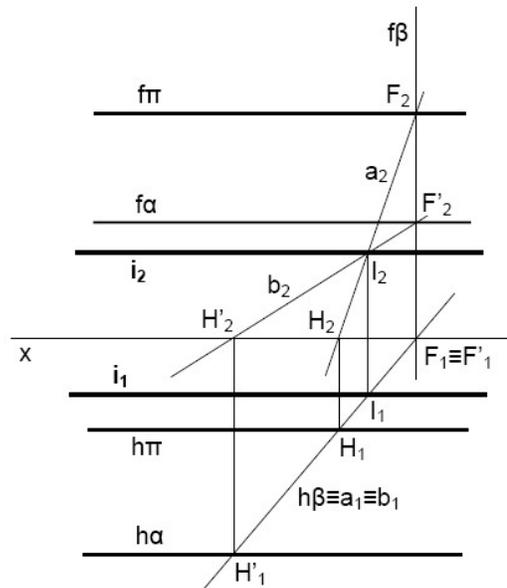
Determina-se a intersecção do plano auxiliar com cada um dos planos dados que será duas rectas concorrentes no ponto  $i$ . A recta de intersecção será taçada, passando pela projecção vertical e horizontal de  $i$ .



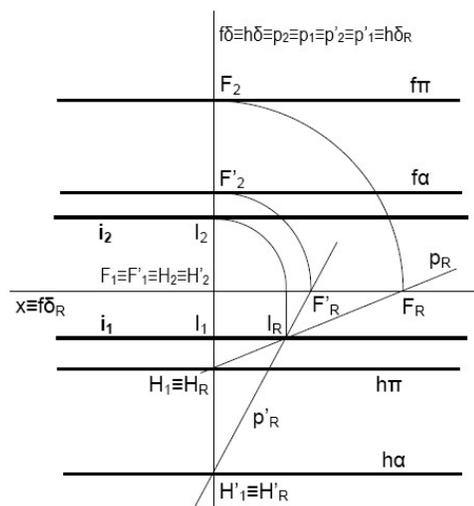
### Intersecção entre planos de rampa, recorrendo a planos auxiliares

Utilizando um plano auxiliar (aqui um vertical) cujos traços intersectem os dos planos de rampa, obtém-se também a recta de intersecção. Começa-se por determinar as rectas de intersecção desse plano com os de rampa (rectas a e b na primeira situação,). Pelo ponto I, onde essas rectas se cruzam, passa a recta de intersecção i.

Normalmente utilizam-se planos projectantes, mas também se poderia utilizar um plano oblíquo.



Utilizando um plano auxiliar (de perfil) cujos traços intersectem os dos planos de rampa, obtém-se também a recta de intersecção. Começa-se por determinar as rectas de intersecção desse plano com os de rampa (rectas p e p'). Pelo ponto I, onde essas rectas se cruzam, passa a recta de intersecção i. De notar que, se rebateu o plano de perfil para se determinar esse ponto.



---

## Resumo da Lição



### Resumo

➤ Nesta lição você aprendeu

E conclui-se que a intersecção de dois planos é uma recta que resulta da determinação de dois pontos comuns aos dois planos.

Em Geometria Descritiva é a **intersecção entre dois elementos**.  
Intersecções entre elementos combinados de planos, rectas e até sólidos...

Considerando elementos distintos entre rectas e planos:

- **Plano** com **plano** = recta
- **Recta** com **recta** = ponto
- **Plano** com **recta** = ponto

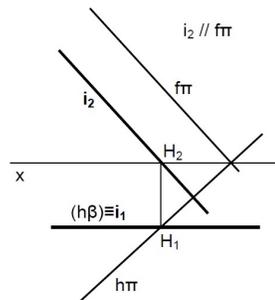
# Tarefas



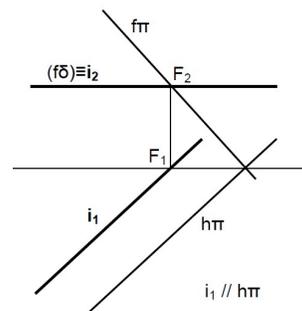
## Trabalhos/Tarefas

Propomos a resolução de alguns exercícios para a consolidação do que acabou de aprender.

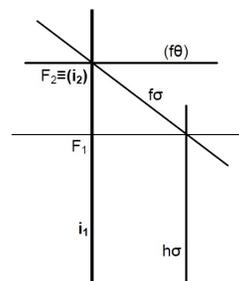
1. Determine a intersecção de um plano frontal com 2 de afastamento com um plano oblíquo cujos traços horizontal e frontal fazem respectivamente  $40^\circ$  (a.e.) e  $55^\circ$  (a.e.).



2. Determine a intersecção dos planos q e y. O plano q é oblíquo e os seus traços horizontal e frontal fazem respectivamente  $45^\circ$  (a.e.) e  $45^\circ$  (a.e.). O plano y é horizontal com 3 de cota.



3. Determine a intersecção de um plano p de topo que faz  $45^\circ$  (a.e.) com um plano, horizontal com 4 de cota.



---

## Avaliações



### Avaliações

1. Determine a intersecção de dois planos oblíquos definidos pelos seus traços.
2. Determine a intersecção de dois planos projectantes sendo um vertical e outro de topo. Ambos definidos pelos seus traços.
3. Determine a intersecção de um plano de rampa com um plano vertical definido pelos seus
4. Determine a intersecção de um plano de rampa com um plano de perfil.

## Módulo 5

### Lição nº 2

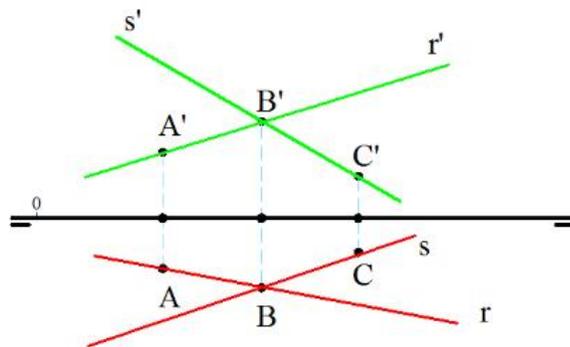
#### Intersecção de dois planos definidos por rectas:

- Concorrentes;
- Paralelas.

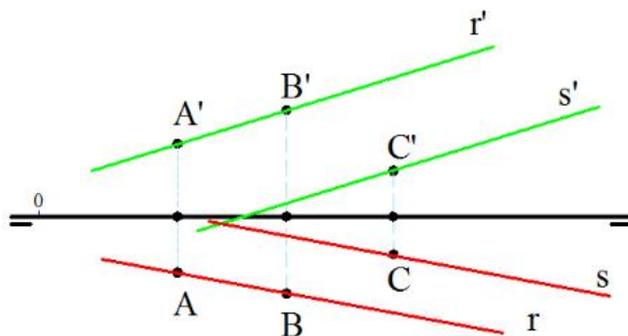
#### Introdução

A intersecção de dois planos não só acontece com os planos definidos pelos seus traços, mas também definido por rectas. Deve ter como condição básica, rectas coplanares ou seja, rectas que pertencem ao mesmo plano.

Plano definido por duas rectas concorrentes:



Plano definido por duas rectas paralelas:



---

## Objectivos de aprendizagem



### Objectivos

Ao concluir o lição você será/deverá ser capaz de:

- *Desenhar as projecções das rectas que definem o plano;*
- *Determinar a intersecção de dois planos definido por duas rectas paralela;*
- *Determinar a intersecção de dois planos definido por duas rectas concorrentes;*
- *Determinar a intersecção de dois planos definido por duas rectas paralela e concorrentes.*

---

## Duração



### Quanto tempo?

Esta lição tem a duração de 90 minutos.

## Conteúdos

.....

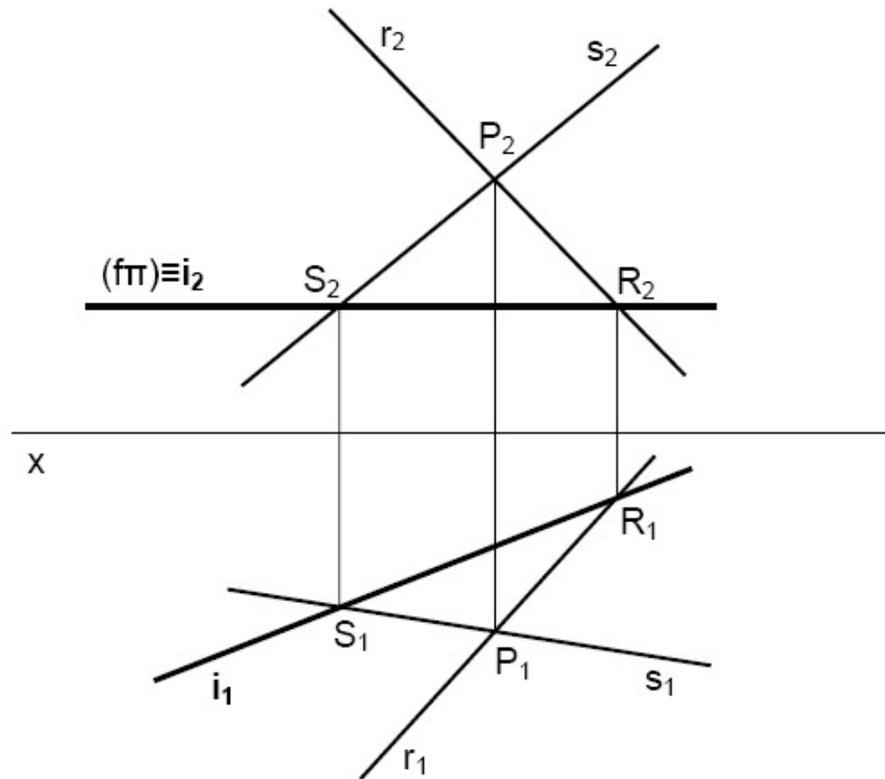
### Visão geral do curso

---

- intersecção de dois planos definidos por rectas.
- *Determinação de pontos da recta de intersecção*

## A- Intersecção de dois planos sendo um de nível com outro definido por rectas paralelas

Estas intersectam os planos projectantes nos pontos R e S, que definem a recta  $i$ .

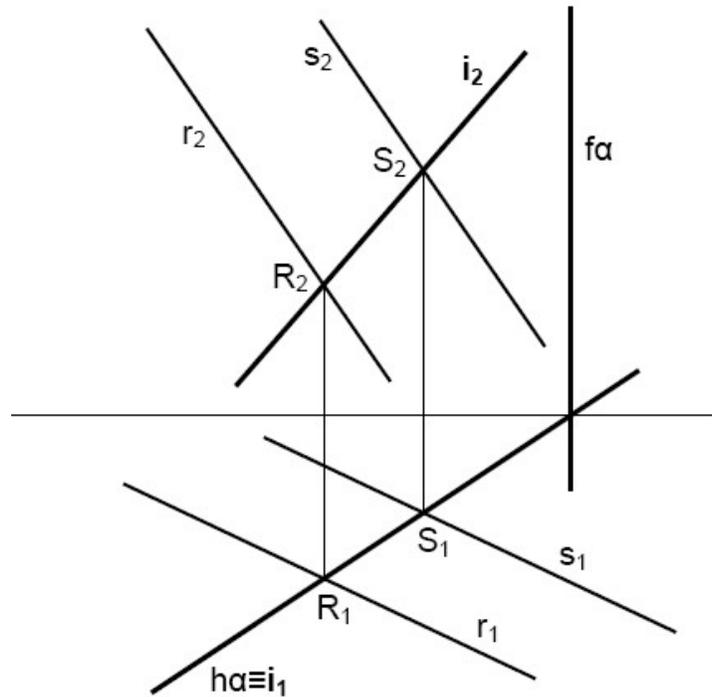


### Construção rigorosa

1. Começa por traçar as projecções dos planos definidos por rectas
2. Traça-se o plano auxiliar de nível que deve intersectar os dois planos e determina-se a intersecção deste com os planos.
3. Quando as rectas de intersecção do plano auxiliar com os planos dados cruzam-se determinam um dos pontos da intersecção procurada.
4. Repete-se a construção do plano auxiliar e assim teremos o outro ponto, que unidos determinam a intersecção.

## B- Intersecção de dois planos sendo um definido pelos traços e outro por rectas concorrentes

Estas intersectam os planos projectantes nos pontos R e S, que definem a recta i.



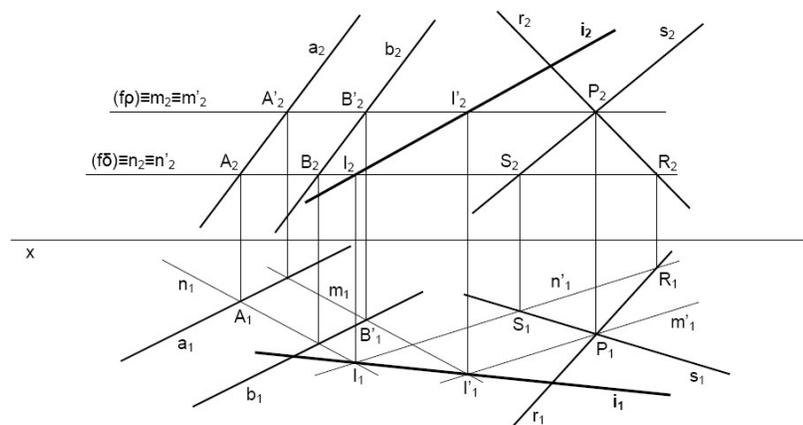
### Construção rigorosa

1. Começa por traçar as projecções dos planos definidos por rectas.
2. Traça-se o plano auxiliar de nível que deve intersectar os dois planos e determina-se a intersecção deste com os planos.
3. Quando as rectas de intersecção do plano auxiliar com os planos dados cruzam-se determinam um dos pontos da intersecção procurada.
4. Repete-se a construção do plano auxiliar e assim teremos o outro ponto, que unidos determinam a intersecção.

## C- Intersecção de dois planos definidos por rectas concorrentes e paralelas

Considera-se para tal dois planos alfa e beta não definida pelos seus traços. O plano alfa é definido pelas rectas **a** e **b**, paralelas ente si e o plano beta, pelas rectas **r** e **s** concorrentes.

Usamos um plano auxiliar de nível definido pelos seus traços para simplificarmos a resolução do exercício. Determinamos a intersecção do plano auxiliar com as rectas que definem os planos e quando as rectas de intersecção destes intersectam as projecções contrárias determinam os pontos por onde passara a recta de intersecção dos planos.



Aplicando planos auxiliares horizontais surgem quatro rectas horizontais que se cruzam duas a duas nos pontos I e I', por onde passa a recta i.

### CONCLUSAO:

#### Intersecção de dois Planos

O tipo de plano ou os dados do problema podem levar à não utilização ou à utilização parcial do método geral.

**Caso 1:** Se o problema não dá directamente nenhum ponto comum aos dois planos, utilizam-se dois planos auxiliares (Método Geral);

**Caso 2:** Se o problema nos dá directamente um só ponto comum aos dois planos, utiliza-se um plano auxiliar;

**Caso 3:** Se o problema nos dá directamente dois pontos comuns aos dois planos não se utiliza nenhum plano auxiliar;

## Resumo da Lição



### Resumo

Nesta lição você aprendeu:

- Determinar a intersecção de dois planos definidos pelos seus traços.
- Usar os planos auxiliares como método de determinação.

## Tarefas



### Trabalhos/Tarefas

Propomos a resolução de alguns exercícios para a consolidação do que acabou de aprender.

1. Determine a recta de intersecção de dois planos oblíquos  $\theta$  e  $\beta$  definidos por duas rectas concorrentes e duas paralelas. O plano  $\theta$  está definido por duas rectas oblíquas e paralelas,  $r$  e  $s$ . A recta  $r$  contém o ponto  $A (4;2;2)$  e  $B (2;1;4)$  e a recta  $s$  contém o ponto  $C (3;4;1)$ . O plano  $\beta$  está definido por duas rectas  $a$  e  $b$ , concorrentes em  $D (4;2;3)$ . A recta  $a$  é horizontal e faz, com o plano vertical de projecção  $40^\circ$  (a.e.). A recta  $b$  é de frente e faz, com o plano horizontal de projecção um ângulo de  $45^\circ$  (a.e.)
2. Determine a intersecção de dois planos oblíquos  $\pi$  e  $\alpha$  definidos por duas rectas paralelas. O plano  $\pi$  é definido pelas rectas  $a$  e  $b$  que são oblíquas e paralelas, fazem com a  $LT$  ângulos de  $45^\circ$  (a.d.) e o plano  $\alpha$  é definido por duas rectas também oblíquas e paralelas, as projecções verticais e horizontais fazem  $30^\circ$  e  $6^\circ$  com a  $LT$  (a.e.)

---

## Avaliações



### Avaliações

1. Determine a intersecção de dois planos sendo um oblíquo e outro projectante, ambos definidos pelos seus traços.
2. Determine a intersecção de dois planos oblíquos definido pelos seus trácios.
3. Determine a intersecção de dois planos oblíquos definido pelos seus traços com a mesma abertura.



## Módulo 5

---

### Lição nº 3

#### Casos notáveis da determinação da intersecção de dois planos.

#### Introdução

Nesta aula vamos estudar alguns casos curiosos de determinação da intersecção de planos que iram merecer uma particular resolução.

---

### Objectivos de aprendizagem



#### Objectivos

Ao concluir a lição, você será ou deverá ser capaz de:

- *Determinar a intersecção de dois planos cujo traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho;*
- *Determinar a intersecção de dois planos que todos traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho;*
- *Determinar a intersecção de dois planos projectantes de amplitudes diferentes mas com a mesma abertura;*
- *Determinar a intersecção de dois planos oblíquos de aberturas diferentes mas de ângulos iguais.*

---

### Duração



#### Quanto tempo?

Esta aula tem a duração de 90 minutos.

# Conteúdos

.....

## Visão geral do curso

- Intersecção de dois planos cujos dois traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho;
- Intersecção de dois planos que todos traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho;
- Intersecção de dois planos projectantes que amplitudes diferentes mas com a mesma abertura;
- Intersecção de dois planos oblíquos de aberturas diferentes mas de ângulos iguais.

## Intersecção de dois planos (casos particulares)

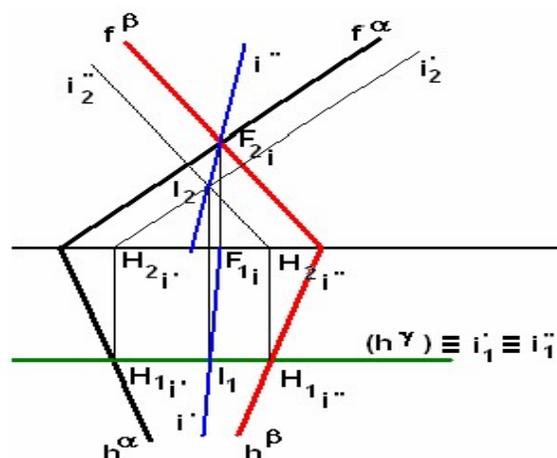
### A-Intersecção de dois planos cujos dois traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho.

Só dois dos traços se cruzam dentro dos limites do desenho

Neste caso podemos de imediato determinar um dos traços da recta de Intersecção.

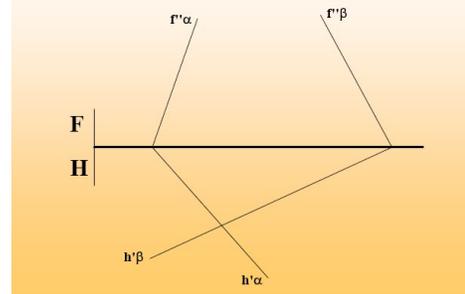
Para determinar outro ponto da recta de intersecção recorreremos a um plano auxiliar, projectante, que vamos intersectar com cada um dos dois planos que pretendemos intersectar.

Vamos obter duas rectas que por sua vez, intersectando-se, vão determinar um ponto da recta de intersecção, que era o que pretendíamos.

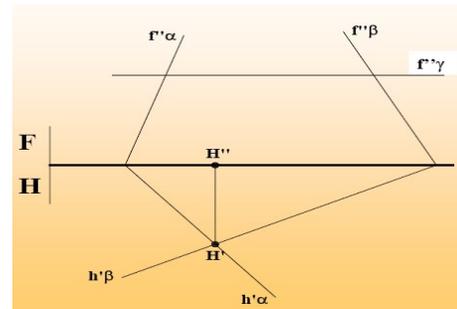


## Construção rigorosa

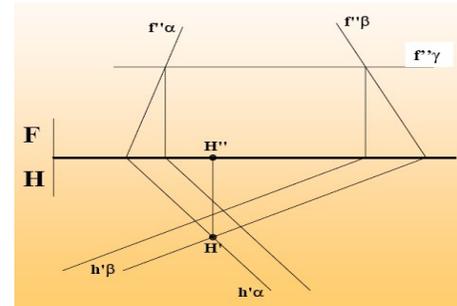
Começa por traçar as projecções dos planos definidos pelos seus traços.



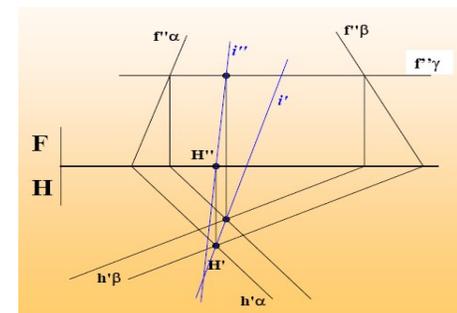
Traça-se o plano auxiliar de nível que deve intersectar os dois planos e determina-se a intersecção deste com os planos.



Quando as rectas de intersecção do plano auxiliar com os planos dados cruzam-se determinam um dos pontos da intersecção procurada.



Repete-se a construção do plano auxiliar e assim teremos o outro ponto, que unidos determinam a intersecção.

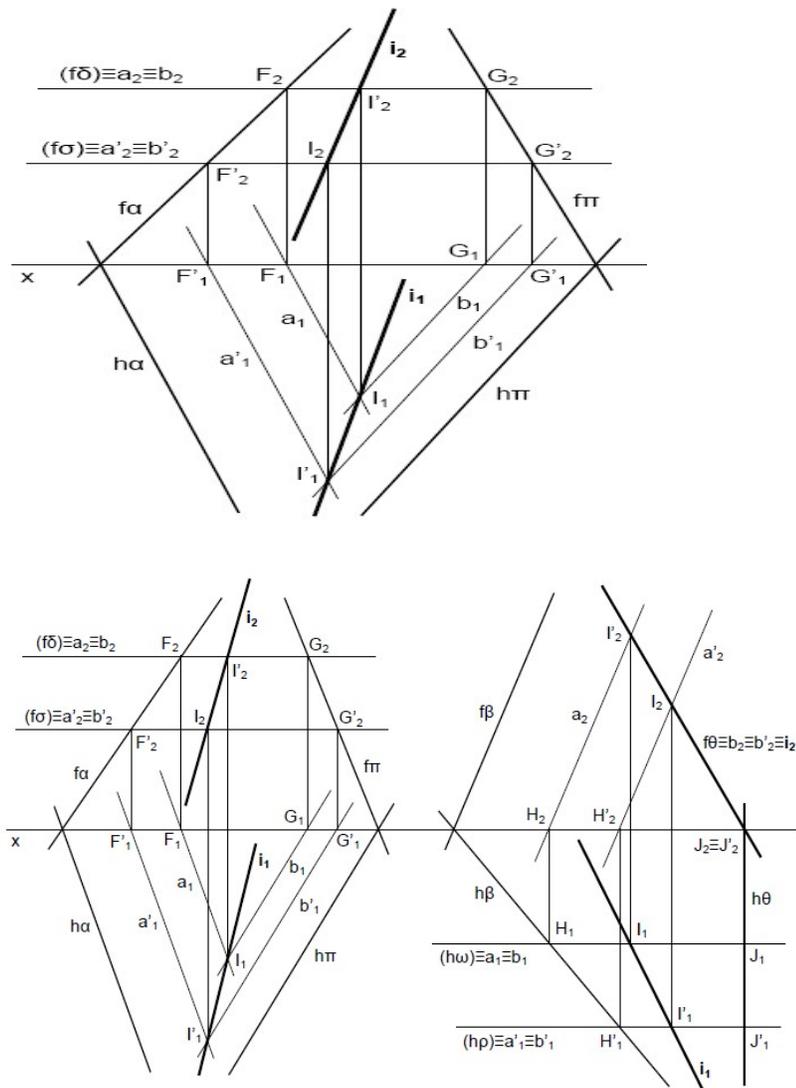


### B-Intersecção de dois planos que todos traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho

Nenhum dos traços se cruzam

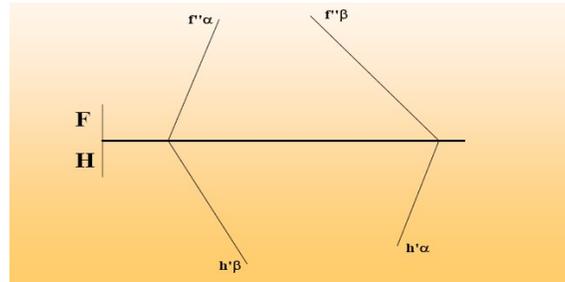
Neste caso podem surgir duas situações. Se conhecermos o tipo de recta que vai ser a recta de intersecção, um só plano auxiliar pode resolver o problema. Caso contrário teremos de aplicar o método geral.

Considera-se para tal dois planos alfa e beta definida pelos seus traços. Determine a intersecção dos planos, sabendo que todos traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho.

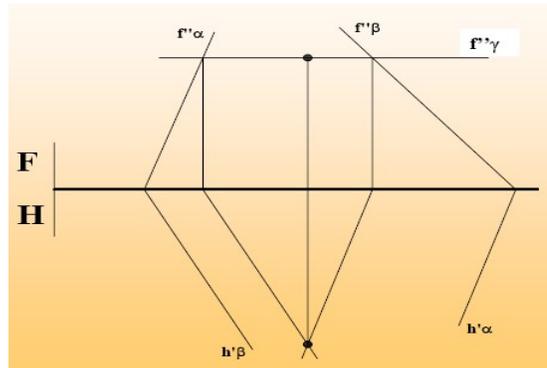


## Construção rigorosa

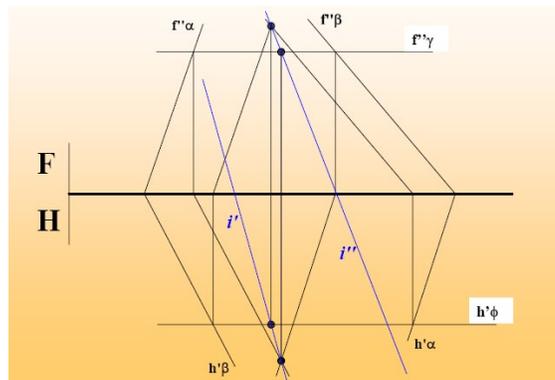
Começa por traçar as projecções dos planos definidos pelos seus traços .



Traça-se o plano auxiliar de nível que deve intersectar os dois planos e determina-se a intersecção deste com os planos. Quando as rectas de intersecção do plano auxiliar com os planos dados cruzam-se determinam um dos pontos da intersecção procurada.



Repete-se a construção do plano auxiliar e assim teremos o outro ponto, que unidos determinam a intersecção.



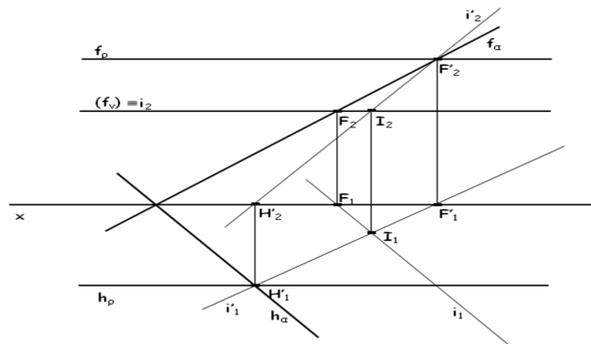
## Determinação da intersecção de 3 planos.

### Primeira possibilidade

Primeiro é obtido a recta de intersecção entre dois planos dados.

A seguir é obtido a recta de intersecção entre outros dois planos dados.

O ponto de intersecção entra as rectas obtidas será a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos dados.



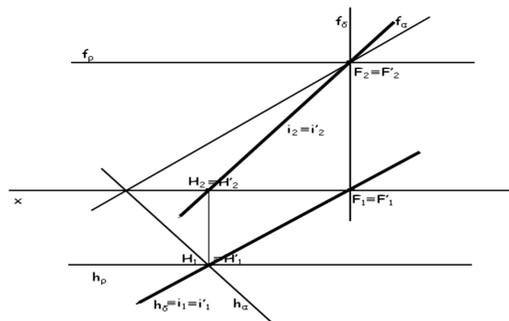
Primeiro é obtido a recta de intersecção entre o plano  $\alpha$  e o plano  $\nu$ , a recta  $i$ . A seguir é obtido a recta de intersecção entre o plano  $\alpha$  e o plano  $\rho$ , a recta  $i'$ . O ponto  $I$  será o ponto de intersecção entra as rectas  $i$  e  $i'$ , e será também a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos dados.

### Segunda possibilidade

Primeiro é obtido a recta de intersecção entre dois planos dados.

A seguir é obtido a recta de intersecção entre outros dois planos dados.

As rectas obtidas são de facto uma única recta, que será também a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos dados.



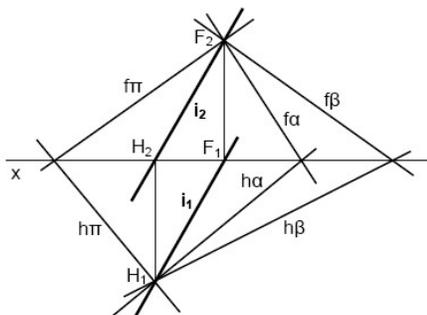
Primeiro é obtido a recta de intersecção entre o plano  $\alpha$  e o plano  $\rho$ , a recta  $i$ . A seguir é obtido a recta de intersecção entre o plano  $\alpha$  e o plano  $\delta$ , a recta  $i'$ . As rectas  $i$  e  $i'$  são de facto uma única recta, que será também a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos dados.

### Outras possibilidades

Surgem algumas possibilidades diferentes quando se intersectam três planos. Mostram-se aqui três delas, com recurso a planos oblíquos definidos pelos seus traços.

#### Intersecção entre três planos oblíquos, resultando uma recta

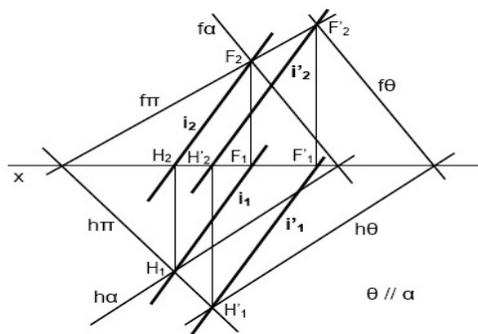
Se os três traços horizontais dos planos se encontrarem num mesmo ponto, e a mesma coisa suceder entre os três traços horizontais, da intersecção entre esses planos resulta uma recta.



#### Intersecção entre três planos oblíquos, resultando duas rectas paralelas

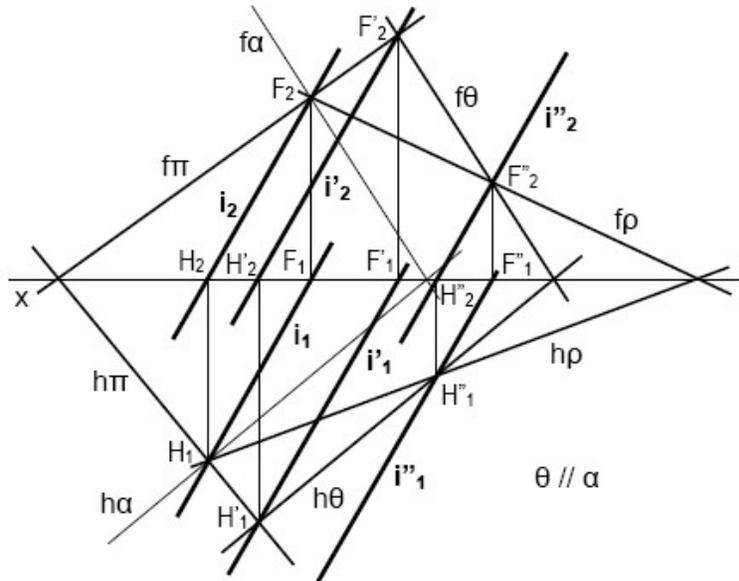
Dos três planos que estão à direita, dois são concorrentes, dois são paralelos, resultam daí duas rectas paralelas entre si.

Em relação ao exercício anterior, em vez do plano  $\beta$ , está  $\theta$ , paralelo a  $\alpha$ .



**Intersecção entre três planos oblíquos, resultando três rectas paralelas**

Esta situação é idêntica à anterior, mas o plano  $\alpha$  é utilizado como auxiliar para garantir duas rectas paralelas. O plano  $\rho$ , contendo uma dessas rectas, cruza-se com  $\theta$  numa terceira recta, que será paralela às outras.



---

## Resumo da Lição



### Resumo

Nesta lição você aprendeu:

- Determinar a intersecção de dois planos definidos pelos seus traços.
- Usar os planos auxiliares como método de determinação.
- Determinar a intersecção de dois planos cujo traços do mesmo nome não se encontram nos limites do desenho.
- Determinar a intersecção de três planos que resulta da intersecção das rectas de intersecção entre os planos.

---

## Tarefas



Trabalhos/Tarefas

Propomos a resolução de alguns exercícios para a consolidação do que acabou de aprender.

**exercícios**

## Avaliações



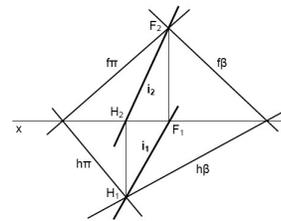
Avaliações

1. Intersecção de dois planos oblíquos cujos traços se cruzam.
2. Intersecção de dois planos oblíquos em que dois dos traços não se cruzam nos limites do desenho.
3. Intersecção de dois planos de rampa.
4. Intersecção de um plano de nível com um plano definido por duas rectas.

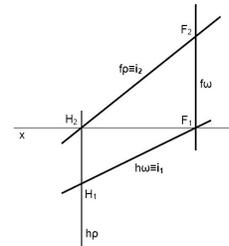
# Soluções

## Lição 1

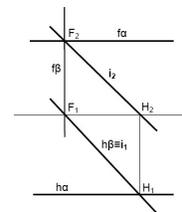
- Determine a intersecção de dois planos oblíquos definidos pelos seus traços.



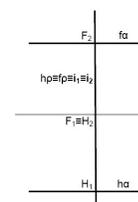
- Determine a intersecção de dois planos projectantes sendo um vertical e outro de topo. Ambos definidos pelos seus traços.



- Determine a intersecção de um plano de rampa com um plano vertical definido pelos seus



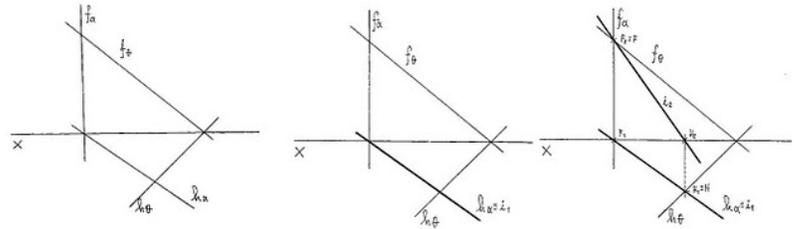
- Determine a intersecção de um plano de rampa com um plano de perfil.



## Lição 2

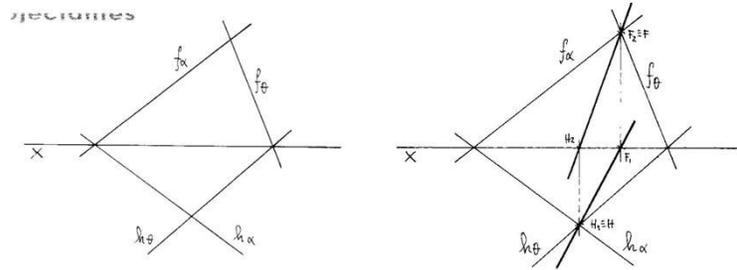
1. Determine a intersecção de dois planos sendo um oblíquo e outro projectante, ambos definidos pelos seus traços.

Resolução:



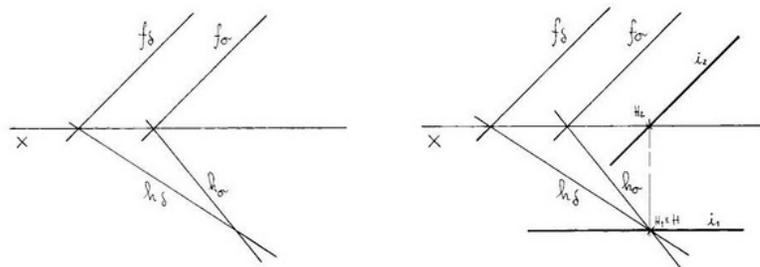
2. Determine a intersecção de dois planos oblíquos definido pelos seus trácios.

Resolução:



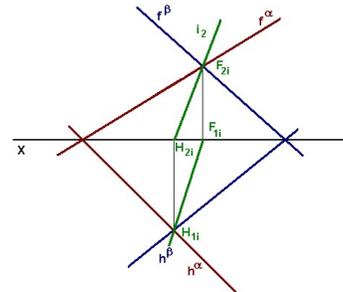
3. Determine a intersecção de dois planos oblíquos definido pelos seus traços com a mesma abertura.

Resolução:

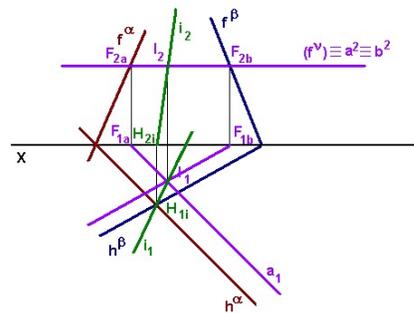


### Lição 3

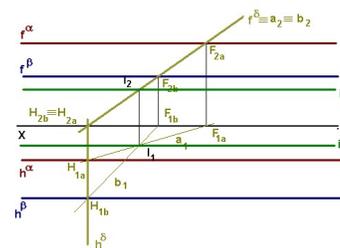
5. Intersecção de dois planos oblíquos cujos traços se cruzam.



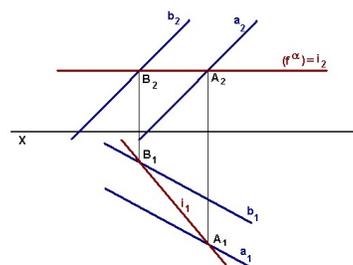
6. Intersecção de dois planos oblíquos em que dois dos traços não se cruzam nos limites do desenho.



7. Intersecção de dois planos de rampa.



8. Intersecção de um plano de nível com um plano definido por duas rectas.





# Módulo 5 de Desenho e Geometria Descritiva

---

## Teste Preparação de Final de Módulo

### Introdução

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste Final de Módulo.

Bom trabalho!

### Teste 1 do Fim do módulo 3

1. Determina a recta  $i$  de intersecção de dois planos de rampa  $\alpha$  e  $\beta$ , sabendo que os traços horizontal e frontal do plano  $\alpha$  têm, respetivamente, 2 cm de afastamento e 6 cm de cota; o traço horizontal do plano  $\beta$  tem 4 cm de afastamento e o traço frontal tem 3 de cota.
2. Determina a recta  $i$  de intersecção de dois planos  $\rho$  e  $\theta$ . O plano  $\rho$  é de rampa e é definido pelo seu traço frontal que tem 3 cm de cota e por uma reta a frente-horizontal, que tem 4 cm de afastamento e 1 cm de cota. O plano  $\theta$  é de topo, interseta o eixo  $x$  num ponto  $N$  com 3 cm de abcissa e faz um diedro de  $30^\circ$  (ad) com o plano horizontal de projecção.
3. Determina as projecções da recta de intersecção  $i$  dos planos oblíquos,  $\alpha$  e  $\gamma$ .  
O plano  $\alpha$  interseta o eixo  $x$  num ponto com 5 de abcissa e os seus traços fazem, ambos, ângulos de  $65^\circ$  com o eixo  $x$ ; o traço horizontal com abertura para a direita e o traço frontal com abertura para a esquerda. O plano  $\gamma$  contém o ponto  $R$  (-9; 0; 0) e os seus traços horizontal e frontal fazem, respetivamente, ângulos de  $60^\circ$  (ae) e  $35^\circ$  (ae) com o eixo  $x$ .  
Considera que os traços horizontais e frontais dos planos  $\alpha$  e  $\gamma$  não se intersetam nos limites da folha de desenho.

**Bom trabalho!**

## Teste 2 do Fim do módulo 3

1. Determina a recta  $i$  de interseção de dois planos oblíquos,  $\alpha$  e  $\beta$ , sabendo que o plano  $\alpha$  está definido pelos pontos  $R$  (0; 5; 1),  $S$  (3; 2; 4) e  $T$  (5; 7; 1) e que o plano  $\beta$  está definido pelos pontos  $A$  (-4; 4; 3),  $B$  (-7; 6; 3) e  $C$  (-9; 5; 6).
2. Determina a recta  $i$  de interseção de dois planos  $\alpha$  e  $\rho$ . O plano  $\alpha$  é oblíquo, intersecta o eixo  $x$  num ponto com 5 de abcissa e os seus traços fazem ambos ângulos de  $45^\circ$  (ad) com o eixo  $x$ . O plano  $\rho$  é passante e está definido pelo eixo  $x$  e pelo ponto  $P$  (-5; 5; 3).
3. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos  $\alpha$  e  $\theta$ .
  - o plano  $\alpha$  é definido por duas retas paralelas,  $r$  e  $s$ ;
  - a reta  $r$  intersecta o plano horizontal de projeção no ponto  $H$  (-2; 3; 0) e as suas projeções horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  (ad) e  $45^\circ$  (ae) com o eixo  $x$ ;
  - a recta  $s$  contém o ponto  $S$  (3; 5; 3);
  - o plano  $\theta$  é de topo, intersecta o eixo  $x$  num ponto com 4 de abcissa e faz um diedro de  $40^\circ$  (ad) com o plano horizontal de projeção.

**Bom trabalho!**

### Teste 3 do Fim do módulo 3

1. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ .
  - o plano  $\alpha$  é definido pelo ponto  $B$  (-3; -1; 3) e pela recta  $r$ ;
  - a recta  $r$  contém o ponto  $A$  (0; 3; 2) e as suas projeções horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  ( $ae$ ) e  $45^\circ$  ( $ae$ ) com o eixo  $x$ ;
  - o plano  $\delta$  é vertical, contém o ponto  $A$  e o seu traço horizontal intersesta o eixo  $x$  num ponto com 4 de abcissa.
  
2. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos oblíquos,  $\alpha$  e  $\beta$ .

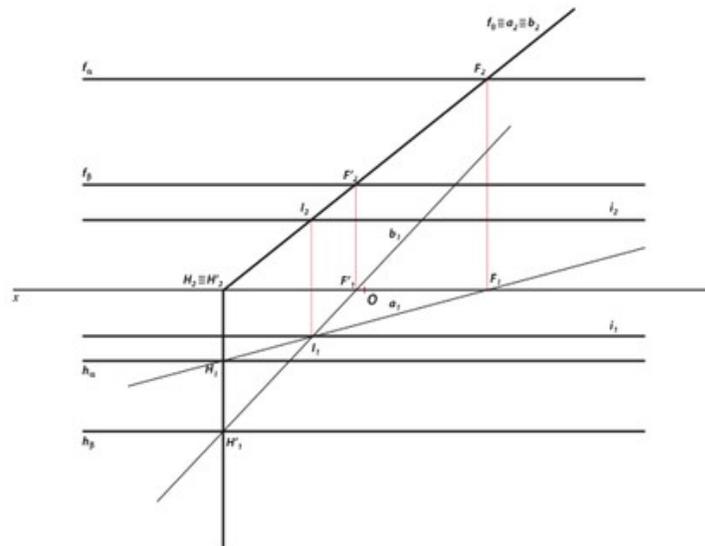
Os traços do plano  $\alpha$  são concorrentes num ponto  $N$  com 0 de abcissa e fazem, ambos, ângulos de  $45^\circ$  com o eixo  $x$ ; o traço horizontal com abertura para a esquerda e o traço frontal com abertura para a direita. O plano  $\beta$  é definido pelo ponto  $X$  (-7; 0; 0) e pela recta  $r$ . A projeção horizontal da recta  $r$  coincide com o traço horizontal do plano  $\alpha$ . Os traços, horizontal e frontais, da recta  $r$  têm, respectivamente, 5 de afastamento e 5 de cota.
  
3. Considera um plano oblíquo  $\alpha$ , sabendo que  $\alpha$  contém o ponto  $R$  (2; 0; 0) e que os seus traços horizontal e frontais fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  ( $ad$ ) e  $50^\circ$  ( $ad$ ) com o eixo  $x$ .

Determina as projeções das rectas  $q$  e  $i$ , de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta$ 1,3 e com o  $\beta$ 2,4, respetivamente.

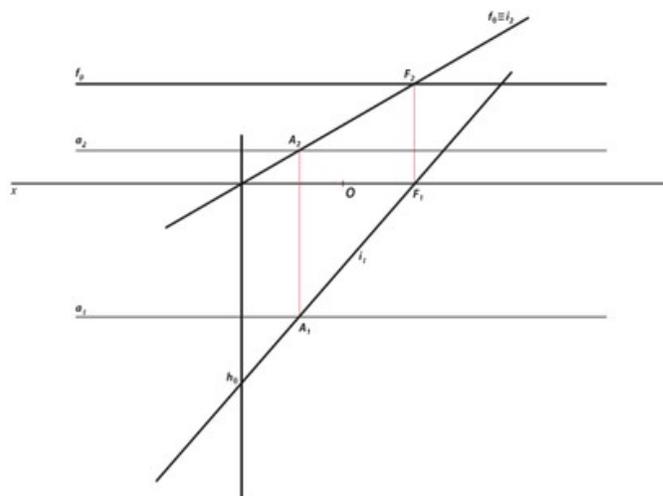
**Bom trabalho !**

## Chave de Correção do Teste 1

- Determina a recta  $i$  de intersecção de dois planos de rampa  $\alpha$  e  $\beta$ , sabendo que os traços horizontal e frontal do plano  $\alpha$  têm, respetivamente, 2 cm de afastamento e 6 cm de cota; o traço horizontal do plano  $\beta$  tem 4 cm de afastamento e o traço frontal tem 3 de cota.



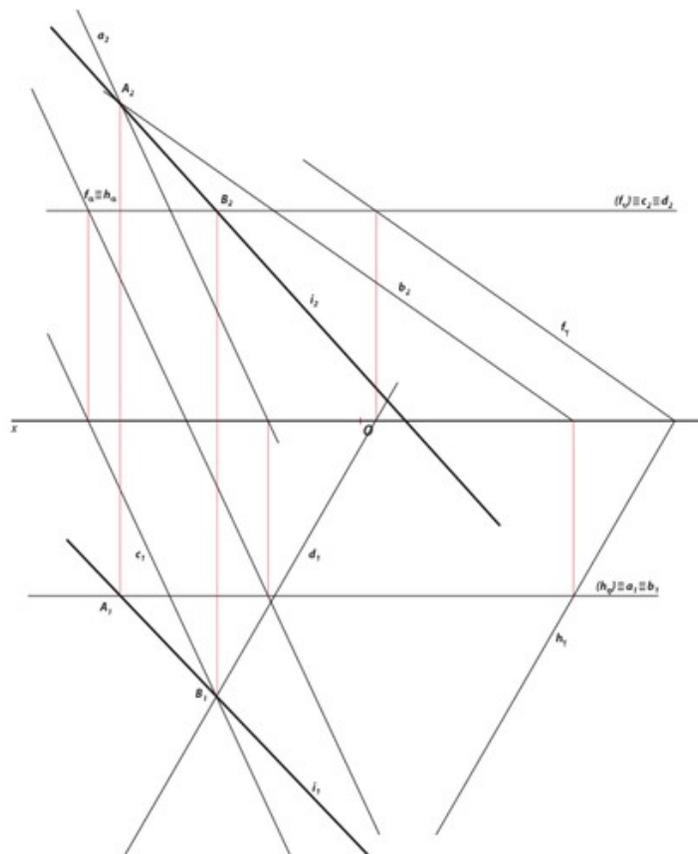
- Determina a recta  $i$  de intersecção de dois planos  $\rho$  e  $\theta$ . O plano  $\rho$  é de rampa e é definido pelo seu traço frontal que tem 3 cm de cota e por uma recta a frente-horizontal, que tem 4 cm de afastamento e 1 cm de cota. O plano  $\theta$  é de topo, intersesta o eixo  $x$  num ponto  $N$  com 3 cm de abcissa e faz um diedro de  $30^\circ$  (ad) com o plano horizontal de projecção.



3. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos oblíquos,  $\alpha$  e  $\gamma$ .

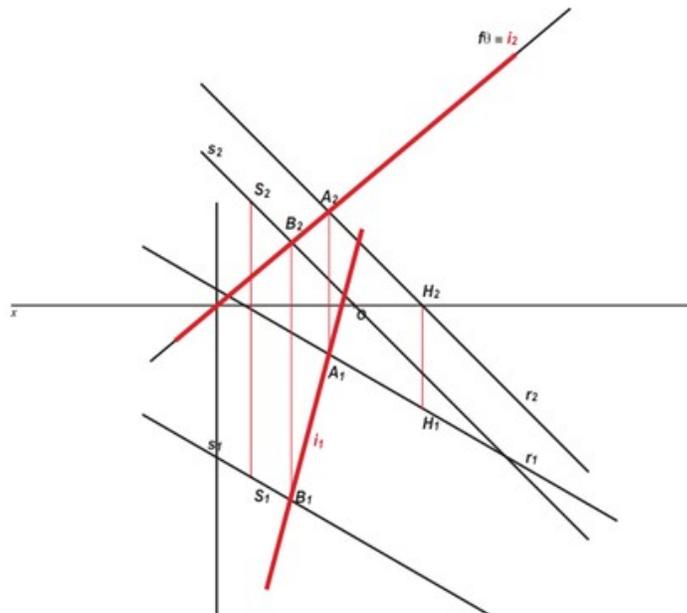
O plano  $\alpha$  intersesta o eixo  $x$  num ponto com 5 de abcissa e os seus traços fazem, ambos, ângulos de  $65^\circ$  com o eixo  $x$ ; o traço horizontal com abertura para a direita e o traço frontal com abertura para a esquerda. O plano  $\gamma$  contém o ponto  $R$   $(-9; 0; 0)$  e os seus traços horizontal e frontal fazem, respetivamente, ângulos de  $60^\circ$  (ae) e  $35^\circ$  (ae) com o eixo  $x$ .

Considera que os traços horizontais e frontais dos planos  $\alpha$  e  $\gamma$  não se interseitam nos limites da folha de desenho.



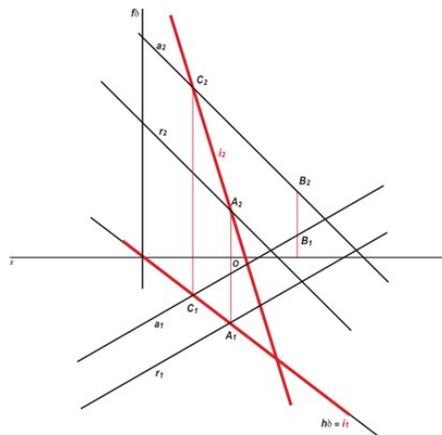


3. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos  $\alpha$  e  $\theta$ .
- o plano  $\alpha$  é definido por duas rectas paralelas,  $r$  e  $s$ ;
  - a recta  $r$  intersesta o plano horizontal de projecção no ponto  $H(-2; 3; 0)$  e as suas projeções horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  (ad) e  $45^\circ$  (ae) com o eixo  $x$ ;
  - a recta  $s$  contém o ponto  $S(3; 5; 3)$ ;
  - o plano  $\theta$  é de topo, intersesta o eixo  $x$  num ponto com 4 de abscissa e faz um diedro de  $40^\circ$  (ad) com o plano horizontal de projecção.



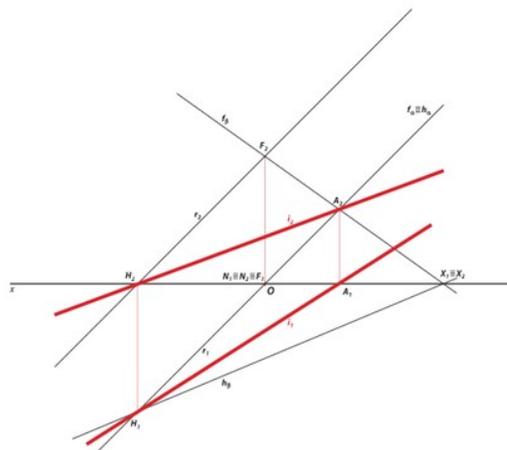
### Chave de Correção do Teste 3

1. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ .
  - o plano  $\alpha$  é definido pelo ponto  $B(-3; -1; 3)$  e pela recta  $r$ ;
  - a recta  $r$  contém o ponto  $A(0; 3; 2)$  e as suas projeções horizontal e frontal fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  ( $ae$ ) e  $45^\circ$  ( $ae$ ) com o eixo  $x$ ;
  - o plano  $\delta$  é vertical, contém o ponto  $A$  e o seu traço horizontal intersesta o eixo  $x$  num ponto com 4 de abcissa.



2. Determina as projeções da recta de interseção  $i$  dos planos oblíquos,  $\alpha$  e  $\beta$ .
 

Os traços do plano  $\alpha$  são concorrentes num ponto  $N$  com 0 de abcissa e fazem, ambos, ângulos de  $45^\circ$  com o eixo  $x$ ; o traço horizontal com abertura para a esquerda e o traço frontal com abertura para a direita. O plano  $\beta$  é definido pelo ponto  $X(-7; 0; 0)$  e pela recta  $r$ . A projeção horizontal da recta  $r$  coincide com o traço horizontal do plano  $\alpha$ . Os traços, horizontal e frontais, da recta  $r$  têm, respectivamente, 5 de afastamento e 5 de cota.



3. Considera um plano oblíquo  $\alpha$ , sabendo que  $\alpha$  contém o ponto  $R$  (2; 0; 0) e que os seus traços horizontal e frontais fazem, respectivamente, ângulos de  $30^\circ$  (ad) e  $50^\circ$  (ad) com o eixo  $x$ .  
Determina as projeções das rectas  $q$  e  $i$ , de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta 1,3$  e com o  $\beta 2,4$ , respetivamente.

