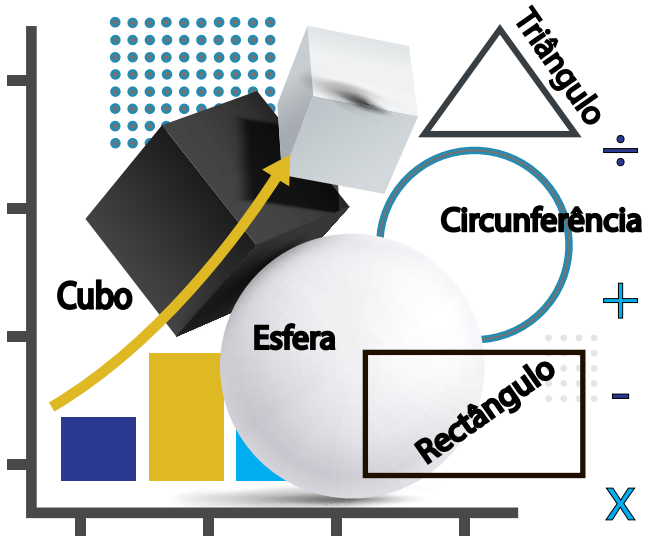
República de Moçambique
Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto de Educação Aberta e à Distância

MATEMÁTICA



MÓDULO 5

Venda proibida

Programa do Ensino Secundário à Distância - 1º Ciclo

PESD I

Módulo 5 de Matemática

Venda proibida

Moçambique – 2023

Ficha Técnica

© Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Título:

Módulo 5 de Matemática

Direcção Geral:

- Manuel José Simbine (Director Geral)
- Luís do Nascimento Paulo (Director Geral Adjunto)

Coordenação:

- Castiano Pússua Gimo (Chefe do Departamento Pedagógico)

Elaboração:

- Abel Ernesto Uqueio Mondlane
- Luís do Nascimento Paulo
- Adélia Machaieie
- Gina Guibunda
- Anselmo Chuquela
- Helena Simone
- Onélio da Mena

Revisão Instrucional:

- Simão Arão Sibinde

Revisão Científica:

- Argentino Gonçalves Nunes
- Benedito Tomás

Revisão Linguística:

- Luís Uamusse

Ilustração:

- Dionísio Manjate
- Félix Mindú
- Hermínia Langa

Maquetização:

- Flávio Joaquim Cordeiro
- Hermínio Andrade Banze
- João António Siquisse
- Júlio Ernesto Melo Ngomane

Impressão:

Venda proibida

Caro(a) aluno(a),

Seja bem-vindo/a ao Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD) do primeiro ciclo, abreviadamente designado PESD1.

É com muito prazer que o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano (MINEDH) coloca em suas mãos os materiais de aprendizagem, especialmente concebidos e elaborados para que você, independentemente do seu género, idade, condição social, ocupação profissional ou local de residência, possa prosseguir com os estudos do Ensino Secundário, através do Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD), desde que tenha concluído o Ensino Primário.

Este programa resulta da decisão do Governo de Moçambique de oferecer no Sistema Nacional de Educação (SNE) o Ensino Secundário, no país, em duas modalidades: Ensino Presencial e Ensino à Distância, expandindo, assim, o acesso à educação a um número cada vez maior de crianças, jovens e adultos moçambicanos, como você.

Ao optar por se matricular no PESD1, você vai desenvolver conhecimentos, habilidades, atitudes e valores definidos para o graduado do 1 º ciclo do Ensino Secundário, que vão contribuir para a melhoria da sua vida, da sua família, da sua comunidade e do País.

Para a implementação deste programa, o MINEDH criou Centros de Apoio à Aprendizagem (CAA), em locais estrategicamente escolhidos, onde você e os seus colegas dever-se-ão encontrar periodicamente com os tutores, que são professores capacitados para apoiar a sua aprendizagem, esclarecendo as dúvidas, orientando e aconselhando-o na adopção de melhores práticas de estudo.

Estudar à Distância exige o desenvolvimento de uma atitude mais activa no processo de aprendizagem, estimulando em si a necessidade de muita dedicação, boa organização, muita disciplina, criatividade e, sobretudo, determinação nos estudos. Por isso, fazemos votos de que se empenhe com afinco e responsabilidade para que possa, efectivamente, aprender e poder contribuir para um Moçambique sempre melhor.

Bons Estudos!

Maputo, aos 18 de Janeiro de 2024

CARMELITA RITA NAMASHULUA

MINISTRA DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 6

I. SOBRE O PESD 1 6
II. SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA 6
III. PROCESSO DE ESTUDO 6
IV. AVALIAÇÃO 7
V. ÍCONES 8

INTRODUÇÃO AO MÓDULO 9

LIÇÃO Nº 1: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ESTATÍSTICA 11

LIÇÃO Nº 2: FREQUÊNCIA ABSOLUTA 17

LIÇÃO Nº 3: FREQUÊNCIA RELATIVA 21

LIÇÃO Nº 4: GRÁFICOS 25

LIÇÃO Nº 5: MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL 33

LIÇÃO Nº 6: EQUAÇÃO QUADRÁTICA 39

LIÇÃO Nº 7: FÓRMULA RESOLVENTE 44

LIÇÃO Nº 8: SOMA E PRODUTO DE RAÍZES 50

LIÇÃO Nº 9: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONDUCENTES ÀS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS 54

LIÇÃO Nº 10: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA 57

LIÇÃO Nº 11: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $fx = ax2 + c$ 66

LIÇÃO Nº 12: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $fx = ax2 + bx$ 75

LIÇÃO Nº 13: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $fx = ax2 + bx + c$ CASO $y = a(x - p)2$ 84

LIÇÃO Nº 14: ESTUDO COMPLETO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA TIPO $fx = ax2 + bx + c$ CASO $y = a(x - p)2$ 90

LIÇÃO Nº 15: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $fx = ax2 + bx + c$, CASO $y = a(x - p)2 + q$ 97

LIÇÃO Nº 16: ESTUDO COMPLETO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $fx = ax2 + bx + c$; CASO $y = a(x - p)2 + q$ 104

LIÇÃO Nº 17: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES QUADRÁTICAS 112

LIÇÃO Nº 18: RESOLUÇÃO GRÁFICA DE INEQUAÇÃO QUADRÁTICA 119

LIÇÃO Nº 19: RESOLUÇÃO ANALÍTICA DE INEQUAÇÃO QUADRÁTICA 122

LIÇÃO Nº 20: POLIEDROS 125

LIÇÃO Nº 21: ÁREA E VOLUME DO CUBO 132

LIÇÃO Nº 22: ÁREA E VOLUME DO PARALELEPÍPEDO 136

LIÇÃO Nº 23: ÁREA E VOLUME DE PRISMAS 142

Venda proibida

LIÇÃO Nº 24: ÁREA E VOLUME DO CILINDRO.....146
LIÇÃO Nº 25: ÁREA E VOLUME DE PIRÂMIDE.....151
LIÇÃO Nº 26: ÁREA E VOLUME DO CONE.....157
LIÇÃO Nº 27: ÁREA E VOLUME DA ESFERA.....163
TESTE DE PREPARAÇÃO 168
CHAVE DE CORRECÇÃO.....169
BIBLIOGRAFIA DO MÓDULO 170

Venda proibida

INTRODUÇÃO

Caro (a) aluno (a), seja bem-vindo ao Programa do Ensino Secundário à Distância - PESD, uma opção de aprendizagem que lhe permite prosseguir com seus estudos pós-primários, para concluir o nível secundário.

A seguir apresentamos algumas informações que você deve conhecer antes de iniciar o seu estudo.

I. Sobre o PESD 1

Neste programa, você tem a oportunidade de estudar o primeiro ciclo do Ensino Secundário, mediante a leitura dos módulos auto-instrucionais, de forma individual, respeitando o seu ritmo próprio, para que depois de completar a aprendizagem dos conteúdos programados, seja submetido aos exames nacionais, cujos resultados positivos permitirão que você receba um certificado de conclusão do ciclo.

Neste programa, a sua aprendizagem será feita por ciclo, sendo que irá receber um conjunto de módulos de todas as disciplinas que compõem o primeiro ciclo do ensino secundário (7ª, 8ª ou 9ª classes), não se distinguindo cada uma destas três classes. Por essa razão, ao concluir o estudo deste conjunto de módulos, terá concluído o estudo do ciclo todo, estando habilitado a realizar os exames da 9ª classe.

II. Sobre a disciplina de Matemática

Neste ciclo, os conteúdos de **Matemática** estão estruturados em **5** (cinco**)** módulos. Cada módulo é constituído por um conjunto de lições.

Cada lição tem a seguinte estrutura: o título da lição, os objectivos, o tempo de estudo, o desenvolvimento (no qual encontramos a explicação dos conceitos, a demonstração de experiências e actividades), os exercícios, o resumo e a Chave de Correcção. Poderá encontrar o glossário, isto é, o significado de algumas palavras, no fim da lição.

III. Processo de estudo

O processo de estudo no PESD inicia depois de você receber um conjunto de orientações sobre o funcionamento da aprendizagem no ensino à distância, que são dadas no Centro de Apoio à Aprendizagem (CAA) pelo respectivo Gestor. Assim, você receberá, no máximo, dois módulos, dando início ao seu estudo. O estudo é de caracter individual e consiste na leitura dos conteúdos existentes nos módulos.

Venda proibida

Para efeitos de registo de notas pessoais (sistematização de informação, resumo das lições, resolução de actividades e exercícios, testes de preparação, incluindo anotação de dúvidas), você deverá usar um caderno. O caderno o ajudará a ser planificado e organizado no seu estudo.

A actividade de leitura faz parte do processo de estudo. Ela prepara a você a ganhar habilidade de leitura observando as regras de entoação, pausa e ritmo adequado.

Sendo assim, a actividade de leitura expressiva nas diferentes tipologias textuais previstas, nesta disciplina, deve ser feita e caberá ao seu tutor, ao longo do processo de seu estudo, a responsabilidade de programar, acompanhar e aferir o nível de atingimento dos objectivos programáticos traçados para este nível.

IV. Avaliação

No Ensino à Distância a avaliação faz parte do processo de aprendizagem. Sabe porquê? Ela estimula o seu interesse pela matéria e ajuda-lhe a medir em que medida está ou não a progredir na aprendizagem.

Por esta razão, ao longo e no final dos módulos aparecem actividades avaliativas, em diferentes formatos ou com diferentes nomes: *exercícios*, *actividades*, *experiências*, *resumos* e *testes de preparação*. Você deve resolver cada uma delas.

Depois de resolver um determinado tipo de actividade avaliativa, para você certificar-se se resolveu bem ou não, deverá consultar a Chave de Correcção disponível logo após a actividade ou no fim do módulo.

Nas últimas páginas do módulo, vai encontrar um conjunto de questões denominadas “Teste de Preparação”, que serve para verificar o seu nível de assimilação dos conteúdos aprendidos no módulo e ao mesmo tempo que lhe prepara para a realização do Teste de Fim de Módulo (TFM).

O TFM é o teste ou prova que você irá realizar no fim de cada módulo no CAA, vigiado pelo gestor ou tutor. A nota obtida no TFM serve de base para efeito de admissão ao exame.

No fim do ciclo, realizará um Exame Nacional, com base no qual, tendo aproveitamento positivo, ser-lhe-á emitido um certificado de conclusão do 1º ciclo do Ensino Secundário.

Venda proibida

V. Ícones

Ao longo do módulo, você irá encontrar alguns símbolos gráficos com os quais se deve familiarizar antecipadamente, para a facilitação do seu estudo. Sempre que vir determinado ícone terá conhecimento prévio do que deve acontecer.

Glossário	**Desenvolvimento**	**Exercícios**	**Reflexão**
Tempo	**Resumo**	**Chave de correcção**	**Actividade de grupo**
Objectivos	**Discussão**	**Estudo de caso**	**Teste de preparação**
Note	**Dica**	**Ajuda**	**Experiências**
Vídeo	**Áudio**		

Venda proibida

INTRODUÇÃO AO MÓDULO

Seja bem-vindo, caro (a) aluno (a), ao estudo do módulo **5** da disciplina de **Matemática** do Programa do Ensino Secundário à Distância para o primeiro ciclo, PESD1.

Este módulo é constituído por **5 (cinco)** unidades temáticas, subdivididas em lições, respectivamente:

Unidade Temática 1: ORGANIZACAO E TRATAMENTO DE DADOS

Unidade Temática 2 : ALGEBRA (6)

Unidade Temática 3: FUNCAO (3)

Unidade Temática 4: ALGEBRA (7)

Unidade Temática 5: GEOMETRIA (6)

Objectivos do módulo

Quando terminar o estudo do módulo 5 deste ciclo, você será capaz de:

- Aplicar conhecimentos de estatística na organização de dados;
- Resolver equações quadráticas;
- Resolver problemas conducentes a equações quadráticas**;**
- Representar graficamente todos os tipos de função quadrática;
- Realizar o estudo completo da função quadrática;
- Resolver graficamente inequações quadráticas;
- Aplicar conhecimentos da geometria no cálculo de área e volume de sólidos geométricos
- Aplicar conhecimentos da geometria na resolução de problemas de sólidos geométricos.

Recomendações para o estudo

Estimado estudante, para ter sucesso no estudo deste módulo, é necessário muita dedicação, portanto aconselhamos o seguinte:

- Reserve pelo menos 3 horas por dia para o estudo de cada lição e resolução dos exercícios propostos;
- Procure um lugar tranquilo que disponha de espaço e iluminação apropriada, pode ser em casa, no Centro de Apoio e Aprendizagem (CAA) ou noutro lugar perto da sua casa;
- Durante a leitura, faça anotações no seu caderno sobre conceitos, fórmulas e outros aspectos importantes sobre o tema em estudo;
- Aponte também as dúvidas a serem apresentadas aos seus colegas, professor ou tutor de forma a serem esclarecidas;
- Faca o resumo das matérias estudadas, anotando as propriedades a serem aplicadas;

Venda proibida

- Resolva os exercícios e só consulte a chave-de-correcção para confirmar as respostas. Caso tenha respostas erradas volte a estudar a lição e resolve novamente os exercícios por forma a aperfeiçoar o seu conhecimento. Só depois de resolver com sucesso os exercícios poderá passar para o estudo da lição seguinte. Repita esse exercício em todas as lições.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 1: Introdução ao Estudo da Estatística

Introdução

Caro aluno, nesta lição introduzimos um novo tema, da disciplina de matemática. Trata-se dos conceitos básicos da estatística, que é a ciência que se dedica na recolha, organização, processamento, análise e interpretação de dados, de forma que se possa tirar conclusões para a tomada de decisões.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Explicar a importância da Estatística;
- Definir população;
- Definir amostra;
- Diferenciar população da amostra;
- Identificar as variáveis estatísticas;
- Recolher dados em tabelas;
- Organizar dados em tabelas.

Para a melhor compreensão desta lição e a resolução de actividades, você necessita de estudar durante pelo menos 120 minutos.

Estatística

Caro aluno. A estatística é uma das áreas da matemática mais presentes em nossas vidas. Analisamos dados estatísticos frequentemente para a tomada de decisões, sejam do poder público, sejam de situações mais simples do dia a dia.

A principal função da estatística é desenvolver técnicas para a colecta de dados, organizar esses dados, interpretá-los, analisá-los e representá-los. Com o estudo da estatística, foram desenvolvidos alguns conceitos importantes ligados à colecta dos dados, como a população, a amostra e a variável. Para realizar a organização dos dados, usa-se os gráficos e tabelas.

A seguir vamos dedicar o nosso tempo abordando os conceitos de população e amostra.

Conceitos de População e Amostra

População ou universo estatístico

Já ouviu fala de população? De certeza que sim. Mas o que seria população em estatística? Esta vai ser a nossa questão de partida. Mas antes analise as seguintes afirmações:

Venda proibida

As pessoas de uma determinada comunidade que estão a ser observadas num determinado estudo para um certo fim, denominam-se população.
O gado bovino de uma determinada comunidade que está a ser observado num determinado estudo para um certo fim, denomina-se população bovina.
O conjunto de objectos com **característica comum** que são objecto de análise, também se chama população em estudo.

Então, caro aluno, o que seria população em estatística? A partir dos casos acima referidos vamos tentar trazer o conceito de "Estatística". Já tem a ideia formada? Então vamos juntos definir.

Definição:
População é um conjunto ou colecção de elementos com pelo menos, uma característica em comum, que está a ser objecto de uma análise estatística.

O termo população não se refere somente a pessoas, mas também a conjuntos de natureza diversa, como animais, árvores, frutas e outros.

Como viu, na definição da população, fala-se de **"característica comum"**. O que é isso? Ora vejamos, por exemplo as garrafas de Fanta que estão dentro de uma caixa têm o mesmo formato. E as carteiras na sala de aulas do Manuel, por sua vez, têm o seu formato. A questão é: podemos formar um único conjunto a partir destes 2 elementos? Claro que não! Pois as garrafas têm as suas características, e as carteiras têm outras. Logo, os objectos referidos não têm as mesmas características, mas cada um dos conjuntos tem uma **característica comum**.
A cada garrafa na caixa ou carteira na sala de aulas, na linguagem estatística, chama-se **unidade estatística ou elemento estatístico**.

Caro aluno, se estiver a estudar esta lição introdutória sozinho ou com um amigo, tentem encontrar pelo menos três exemplos de população ou universo estatístico.
Comparem os vossos exemplos com os que se seguem, claro que não vão ser os mesmos, mas a essência será.

Exemplos:

1. Conjunto de capitais provinciais de Moçambique.
2. Conjunto de pescadores da Ilha de Moçambique.
3. Conjuntos de golos marcados na época futebolística de 2022 pelas equipas de uma determinada Província .

Venda proibida

Veja caro aluno que a população pode ter um número finito de elementos estatísticos, que denomina-se p**opulação finita,** ou um número infinito de elementos estatísticos, que é chamada **população infinita**.

Exemplos de população finita:

1. O conjunto de alunos da Escola Secundária de Xai-Xai.
2. O conjunto de crianças dos 0 aos 5 anos de uma creche.
3. O conjunto de automóveis da vila de Chemba na Província de Sofala.

Exemplos de população infinita:

1. Os pontos de uma recta.
2. O número de grãos de areia numa determinada praia.

O conceito de população ficou claro? Se alguma coisa não ficou bem esclarecida, leia mais uma vez ou anote para consultar o tutor. Vamos prosseguir para outros elementos estatísticos, a amostra.

Amostra

A recolha de dados para um estudo através de uma análise estatística pode ser feita de duas maneiras, nomeadamente: **recenseamento**, quando é observada toda a população, ou **amostragem**, quando é observada uma parte representativa da população que designa-se por **amostra**. Então:

Amostra – é o subconjunto da população em estudo que contém em proporção tudo o que a população possui.

A amostragem normalmente é usada se a população for muito grande. Uma amostra tem que ser representativa, isto é; conter em proporção tudo o que a população possui e também deve ser imparcial. Todos os elementos da população devem ter igual oportunidade de fazer parte da amostra. Imagine, caro aluno, que você está a fazer um estudo sobre a qualidade dos palitos de fósforo produzidos por uma determinada fábrica. Acha que será necessário ver palito a palito para aferir a sua qualidade?

Claro que não! Portanto, não será necessário experimentar todos os palitos armazenados para apurar a sua qualidade, bastará apenas ter alguns de forma sorteada, em diversos pontos e ver se acendem, de acordo com os padrões definidos.

Depois de ver os conceitos de população e amostra, agora vai ver o de Variável Estatística.

Variáveis estatísticas

Antes de entrar no conceito de variável estatística vamos ver um outro conceito. É o de **carácter estatístico**.

O que é isso?

Venda proibida

Bom…**Carácter estatístico** é uma propriedade que permite descrever os elementos de uma população.

O carácter estatístico pode ser $\begin{cases} \text{Qualitativo} - \text{não sepode medir. Também diz} - \text{se não mensurável, ou} \\ \text{Quantitativo} - \text{pode medir} - \text{se. Também diz} - \text{se mensurável.} \end{cases}$

Vejamos alguns exemplos de **carácteres estatíscos**:

1. Carácteres qualitativos: raça, cor dos cabelos, estado civil.
2. Carácteres quantitativos: idade, peso, temperatura.

Veja que os carácteres quantitativos e qualitativos pelo facto de indicarem as características que determinado fenómeno pode ter também podem designar-se por v**ariáveis estatísticas**.

Assim, as **variáveis estatísticas** podem ser classificadas em **quantitativas** ou **qualitativas**.

As **variáveis quantitativas** são representadas através de números resultantes de uma contagem.

Tem como exemplo: A quantidade de módulos do 1º ciclo no CAA da Escola Secundária de Angoche, a velocidade do autocarro em viagem, entre outros.

As variáveis quantitativas podem ser discretas ou contínuas.

- As variáveis discretas são aquelas cujos valores representam um conjunto finito ou enumerável que resultam de uma contagem. Por exemplo o número de filhos, número de alunos, entre outros.

Veja, caro aluno, que as variáveis discretas podem representar-se por chavetas, onde se pode identificar cada um deles. A sua representação pode ser da seguinte maneira: $\{0,1,2,3,4,....\}$

- As variáveis contínuas são aquelas cujos valores pertencem a um intervalo de números reais. É o caso da temperatura, velocidade, entre outros.

As **variáveis qualitativas** são aquelas que não podem ser expressas numericamente, pois representam o carácter qualitativo. Como exemplo temos a cor dos olhos de um grupo de pessoas em certa paragem de comboio, o nível de escolaridade dos trabalhadores de uma fábrica de descasque de castanha de cajú, entre outros.

Então, caro aluno, em estatística temos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} Qualitativas \\ Quantitativas \rightarrow \begin{cases} Discretas \\ Contínuas \end{cases} \end{cases}$$

Certo! Você já pode diferenciar com facilidade os tipos de variáveis, passemos a seguir para a recolha de dados.

Recolha e organização de dados

Venda proibida

Caro aluno, em estatística quando se pretende fazer um estudo sobre determinado fenómeno, a primeira etapa é a recolha de dados, que pode ser feita através de um questionário, entrevista, observação directa ou através de uma pesquisa bibliográfica.

Na segunda etapa procede-se com a organização de dados recolhidos, que consiste na contagem e agrupamento de dados, para facilitar a leitura e compreensão.

A terceira etapa consiste na organização de dados numéricos em tabelas que podem ser transportados para diferentes tipos de gráficos que serão estudados nas próximas lições.

Resolva a seguir os seguintes exercícios.

Exercícios

Copie para seu caderno e resolva os seguintes exercícios de consolidação.

1. Indique se são finitas ou infinitas as seguintes populações estatísticas:
   a) O número de alunos do PESD a frequentar o 1º ciclo no CAA da Escola Secundária de Tete.
   b) O número de vezes em que se pode extrair uma carta de um baralho com reposição.
   c) Conjunto de crianças nascidas no Hospital Provincial de Nampula em 2021.
   d) Quantidade de peixe na baia de Sofala.
2. De entre os caracteres estatísticos abaixo, indique os que são qualitativos e os que são quantitativos:
   A. sexo,
   B. cor de um automóvel,
   C. idade de uma criança,
   D. raça,
   E. números de livros na biblioteca,
   F. estado civil.
3. Das expressões dadas indique as que são variáveis discretas e as que são variáveis contínuas:
   a) O número de tutores num CAA;
   b) O peso de um grupo de atletas;
   c) O número de gramas de arroz, consumidos diariamente no mês de Janeiro por uma família;
   d) A velocidade de um camião em Km/h.

Passe o resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição introdutória à estatística, para além do surgimento da estatística, sua importância e aplicação em diferentes áreas, abordamos o conceito de população que constitui uma base por ser o

Venda proibida

objecto de estudo, e em alguns casos quando esta é bastante grande, pode recorrer-se à amostra da mesma.

Os caracteres qualitativos e quantitativos que permitem caracterizar os elementos da população, também foram objecto da nossa abordagem. As variáveis estatísticas aparecem para melhor caracterizar os elementos estatísticos, podendo ser quantitativas ou qualitativas.

Finalmente vimos a recolha e organização de dados que são etapas preliminares para uma análise estatística.

Compare as suas soluções com as que são propostas na Chave de correção.

Chave de Correcção

1. a) Finita, b) Infinita, c) Finita, d) Infinita
2. A. Qualitativa; B. Qualitativa; C. Quantitativa; D. Qualitativa; E. Quantitativa; F. Qualitativa
3. a) Variável discreta; b) Variável contínua; c) Variável discreta; d) Variável contínua

Então... Conseguiu resolver pelo menos 12 questões acertadamente?

Excelente trabalho!

Venda proibida

LIÇÃO Nº 2: Frequência absoluta

Introdução

Caro aluno, nesta lição vamos aprender a organizar dados em tabelas de frequências absolutas, frequências absolutas acumuladas e frequências relativas.

Bom trabalho.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar frequências absolutas em dados simples.
- Determinar frequências absolutas acumuladas.
- Apresentar os dados na forma de uma distribuição de frequências.

Para uma melhor aprendizagem desta lição e resolução de exercícios, você necessita de estudar durante pelo menos 120 minutos.

Frequência absoluta para dados simples

Variáveis discretas

Uma forma mais resumida de mostrar os dados recolhidos é apresentar quantas vezes cada elemento estatístico aparece. Esta informação pode ser colocada em tabelas ou gráficos como forma de **condensá-la** após a ordenação de dados de forma crescente ou decrescente.

Caro aluno, se tiver colegas com quem costuma estudar, organizem as idades abaixo, de um grupo de pescadores da baía de Inhambane, numa tabela de frequências. Caso não tenha, tente sozinho. Tenha em conta que o primeiro passo é organizar os dados da seguinte maneira: 35, 40, 28, 35, 44, 41, 43, 35, 44, 35, 43, 41, 42, 50.

Como estratégia, é preciso em primeiro lugar organizar os dados em ordem crescente ou decrescente. Estes dados também se chamam variáveis e que podem designar-se por x_i . De seguida traçar uma tabela com pelo menos duas colunas (verticais-de cima para baixo) e tantas linhas (horizontais da esquerda para a direita). Cada variável x_i irá aparecer tantas vezes através da contagem. Essas tantas vezes chamam-se frequências absolutas e designam-se por f_a .

Caro aluno, concentre-se e faça a actividade recomendada, depois compare com a resolução abaixo.

Venda proibida

1º passo – organização dos dados

28, 35, 35, 35, 35, 40, 41, 41, 42, 43, 43, 44, 44, 50. Estas são as variáveis x_i.

2º passo – contagem das variáveis x_i.

28 aparece uma vez, logo, a sua frequência absoluta f_a é 1;

35 aparece quatro vezes, a sua frequência absoluta é 4;

40 aparece uma vez, a sua frequência absoluta é 1;

41 aparece duas vezes, a sua frequência absoluta é 2;

42 aparece uma vez, a sua frequência absoluta é 1;

43 aparece duas vezes, a sua frequência absoluta é 2;

44 aparece duas vezes, a sua frequência absoluta é 2;

50 aparece uma vez, a sua frequência absoluta é 1.

Variável (x_i)	**Frequência absoluta (f_a)**
28	1
35	4
40	1
41	2
42	1
43	2
44	2
50	1
Total	14

Caro aluno, quando sentir-se seguro poderá lançar os dados directamente na tabela da seguinte maneira:

Então, caro aluno, acredito que depois desta actividade está em condições de definir o conceito de frequência absoluta. Compare a sua definição com a que se segue.

Frequência absoluta

Chama-se **frequência absoluta** ao número de vezes que se repete cada variável.

Caro aluno, antes de avançarmos, faça uma breve recapitulação do conceito **frequência absoluta**.

Há vezes que se torna necessário saber sobre a **frequência absoluta acumulada** (f_{ac}), que serve para dar informação sobre quantos elementos não tem mais do que o valor de x_i. O significado de **ac** no canto direito abaixo da frequência, é **absoluta acumulada**.

Tomemos o exemplo acima das idades de 14 pescadores, para representar a frequência absoluta acumulada numa tabela de frequências.

Venda proibida

Variável (x_i)	Frequência absoluta (f_a)	Frequência absoluta acumulada (f_{ac})
28	1	1
35	4	1 + 4 = 5
40	1	5 + 1 = 6
41	2	6 + 2 = 8
42	1	8 + 1 = 9
43	2	9 + 2 = 11
44	2	11 + 2 = 13
50	1	13 + 1 = 14
Total	14	

Está claro? Então vamos exercitar para consolidarmos a aprendizagem.

Caro aluno, como vimos na primeira lição, existem variáveis discretas, que são as representadas na tabela acima e, variáveis contínuas que aparecem na forma de classes. Então, vamos trazer um exemplo de uma distribuição contínua, numa tabela de frequências.

Como podemos ver, a primeira classe aparece 7 vezes, uma vez que a sua frequência absoluta é 7, a segunda classe tem como frequência absoluta 8, e assim sucessivamente.

Classe	f_a
$[0;4[$	7
$[4;8[$	8
$[8;12[$	10
$[12;16[$	9
$[16;20[$	6
Total	40

Agora é vez de fazer o exercício, para consolidar a sua aprendizagem. Use o seu caderno.

Exercícios

1. Com base nos dados das idades dos pescadores responda às seguintes questões:
   a) Quantos pescadores participaram na pesquisa sobre as idades na baia de Inhambane?
   b) Quantos pescadores têm 43 anos?
   c) Quantos pescadores não têm mais de 44 anos?

2. O Coordenador do PESD de uma província, resolveu fazer um estudo estatístico sobre o número de vezes que os alunos inscritos no PESD1 se dirigiram a um determinado CAA nos primeiros três meses do ano lectivo de 2022, e os resultados foram os seguintes:

Venda proibida

0, 0, 1, 2, 1, 4, 3, 2, 0, 4, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 1, 5, 1, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 3, 0, 5, 5.

a) Organize os dados numa tabela de frequências absolutas e frequências absolutas acumuladas.
b) Quantos alunos foram observados nesta pesquisa?
c) Quantos alunos se dirigiram menos de três vezes ao CAA?
d) Quantos alunos não tem mais de 4 presenças no CAA?

Caro aluno, esperamos que tenha tido um bom desempenho nesta exercitação. Anote o resumo no seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição aprendemos a organizar os dados (variáveis) numa tabela de frequências absolutas de forma ordenada. As tabelas ajudam a condensar os dados e é facilmente visível na coluna das frequências absolutas, quantas vezes aparece cada variável.

Compare os seus resultados com os que são apresentados a seguir.

Chave de Correcção

1. a) 14; b) 2; c) 13

2. a)

Nº de idas ao CAA (x_i)	Frequência absoluta (f_a)	Freq. Absoluta acumulada (f_{ac})
0	10	10
1	12	22
2	8	30
3	4	34
4	3	37
5	3	40
Total	40	

b) 40; c) 10 + 12 + 8 = 30; d) 37

Venda proibida

LIÇÃO Nº 3: Frequência relativa

Introdução

Na lição anterior aprendemos a determinar frequências absolutas de um rol ou conjunto de dados. Nesta lição vamos dar continuidade, representando esses dados sob forma de frequências relativas percentuais e acumuladas.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar frequências relativas em dados simples.
- Determinar frequências relativas percentuais
- Determinar frequências relativas acumuladas.
- Apresentar os dados na forma de uma distribuição de frequências.

Para uma melhor compreensão desta lição e a resolução de actividades, você necessita de estudar durante pelo menos 120 minutos.

Frequência relativa e frequência relativa percentual

Uma das formas mais convenientes de apresentar os dados recolhidos é através de **frequências relativas**, que é a divisão de cada valor da frequência absoluta, pelo número total da população $\left(fr = \frac{fa}{N}\right)$, uma vez que estatisticamente, as frequências relativas facilitam a comparação entre as variáveis.

A frequência relativa também pode-se representar na forma percentual, que é uma forma muito cómoda, de fácil leitura e percepção. Bastará multiplicar o resultado da divisão de cada frequência absoluta, pelo número total da população por 100%, isto é; $\left(fr(\%) = \frac{fa}{N} x100\%\right)$, onde $f_r(\%)$ significa frequência relativa percentual, que é a representação da frequência relativa na forma de percentagem.

Veja, caro aluno que **fr** significa frequência relativa, **fa** é frequência absoluta como fizemos referência na lição anterior e **N** ou **Total** como vinha na tabela de distribuição de frequências, é a soma de todas as frequências absolutas.

Portanto **N** = f1 + f2 +……+fn.

Venda proibida

Caro aluno, sempre que possível priorize os trabalhos em pequenos grupos, pois facilitam a interacção e a troca de opiniões com os outros. Para tal voltemos ao exemplo das idades dos pescadores da baía de Inhambane. Desta vez vamos trazer as frequências relativas, as frequências relativas percentuais e as frequências relativas acumuladas, numa tabela de distribuição de frequências. Podemos utilizar os dados organizados na lição anterior:
28, 35, 35, 35, 35, 40, 41, 41, 42, 43, 43, 44, 44, 50 que são variáveis discretas.

Caro aluno, na aula passada aprendemos a organizar os dados e a lançar as variáveis e os valores das frequências absolutas e frequências absolutas acumuladas. Então, agora vamos trazer mais elementos para a tabela que são as frequências relativas, as frequências relativas percentuais e as frequências relativas acumuladas.

x_i	f_a	f_{ac}	**Frequência relativa - f_r**	**Frequência relativa Percentual - f_r (%)**	**Frequência relativa acumulada - f_{rac}**
28	1	1	1:14 = 0,071	0,071x100% = 7,1%	0,071
35	4	5	4:14 = 0,286	0,286x100% = 28,6	0,071+0,286=0,357
40	1	6	1:14 = 0,071	7,1%	0,357+0,071=0,428
41	2	8	2:14 = 0,143	14,3%	0,428+0,143=0,571
42	1	9	0,071	7,1%	0,571+0,071=0,642
43	2	11	0,143	14,3%	0,642+0,143=0,785
44	2	13	0,143	14,3%	0,785+0,143=0,928
50	1	14	0,071	7,1%	0,928+0,071=0,999
Total	**N=14**		**$0,999 \approx 1$**	**$99,9\% \approx 100\%$**	

Veja, caro aluno que cada valor da frequência relativa foi arredondado a 3 casas decimais. A opção do número de casas decimais depende de cada um, é verdade que quanto mais casas decimais forem consideradas, o somatório das frequências relativas será aproximadamente igual a 1 e em outros casos exactamente igual a 1, o que é bom, e para as frequências relativas percentuais igual a 100%
Agora é momento de exercitação.

Exercícios

1. As notas obtidas numa turma na disciplina de Matemática apresentam a seguinte distribuição: 15, 16, 16, 15, 16, 14, 15, 15, 15, 17, 16, 14, 14, 16, 15, 16, 14, 17, 15, 16, 14, 15, 15, 17, 15.
   a) Que tipos de variáveis são estas?

Venda proibida

b) Represente os dados numa tabela de frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa, relativa acumulada e relativa percentual.
c) Que nota foi obtida pela maioria dos alunos?
d) Que nota corresponde à menor percentagem de alunos?
e) Que significa a correspondência da nota 14 e frequência relativa 20%?
f) Quantos alunos não têm mais do que 16 valores?

2. Numa aula de Matemática o professor solicitou aos alunos que estimassem a altura do mastro da bandeira da escola. As respostas variaram de 200 cm a 580 cm e o professor organizou as mesmas em intervalos de classes da seguinte maneira:
$[200;250[,[250;300[,[300;350[,[350;400[,[400;450[,[450;500[,[500;550[,[550;600[$, onde a primeira classe aparece duas vezes, a segunda oito vezes, a terceira dezassete vezes, a quarta catorze vezes, a quinta nove vezes, a sexta cinco vezes, a nona duas vezes, e a última classe uma vez.
a) Que tipo de variáveis são estas?
b) Represente os dados numa tabela as frequências relativas, relativa acumulada e relativa percentual.
c) Qual é percentagem de alunos que estimaram a altura do mastro em menos de 400 cm?

Passe o resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição aprendemos a calcular as frequências relativas e as relativas percentuais. A sua representação na tabela bem como o cálculo das frequências relativas acumuladas não difere do que aprendemos na lição anterior. Na próxima lição iremos aprender a representar os dados da tabela em diferentes tipos de gráficos.
Caro aluno, consulte a chave de correção.

Chave de Correcção

1. a) Variáveis discretas.
b) Primeiro, organizando os dados:
14, 14, 14, 14, 14, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17.

Venda proibida

Segundo, apresentar os dados na tabela de frequências:

x_i	f_a	f_{ac}	f_r	f_{rac}	$f_r(\%)$
14	5	5	0,2	0,2	20
15	10	15	0,4	0,6	40
16	7	22	0,28	0,88	28
17	3	25	0,12	1	12
Total	25		1		100

c) 15 valores correspondem a 10 alunos.

d) 17 valores correspondem a 12%.

e) 20% dos alunos tiveram 14 valores.

f) 22.

2. a) Variáveis contínuas.

b)

Classes	f_a	f_r	f_r (%)	f_{rac}
$[200;250[$	2	0,038	3,8	0,038
$[250;300[$	8	0,138	13,8	0,176
$[300;350[$	17	0,293	29,3	0,469
$[350;400[$	14	0,241	24,1	0,71
$[400;450[$	9	0,155	15,5	0,865
$[450;500[$	5	0,086	8,6	0,951
$[500;550[$	2	0,034	3,4	0,985
$[550;600[$	1	0,017	1,7	1,00
Total	58	1,00		

c) 70%

Venda proibida

LIÇÃO Nº 4: Gráficos

Introdução

Na lição anterior aprendemos a determinar frequências relativas, relativas percentuais e acumuladas. Nesta lição vamos representar os dados das tabelas de frequências em gráficos de barras, histogramas, pictogramas e circulares, e fazer as respectivas interpretações.

Bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar dados em tabelas;
- Representar dados em gráficos;
- Interpretar dados em tabelas;
- Interpretar dados em gráficos.

Para uma melhor compreensão desta lição e resolução de actividades, você necessita de estudar durante pelo menos 180 minutos.

Representação gráfica

A representação de dados em gráficos, traduz informações contidas nas tabelas de distribuição de frequências, tornando-se fácil fazer a sua análise, de forma a tirar conclusões e tomada de decisões acertadas. Vejamos os diferentes tipos de representação gráfica.

Gráfico de barras ou diagrama de barras e gráfico circular

Para traçar um gráfico de barras ou qualquer tipo de gráfico, é preciso dispor de uma tabela de distribuição de frequências, o que já aprendemos nas lições anteriores. Concretamente para representar o gráfico de barras, é necessário traçar o eixo dos "x" (das abcissas), na horizontal, marcando nele os valores das variáveis discretas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e traçar o eixo das ordenadas, na vertical, de forma perpendicular ao eixo das abcissas, marcando nele os valores das frequências.

A partir dos valores da tabela faz-se uma correspondência entre o valor da variável x_i *e da frequência absoluta* f_a, traçando segmentos de recta de comprimento igual à respectiva frequência. Para melhorar a estética, entre a recta vertical de correspondência, traça-se uma barrinha

Venda proibida

rectangular representativa. Estas variáveis discretas também podem ser representadas num gráfico circular.

Preste atenção caro aluno, o gráfico de barras é somente representado por dados que correspondem a variáveis discretas. Também é possível traçar um gráfico em que as barras aparecem na horizontal.

Vamos mais uma vez trazer o exemplo das idades dos pescadores da baía de Inhambane que temos vindo a analisar desde a segunda lição, nomeadamente 28, 35, 35, 35, 35, 40, 41, 41, 42, 43, 43, 44, 44, 50 que são variáveis discretas, e fazer a representação num gráfico de barras de frequências absoluta e relativa e num gráfico circular.

Não se esqueça, caro aluno que antes de fazer a representação gráfica das idades, deve em primeiro lugar colocar os dados na tabela

Caro aluno, os dados da 5ª coluna referentes à frequência relativa percentual, lêem-se na forma de percentagem, isto é; 7,1%, 28,6% e assim sucessivamente. Tratando-se de variáveis discretas a sua representação gráfica será no gráfico de barras. Também é possível fazer a representação destes dados no gráfico circular

x_i	f_a	f_{ac}	f_r	f_r (%)	f_{rac}
28	1	1	0,071	7,1	0,071
35	4	5	0,286	28,6	0,357
40	1	6	0,071	7,1	0,428
41	2	8	0,143	14,3	0,571
42	1	9	0,071	7,1	0,642
43	2	11	0,143	14,3	0,785
44	2	13	0,143	14,3	0,928
50	1	14	0,071	7,1	0,999
Total	**N=14**		**0,999 ≈ 1**	**99,9% ≈ 100%**	

Venda proibida

Gráfico de barras das frequências absolutas

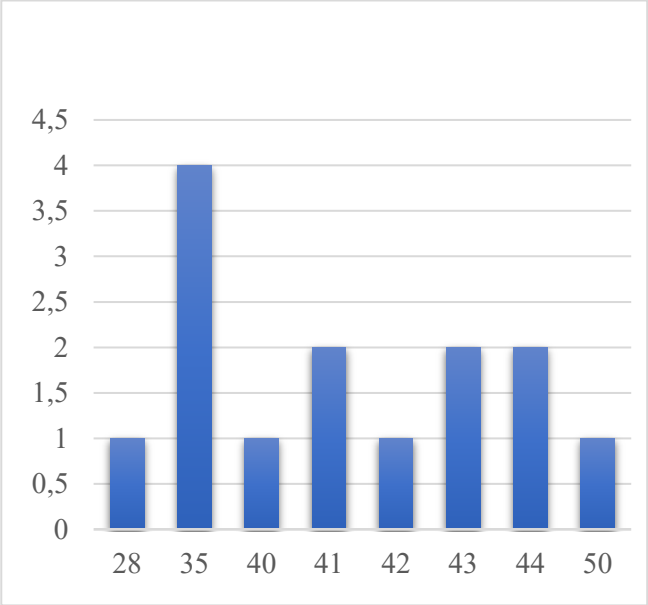


Gráfico 1 – Gráfico de barras das frequências absolutas

Gráfico circular das frequências absolutas

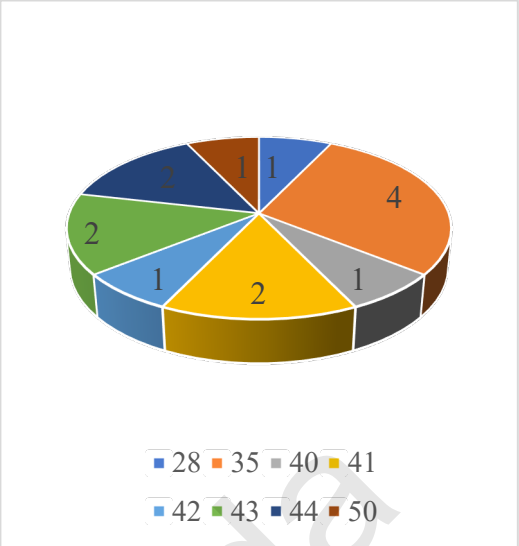


Gráfico 2 – Gráfico circular das frequências absolutas

O eixo vertical representa as frequências absolutas (f_a) e o eixo horizontal representa os valores das variáveis (x_i)

No gráfico circular cada sector colorido é proporcional à frequência absoluta

De forma idêntica podemos fazer a representação das frequências relativas no gráfico de barras e no gráfico circular, como ilustram as figuras abaixo.

Gráfico de barras das frequências relativas

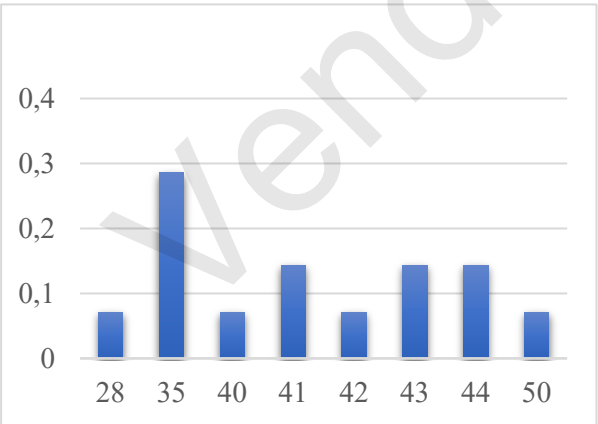


Gráfico 3 – Gráfico de barras das frequências relativas

Gráfico circular das frequências relativas

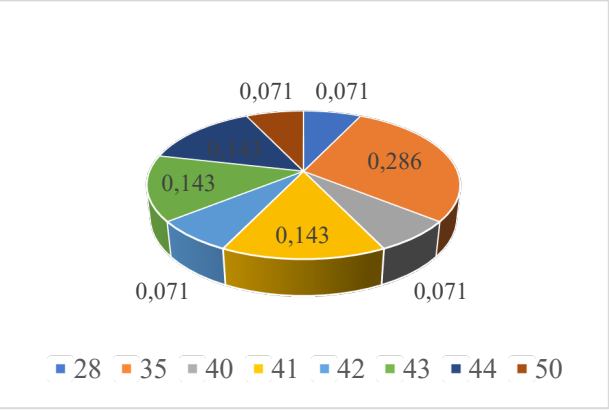


Gráfico 4 – Gráfico circular das frequências

Venda proibida

Gráfico circular das frequências relativas percentuais

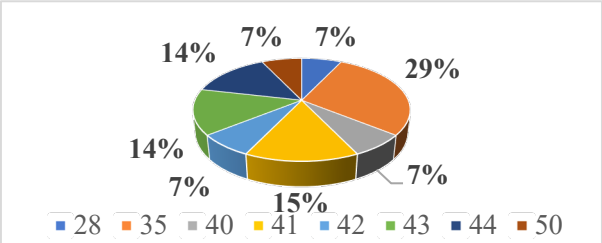


Gráfico 5 – Gráfico circular das frequências percentuais

Caro aluno, veja que a representação das frequências relativas percentuais, também podem ser representados sob forma arredondada a números inteiros por uma questão de comodidade, como ilustra o gráfico circular.

Pictograma

O **pictograma** é um gráfico específico construído através de símbolos que representam um objecto ou conceito por meio de desenhos figurativos, escolhendo-se uma proporcionalidade à respectiva frequência.

Exemplo:

Uma escola colocou à disposição do grupo de disciplina de Matemática a seguinte quantidade de sólidos geométricos:

Cubos	**4**
Cilindros	7
Esferas	2

O respectivo pictograma é o seguinte:

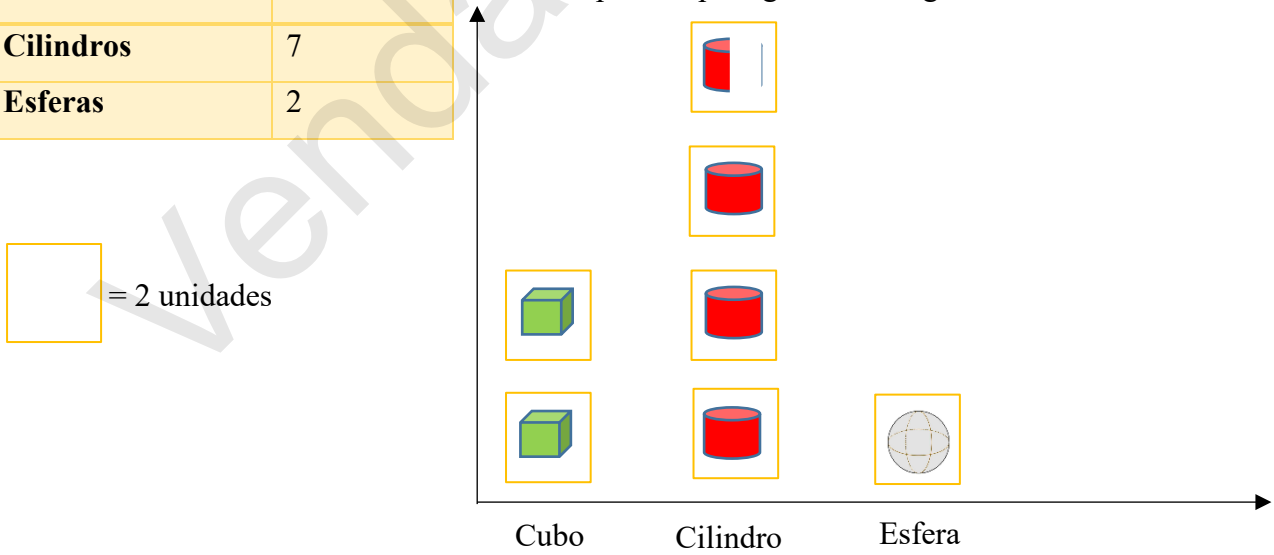


Fig. 1 – Pictograma

Histograma

A representação gráfica da distribuição de frequências de uma variável contínua é feita através de um gráfico que se chama histograma, mas também poderá ser no gráfico circular, embora a sua utilização seja pouco frequente. O histograma é um gráfico de barras unidas, devido ao carácter contínuo dos

Venda proibida

valores da variável. No eixo das abcissas, são marcadas as extremidades das classes consideradas e no eixo das ordenadas, as frequências das classes.

Exemplo:

Consideremos o caso da aula de Matemática em que o professor solicitou aos alunos que estimassem a altura do mastro da bandeira da escola, cujas respostas variaram de 200 cm a 580 cm, resultando na seguinte distribuição por classes:

$[200;250[,[250;300[,[300;350[,[350;400[,[400;450[,[450;500[,[500;550[,[550;600[$, onde a primeira classe aparece duas vezes, a segunda oito vezes, a terceira dezassete vezes, a quarta catorze vezes, a quinta nove vezes, a sexta cinco vezes, a nona duas vezes, e a última classe uma vez.

Representando numa tabela de frequências absolutas teremos o seguinte:

Classes	f_a
$[200;250[$	2
$[250;300[$	8
$[300;350[$	17
$[350;400[$	14
$[400;450[$	9
$[450;500[$	5
$[500;550[$	2
$[550;600[$	1
Total	58

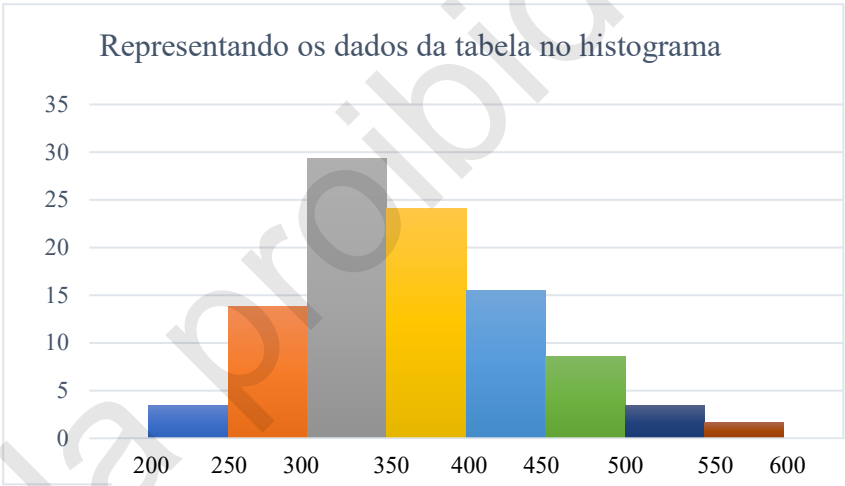


Gráfico 6 - Gráfico dos dados da tabela no histograma

Resolva os exercícios a seguir para verificar se compreendeu a matéria.

Exercícios

1. Sabendo que o número de filhos de 10 famílias inquiridas é o seguinte:

   3, 1, 0, 5, 2, 1, 2, 4, 0, 2.

   a) Represente a distribuição dada numa tabela de frequências absolutas, frequências absolutas acumuladas, frequências relativas e frequências relativas percentuais.

   b) Quantas famílias não tem nenhum filho?

   c) Qual é o valor da variável com maior frequência relativa?

   d) Represente num diagrama de barras as frequências absolutas.

Venda proibida

e) Represente num gráfico circular as frequências relativas percentuais.

2. Considere a seguinte distribuição contínua que representa as alturas em centímetros de um grupo de crianças:

Classes	**Marcas de classe (x_i)**	f_a	f_r	f_r (%)
$[200;250[$		2		
$[250;300[$		8		
$[300;350[$		17		
$[350;400[$		14		
$[400;450[$		9		
$[450;500[$		5		
$[500;550[$		2		
$[550;600[$		1		
Total		**58**		

a) Complete as colunas em branco com os valores das marcas de classe e frequências relativas.
b) Represente graficamente as frequências relativas percentuais das alturas das crianças.

3. Das 10 perguntas aplicadas em cada teste por um professor de Matemática, nos meses de Junho, Julho e Agosto, um aluno da 10ª B teve o seguinte número de perguntas correctas, de acordo com as frequências abaixo. Represente os dados num pictograma, escolhendo um símbolo sugestivo.
   Julho – 6 perguntas correctas, Julho – 9 perguntas correctas e Agosto – 8 perguntas correctas.
   Anote no seu caderno o resumo a seguir

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição aprendemos uma das partes importantes da estatística que é a representação de dados da tabela na forma gráfica, seja de variáveis discretas em gráficos de barras ou gráficos circulares, tanto de variáveis contínuas em histogramas. A próxima lição é a última desta fase de aprendizagem de estatística neste ciclo e iremos abordar as medidas de tendência central. Esteja atento.

Consulte a chave de correcção, que segue, comparando as respostas dadas com as suas.

Chave de Correcção

1. a) Ordenando os dados e construindo a tabela:

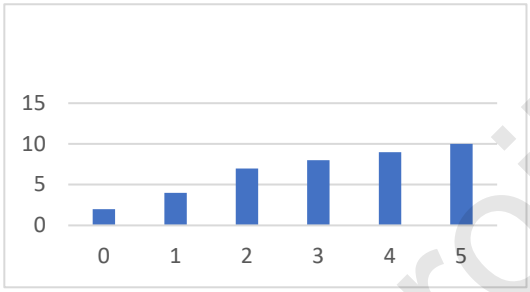
0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5

x_i	f_a	f_{ac}	f_r	$f_r(\%)$
0	2	2	0,2	20
1	2	4	0,2	20
2	3	7	0,3	30
3	1	8	0,1	10
4	1	9	0,1	10
5	1	10	0,1	10
Tot	10		1,0	100

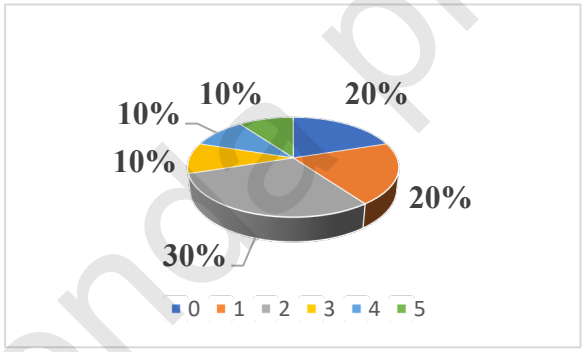
b) 2

c) 2 cuja frequência relativa é 30%

d)



e)

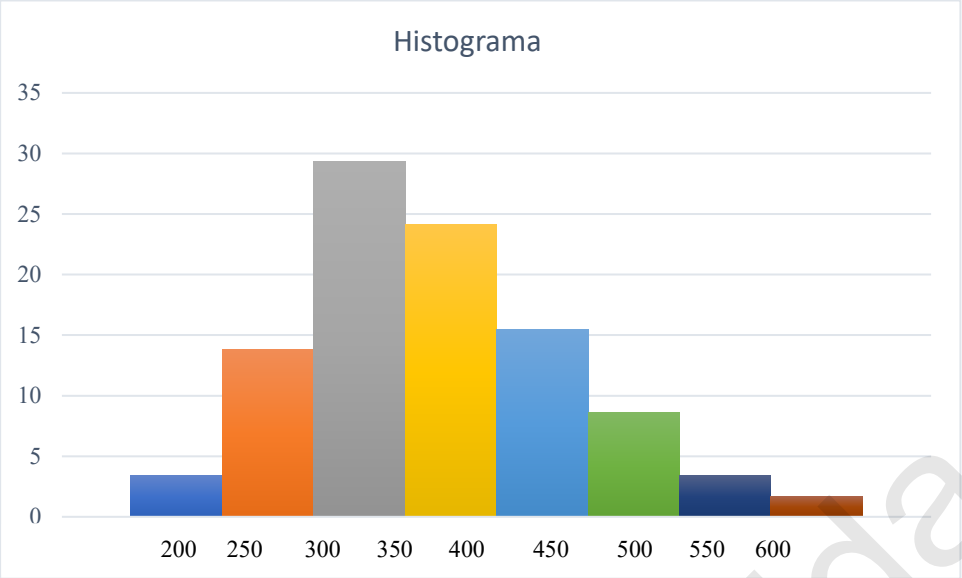


2. a)

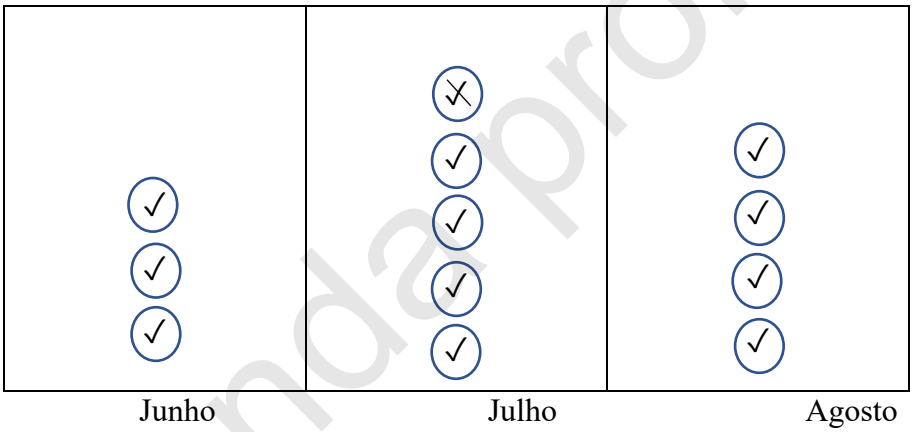
Classes	**Marcas de classe (x_i)**	f_a	f_r	$f_r(\%)$
[200;250[	225	2	0,034	3,4
[250;300[	275	8	0,138	13,8
[300;350[	325	17	0,293	29,3
[350;400[	375	14	0,241	24,1
[400;450[	425	9	0,155	15,5
[450;500[	475	5	0,086	8,6
[500;550[	525	2	0,034	3,4
[550;600[	575	1	0,017	1,7
Total		**58**	**0,998**	**99,8**

Venda proibida

b)



3. Seja por exemplo ✓ = 2 unidades



Venda proibida

LIÇÃO Nº 5: Medidas de Tendência central

Introdução

Como forma de encerrar o estudo da Estatística, depois da abordagem dos conceitos básicos, distribuição de frequências absolutas, frequências absolutas acumuladas, frequências relativas, frequências relativas percentuais e representação gráfica, vamos trazer as tendências características da distribuição nesta lição irá tratar de conceitos relativos às medidas de tendência central.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar a moda,
- Determinar a mediana;
- Determinar a média aritmética;
- Indicar o significado da moda,
- Indicar o significado de mediana;
- Indicar o significado média aritmética em dados simples

Para uma melhor aprendizagem desta lição e resolução de exercícios, você necessita de estudar durante pelo menos 120 minutos.

O que são medidas de tendência central?

Sabemos que a Estatística trabalha com diversas informações que são apresentadas por meio de tabelas e gráficos, com números que representam e caracterizam um determinado conjunto. Dentre todas as informações, podemos retirar valores que representam, de algum modo, todo o conjunto de dados quando ordenados, esses valores são denominados **Medidas de Tendência Central, de Centralização ou de Localização** por tenderem a situar-se no centro do conjunto dos dados, depois de ordenados.

As Medidas de Tendência Central são representadas pela **Moda**, **Mediana** e **Média Aritmética** que a seguir iremos mostrar cada uma delas.

Moda

Caro aluno, alguma vez usou a palavra moda no dia- a - dia? Tente escrever num papel uma ou mais frases em que aparece a palavra moda. Tente explicar porque é moda. Se estiver com um colega ou amigo, confronte as suas ideias com as dele. Já chegaram a alguma conclusão?

Venda proibida

Ora bem, o conceito **Moda** na vida quotidiana relaciona-se com algo que a maioria das pessoas adere, por exemplo podemos encontrar no vestuário, na música e muito mais. Então voltemos para o mundo da estatística considerando a seguinte distribuição de frequências:
6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 15. Se olharmos com atenção, iremos encontrar nestes dados uma variável que aparece mais vezes que as outras. ***Já conseguiu descobrir qual é?***

Certo, essa variável é 11, a sua frequência é 4, isto é; aparece quatro vezes, enquanto o 8 aparece três vezes, o 6 duas vezes e as restantes variáveis aparecem apenas uma vez. Então a maior frequência vai para o 11. Assim, a moda é 11. A moda também pode designar-se por valor modal. Podemos convencionar que a moda representa-se por **M**.

Usando as suas palavras tente formular uma definição de moda. Já conseguiu? Confronte com a que se encontra logo a seguir.

Definição:
Chama-se **moda** ou **valor modal** de uma distribuição de frequências, ao valor da variável estatística que corresponde a maior frequência.

Agora podemos encontrar numa distribuição de frequências as seguintes situações:

- Caso exista uma moda, a distribuição de frequências diz-se **unimodal**
- Se ocorrem duas modas, a distribuição de frequência diz-se **bimodal**.
- Se existirem mais do que duas modas, a distribuição de frequências diz-se **multimodal** ou **plurimodal**.
- Se não existir moda, a distribuição de frequências diz-se **amodal**.

Vejamos os exemplos do tipo de moda nas seguintes distribuições de frequências:

- ✓ 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8. A moda é 3. (unimodal).
- ✓ 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8. A moda é 1 e 4 (bimodal).
- ✓ 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8. A moda é 2, 4, 6 (trimodal, multimodal ou plurimodal).
- ✓ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Não existe moda (amodal).

Mas se tivermos uma distribuição de frequências por classes. A moda será representada pela classe de maior frequência. Vejamos o exemplo que se apresenta:

x_i	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$
f_i	5	7	12	8	5

Venda proibida

A moda está na classe $[4;6[$, por esta ser a de maior frequência. É, portanto, a classe modal.

Mediana

Caro aluno, vamos juntos construir o conceito de mediana, podemos convencionar que a **mediana** representa-se por M_0

Se tiver um conjunto de dados, primeiro organize- os na ordem crescente ou decrescente, de seguida procure o valor que está no centro dos dados.

Vejamos as idades, em anos, de um grupo de estudantes seleccionados para entrar na primeira parte do jogo do campeonato de futebol de praia. 17, 16, 17, 15, 14.

Então a nossa informação fica assim: $14, 15, (16), 17, 17$. Dois dados à esquerda de **16** e dois dados à direita. Então o valor da mediana é 16.

No caso que acabamos de ver, fizemos referência aos jogadores que entraram na primeira parte, que é um número ímpar. Mas equipa é alargada, tendo a equipa completa as seguintes idades: 17, 16, 17, 15, 14, 15, 16 e 14, que é um número par.

Ordenando, teremos: $14, 14, 15, (15, 16), 16, 17, 17$, depois de ordenados e fazendo uma eliminação consecutiva sobram 15 e 16 no centro dos dados. E agora, como proceder para determinar a mediana? Vamos adicionar os dois valores do meio e dividir por 2. Assim a mediana deste conjunto é $M_0 = \frac{15+16}{2} = 15{,}5$.

Resumindo o cálculo da mediana:

- Coloque os valores do conjunto de dados em ordem crescente ou decrescente.
- Se a quantidade de valores do conjunto for ímpar, a mediana é o valor central.
- Se a quantidade de valores do conjunto for par, somam os valores centrais e divide-se por 2.

Média aritmética

Vamos agora ver a Média Aritmética, que é a medida de tendência central mais utilizada na vida quotidiana, é frequentemente usada nas escolas para calcular as médias trimestrais e finais dos alunos, a média dos gastos numa família, e principalmente em pesquisas estatísticas.

Venda proibida

Maria! Como se calcula vossemecê média trimestral de

É simples João, soma todas as notas e divide pelo número de testes realizados.

Convencionemos que a Média Aritmética é $\overline{X}$. Sendo 11, 13 e 14 as notas obtidas pelo João na disciplina de Matemática, no segundo trimestre de 2022, qual será a sua média trimestral?

Como dizia a Maria na conversa com o João, somam-se todas as notas e divide-se pelo número de testes realizados. Então a resolução será assim: $\overline{X}=\frac{11+13+15}{3}=\frac{39}{3}=13$.

Vamos apresentar duas definições de Média Aritmética, a primeira em que os valores das variáveis discretas não têm frequências absolutas, que é chamada média aritmética simples, como no exemplo anterior, e a segunda, em que cada variável discreta tem frequência absoluta, que toma o nome de média aritmética ponderada.

Definição 1:

Chama-se média aritmética de um conjunto de dados $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ao quociente da soma dos seus valores por n. Isto é;

$$Média\ aritmética: \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Trata-se de uma média aritmética simples. **n** é o número total de dados.

Definição 2:

Se a variável discreta **x** toma os valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com frequências absolutas $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ respectivamente, a média aritmética é dada por:

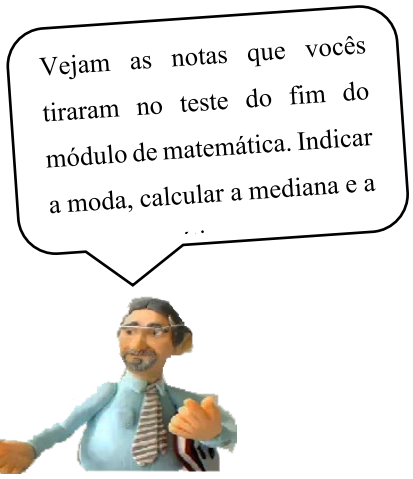
$$\overline{X}=\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n} \quad ou \quad \overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n}{n} \quad , onde\ n = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$$

Que é a média aritmética ponderada.

Agora. Resolva os exercícios a seguir:

Venda proibida

Exercícios



1. Observe a tabela e a tarefa sugerida pelo tutor.

12	6	14	8	14
16	12	19	9	10

2. Durante 12 dias consecutivos, fez-se o seguinte registo do número de utentes numa unidade sanitária:

   42, 35, 41, 38, 35, 35, 36, 38, 36, 42, 35 e 36.

   a) Organize os dados numa tabela de frequências absolutas.
   b) Indique a moda e justifique a resposta.
   c) Calcule a mediana.
   d) Determine a média aritmética dos utentes.

Passe para o seu caderno o resumo a seguir.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta lição acabamos de ver as medidas de centralização que são as que tendem a centra-se no centro do conjunto de dados quando ordenados, que são a moda, que representa maior ocorrência de frequência nos dados. Mediana, que é o valor que ocupa o lugar central da distribuição quando os dados estão agrupados por ordem crescente ou decrescente e finalmente a média aritmética que é o quociente da soma dos valores de todos os dados pelo número total dos mesmos que é **"n"**.

Compare os seus resultados com os que são apresentados a seguir.

Chave de Correcção

1. Moda: 12 e 14, é bimodal

   Mediana: $M_0 = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12$

   Média aritmética: $\overline{X} = \frac{6+8+9+10+2x12+2x14+16+19}{10} = \frac{120}{10} = 12$

Venda proibida

2. a)

x_i	f_i
35	4
36	3
38	2
41	1
42	2
Tot	12

b) A moda é 35, porque a maior frequência é 4

c) Mediana: $M_0 = \frac{36+36}{2} = \frac{72}{2} = 36$

d) Média aritmética: $\overline{X} = \frac{35x4+36x3+38x2+41x1+42x2}{12} = \frac{449}{12} = 37{,}4$

A média aritmética é de 37 utentes por dia. O arredondamento é por tratar-se de pessoas.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 6: Equação quadrática

Introdução

Caro aluno, nesta lição, vamos dar continuidade dos conteúdos da álgebra com enfoque nas equações quadráticas e na resolução destas com recurso à lei do anulamento do produto.

Preste a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar as equações quadráticas;
- Enunciar a lei do anulamento do produto;
- Resolver as equações quadráticas incompletas aplicando a factorização;
- Resolver as equações quadráticas incompletas aplicando a lei do anulamento do produto.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Noção de equação quadrática

Equação quadrática ou do segundo grau, é toda aquela que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b, c são coeficientes reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad a = 2; \quad b = -3; \quad c = 1$

b) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0; \quad a = 1; \quad b = \frac{2}{3}; \quad c = 0$

c) $-2x^2 + \sqrt{5} = 0; \quad a = -2; \; b = 0; \quad c = \sqrt{5}$

d) $5x^2 = 0; \quad a = 5; \quad b = 0; \quad c = 0$

As equações quadráticas podem ser completas ou incompletas.

Equações quadráticas completas, são aquelas que os coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, não são nulos.

Exemplos:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad a = 2; \quad b = -3; \quad c = 1$

b) $5x^2 + x - 7 = 0; \quad a = 5; \quad b = 1; \quad c = -7$

c) $x^2 - \frac{2}{3}x + 9 = 0; \quad a = 1; \quad b = -\frac{2}{3}; \quad c = 9$

Venda proibida

Equações quádricas incompletas, são aquelas em que pelo menos um dos coeficientes $\boldsymbol{b}$ ou $\boldsymbol{c}$ é nulo.

Exemplos:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$; $\quad a = 1\,;\ b = \frac{2}{3}\,;\ c = 0$

b) $-2x^2 + \sqrt{5} = 0$; $\quad a = -2;\ b = 0;\ c = \sqrt{5}$

c) $5x^2 = 0$; $\quad a = 5;\ b = 0;\ c = 0$

Lei de anulamento de produto

A lei do anulamento do produto diz o seguinte: **Se o produto de dois ou mais factores é nulo, então, pelo menos um deles é nulo.**

Consideremos a seguinte igualdade: $\boldsymbol{U \times V = 0}$. Para esta igualdade ser verdadeira, o factor $\boldsymbol{U}$ deve ser igual a zero, ou $\boldsymbol{V}$ deve ser igual a zero. Isto é:

$\boldsymbol{U = 0 \ \vee \ V = 0}$; o símbolo $\vee$ significa ou.

Exemplos:

Vamos aplicar a lei de anulamento de produto na seguinte igualdade:

$$(x-1).(x-5) = 0$$

Portanto, o primeiro factor é $(x-1)$**,** o segundo factor é: $(x-5)$**.** Então, o primeiro factor deve ser igual a zero, assim: $(x-1) = 0$ ou o segundo factor deve ser igual a zero.

Assim: $(x-5) = 0$**.**

Portanto, ao resolver fica assim:

$(x-1).(x-5) = 0$

$x - 1 = 0 \vee x - 5 = 0$

$x = 1 \ \vee x = 5$

Solução: $\{1; 5\}$

Resolução de equações quadráticas incompletas do tipo: $\boldsymbol{ax^2 = 0}$; $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$; $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Caro aluno, na resolução de equações quadráticas incompletas, usa se muitas vezes a lei do anulamento do produto anteriormente estudada.

1. **Equação quadrática do tipo $\boldsymbol{ax^2 = 0}$**

Equações quadráticas do tipo $\boldsymbol{ax^2 = 0}$, são aquelas em que os coeficientes $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$ são iguais a zero. Isto é: $\boldsymbol{b = 0}$ *e* $\boldsymbol{c = 0;}$ o valor de a é diferente de zero. Isto: $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Exemplos:

a) $7x^2 = 0$; Os coeficientes são: $a = 7; b = 0$ *e* $c = 0$

Venda proibida

b) $-5x^2 = 0$;Os coeficientes são: $a = -5; b = 0\ e\ c = 0$

c) $\frac{2}{3}x^2 = 0$; Os coeficientes são: $a = \frac{2}{3}; b = 0\ e\ c = 0$

Para resolver este tipo de equações aplicando a lei de anulamento de produto, deve-se decompor (factorizar) a equação quadrática, e igualar os factores a zero, para determinar as soluções que são $\boldsymbol{x_1}\ e \boldsymbol{x_2}$. Para este tipo, $\boldsymbol{x_1}$é sempre igual à $\boldsymbol{x_2}$. Isto é: $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 0}$.

$$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$$

Solução: $x = \{0\}$

Exemplo:

$5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; s = \{0\}$

2. Equação quadrática do tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Equações quadráticas do tipo $ax^2 + bx = 0$, são todas aquelas em que o valor de c é igual a zero. Isto é: $a \neq 0; b \neq 0\ e\ c = 0$.

Exemplos:

a) $x^2 - 2x = 0$; Os coeficientes são: $a = 1; b = -2\ e\ c = 0$

b) $-x^2 + 7x = 0$; Os coeficientes são: $a = -1; b = 7\ e\ c = 0$

c) $-2x^2 + \frac{5}{2}x = 0$; Os coeficientes são: $a = -2; b = \frac{5}{2}\ e\ c = 0$

d) $\sqrt{3}x - \frac{1}{5}x^2 = 0$;Os coeficientes são: $a = -\frac{1}{5}; b = \sqrt{3}\ e\ c = 0$

Para resolver as equações do tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$**,** deve-se decompor (factorizar) a equação colocando em evidência o factor comum x e aplicar a lei de anulamento de produto. Assim:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Solução: $x = \left\{-\frac{b}{a}, 0\right\}$

Exemplo:

$2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2};\ s = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$

3. Equação quadrática do tipo $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Equações quadráticas do tipo $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ são todas aquelas em que o valor de coeficiente $\boldsymbol{b}$ é igual a zero. Isto é $\boldsymbol{a \neq 0; b = 0\ e\ c \neq 0.}$

Venda proibida

Exemplos:

a) $x^2 - 5 = 0$; Os coeficientes são: $a = 1; b = 0\ e\ c = -5$

b) $-3x^2 + 7 = 0$; Os coeficientes são: $a = -3; b = 0\ e\ c = 7$

c) $3x^2 + 1 = 0$; Os coeficientes são: $a = 3; b = 0\ e\ c = 1$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0$;Os coeficientes são: $a = -\frac{3}{2}; b = 0\ e\ c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver as equações do tipo $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$**,** podemos proceder da seguinte forma:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Solução: $\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, +\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

Exemplo:

$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25};\ x = \pm 5\ s = \{-5; 5\}$

Resolva a seguir os exercícios

Exercícios

Caro aluno, depois de termos abordado a noção de equações quadráticas, resolução das equações quadráticas incompletas usando a lei do anulamento do produto, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

1. Considere as equações quadráticas abaixo, e identifique as completas e as incompletas:

a) $9x^2 + 25x - 10 = 0$ b) $-2x^2 + 4x - 8 = 0$ c) $x^2 = 3x + x$

d) $36x^2 - 12x = 0$ e)$-\frac{1}{2}x^2 = -2 + \frac{3}{4}x$ f)$x^2 - 2 = 0$ g) $x^2 - 0x + 0 = 0$

2. Considere as equações quadráticas abaixo, e indique os valores dos coeficientes $\boldsymbol{a, b\ e\ c}$:

a) $9x^2 + 25x - 10 = 0$ b) $-2x^2 + 4x - 8 = 0$ c) $x^2 = 3x + x$ d) $36x^2 - 12x = 0$

e)$-\frac{1}{2}x^2 = -2 + \frac{3}{4}x$ f) $x^2 - 2 = 0$ g) $-x^2 - 0x + 0 = 0$

3. Resolva as seguintes equações quadráticas aplicando a lei de anulamento de produto:

a) $-20x^2 = 0$ b) $-7x^2 + 14 = 0$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}x^2 = 0$ d) $x^2 = 3x$ e) $(x - 6)^2 - 9 = 0$

f) $10x^2 + 10 = 0$

Passe para o seu caderno o resumo a seguir.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu resolver equações quadráticas incompletas, aplicando a lei de anulamento do produto, que diz o seguinte: **Se o produto de dois ou mais factores é nulo, então, pelo menos um deles é nulo.**

Compare os seus resultados com os que são apresentados a seguir.

Chave de Correcção

1. a) Completa b) Completa c) Incompleta d) Incompleta e) Completa f) Incompleta g) Incompleta

2. a) $a = 9;\ b = 25;\ c = -10$ b) $a = -2;\ b = 4;\ c = -8$ c) $a = 1; b = -3; c = -1$ d) $a = 36;\ b = -12;\ c = 0$e)$a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{3}{4};\ c = 2$ f)$a = 1; b = 0; c = -2$ g) $a = -1; b = 0; c = 0$

3. a) $Sol: x = \{0\}$ b) $Sol: x = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ c) $Sol: x = \{0\}$ d) $Sol: x = \{0; 3\}$ e) $Sol: x = \{3; 9\}$ f) $Sol: x = \{\emptyset\}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 7: Fórmula resolvente

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido na lição anterior as equações quadráticas incompletas, a sua resolução aplicando a lei do anulamento do produto, nesta lição vai abordar as equações quadráticas completas, a sua resolução aplicando a lei do anulamento do produto e a formula resolvente.

Chamamos desde já a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver as equações quadráticas completas aplicando a lei do anulamento do produto;
- Resolver as equações quadráticas completas aplicando a Fórmula resolvente.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Equações quadráticas Completas

Equações quadráticas completas, são aquelas que os coeficientes a, b e c, não são nulos, isto é, $a \neq 0, b \neq 0 \; e \; c \neq 0$

Exemplos:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad a = 2; \quad b = -3; \quad c = 1$

b) $-3x^2 + 5x - 1 = 0; \quad a = -3; \quad b = 5; \quad c = -1$

c) $-\frac{2}{3}x + x^2 - 2 = 0 \;\; a = 1 \; b = -\frac{2}{3} \;\; c = -2$

Resolução de equações quadráticas completas

Para resolver uma equação quádrica completas, pode ser feita em duas formas:

1. **Uso da lei do anulamento do produto**

Caro aluno, a lei de anulamento de produto é aplicável também nas equações quadráticas completas. Para resolver uma equação quadrática do tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, aplicando a lei de anulamento de produto, devemos factorizar (decompor) a equação aplicando os procedimentos estudados na decomposição dos polinómios.

Exemplos:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0 \;\; a = 1; \quad b = -6; \quad c = 9$

Venda proibida

1º Factorizar o trinómio do primeiro membro, usando casos notáveis da multiplicação dos polinómios;

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2.3x + 3^2$ Esta expressão nos faz recordar quadrado de uma diferença na multiplicação de polinómios ou seja: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2.3x + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3) = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3).(x-3) = 0$ Daqui já pode se aplicar a lei do anulamento do produto:

$x - 3 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = 3 \vee x = 3$ Sol. $\{3\}$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0 \quad a = 1; \quad b - 6; \quad c = 5$

Factorizar o trinómio do primeiro membro, teremos que:

1º Adicionar e subtrair no 1º membros da equação, o quadrado da metade do coeficiente **b** (neste caso o coeficiente $b = -6$), a sua metade é -3, então o seu quadrado fica $(-3)^2$.

Assim teremos: $x^2 - 6x + 5 + (-3)^2 - (-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + (-3)^2 + 5 - (-3)^2 = 0$

Ao fazer esta operação, os três primeiros termos, sempre traduzem um caso notável que pode ser quadrado de uma soma ou quadrado de uma diferença. Para este caso, trata se de quadrado de uma diferença, isto é: $x^2 - 6x + (-3)^2 + 5 - (-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 5 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 2^2 = 0$ Aqui temos novamente um outro caso notável, que é diferença de quadrado, onde: $(x - 3 - 2) \times (x - 3 + 2) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1).(x-5) = 0$ Aplicando a lei do anulamento do produto teremos:

$x - 1 = 0 \vee x - 5 = 0$

$x = 1 \vee x = 5$

Solução: $x = \{1; 5\}$

2. Fórmula resolvente

Caro aluno, partindo das transformações feitas no segundo exemplo anterior, para aplicar a lei do anulamento do produto na resolução das equações quadráticas do tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, Agora vamos fazer as mesmas transformações já no caso geral ($\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$) para encontrarmos uma fórmula que nos permite resolver qualquer equação deste tipo.

Dada a equação $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, passando o coeficiente **c** para o segundo membro $\boldsymbol{ax^2 + bx = -c}$. Dividindo todos termos da equação por coeficiente **a**, $\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}}$

Venda proibida

Adicionando ambos membros na equação o quadrado da metade do coeficiente $\frac{b}{a}$ teremos: $\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ **Adicionando as duas fracções do segundo membro, teremos:**

$\boldsymbol{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}}$**.** Isto é:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}}$**.** Para isolar o $\boldsymbol{x}$ temos que envolver ambos os membros a raiz quadrada e teremos: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$;

Simplificando o primeiro membro teremos:$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$; passamos o termo $+\frac{b}{2a}$para o segundo membro e muda de sinal fica:$-\frac{b}{2a}$, isto é:

$\boldsymbol{x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$; separamos os radicandos aplicando a propriedade da divisão dos radicandos, fica: $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow = x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}}$; o valor, $\boldsymbol{\sqrt{4a^2} = 2a}$, então fica: $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$; portanto uma equação quadrática tem no máximo duas soluções, então teremos a fórmula resolvente de seguinte modo:

$$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Onde: $\boldsymbol{a, b\ e\ c}$ são coeficientes reais. Isto é: $(\boldsymbol{a \neq 0; b\ e\ c}) \epsilon R$;

O radicando $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ chama-se **Binómio Discriminante.** E representa-se por: Δ lê-se **delta.** Então, podemos igualar o radicando $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ por Δ**.** Isto é:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Então, a fórmula resolvente também pode ficar da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Na base do valor de discriminante (Δ), teremos três condições, para determinarmos as soluções de uma equação quadrática. Que são:

- Se o $\Delta > 0$**; a equação tem duas soluções ou raízes reais diferentes;**
- Se o $\Delta = \boldsymbol{0}$**; a equação tem duas soluções ou raízes reais iguais ou raiz dupla;**

Venda proibida

- Se o $\Delta < 0$**; a equação não tem soluções ou não tem raízes reais.**

Exemplo:

Aplicando a fórmula resolvente, determine as soluções de cada uma das seguintes equações:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 + x + 7 = 0$

Resolução:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Primeiro devemos determinar os valores dos coeficientes $a, b\ e\ c$. Que são:

$a = 1; b = -6\ e\ c = 5$; em seguida podemos substituir na fórmula resolvente. Assim:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times (1) \times (5)}}{2 \times (1)};$$

Em seguida, calculamos o que está fora e dentro do radicando. Assim:

$x_{1;2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times (1) \times (5)}}{2 \times (1)} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{+6 \pm \sqrt{16}}{2} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{+6 \pm 4}{2};$

veja que o discriminante é igual à 16, isto é: $\Delta = 16$, portanto é maior que zero, $16 > 0$. Então, teremos duas soluções diferentes. Agora podemos calcular os valores de $x_1\ e\ x_2$; assim:

$x_1 = \frac{+6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \leftrightarrow x_1 = 1\ \vee\ x_2 = \frac{+6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5.\ Sol: x = \{1; 5\}$. São duas soluções.

b) $x^2 - 6x + 9 = 0 \quad a = 1; \quad b - 6; \quad c = 9$

Calculando o valor do binómio descriminante teremos:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.9$

$\Delta = 36 - 36$

$\Delta = 0$

Fórmula resolvente**:**

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Substituindo na fórmula resolvente teremos

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$x_1 = x_2 = 3$ Solução: $x = \{3\}$

c) $x^2 + x + 7 = 0 \quad a = 1, b = 1, c = 7$

Calculando o valor do binómio descriminante teremos:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4.1.7$

$\Delta = 1 - 28$

$\Delta = -27$

O valor do binómio descriminante é negativo, isto é: $\Delta < 0$, logo, a equação não tem solução em $\mathbb{R}$

Venda proibida

Resolva os exercícios a seguir.

Exercícios

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre equações quadráticas completas, sua resolução usando a lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

1. Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:
   a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$ **b)** $3x^2 + 55 = 0$
   c) $x^2 - 6x = 0$ **d)** $x^2 - 10x + 25 = 0$

2. Resolva as seguintes equações quadráticas aplicando a lei de anulamento de produto:
   a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $3x^2 - x - 2 = 0$ d) $5x^2 + 36x - 32 = 0$

3. Resolva as seguintes equações:
   a) $x^2 - x - 20 = 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 = 0$
   c) $x^2 - 8x + 7 = 0$ **d)** $x^2 - 7x - 9 = 0$

4. Dentre os números $-2, 0, 1, 4$, quais deles são raízes da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$?

Anote no seu caderno o resumo a seguir**.**

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu o que é uma equação quadrática completa, sua resolução usando a lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente. Destacamos igualmente que na resolução usando a fórmula resolvente, é necessário primeiro determinar o binómio descriminante, onde o valor do binómio descriminante vai nos permitir prever se a equação tem solução ou não. Se este for maior que zero, a equação tem duas raízes reais e diferentes, se for igual a zero a equação tem duas raízes reais iguais e se for menor que zero a equação não tem raízes reais.

Compare os seus resultados com estes

Venda proibida

Chave de Correcção

1. a) Completa b) incompleta c) incompleta d) completa
2. a) $Sol: x = \{-2; 3\}$ b) $Sol: x = \{-3\}$ c) $Sol: x = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$ d) $Sol: x = \left\{-\frac{4}{5}; 8\right\}$
3. a) $x_1 = -4\ e\ x_2 = 5$ b) $x_1 = -1\ e\ x_2 = 4$ c) $x_1 = 1\ e\ x_2 = 7$
4. -2 e 4

Venda proibida

LIÇÃO Nº 8: Soma e Produto de raízes

Introdução

Estimado aluno, depois de você ter aprendido na lição anterior as equações quadráticas completas, a sua resolução aplicando a lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente, nesta lição vamos abordar a soma e produto das raízes de equações quadráticas, e também a factorização do trinómio. Chamamos desde já a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar a soma e o produto de raízes de uma equação quadrática
- Factorizar uma equação quadrática.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Soma e Produto de raízes

1. Soma das raízes

Caro aluno, considerando a equação quadrática na forma canónica $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, se dividirmos todos os termos da equação acima por **a**, teremos:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0} \Leftrightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$**;** simplificando a expressão, teremos:

$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0;}$ portando, o coeficiente $\frac{b}{a}$ representa a soma das raízes $\boldsymbol{x_1 + x_2}$**,** e como na equação quadrática tem sinal positivo, então na soma vai assumir valor negativo. Isto é: a soma será dada por: $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$**.** Significa que, $\boldsymbol{S = x_1 + x_2}$ **ou** $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$.

A mesma fórmula podemos obter somando as raízes a partir da fórmula resolvente, isto é:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + \left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-b - b - \sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\frac{b}{a}}$$

Venda proibida

Nota: Lembre-se que para uma equação quadrática tenha raízes, o binómio descriminante deve ser maior ou igual a zero, isto é: $\triangle \geq 0$

Exemplo: Determinemos a soma das raízes da equação $\boldsymbol{3x^2 + 5x - 2 = 0}$.

Resolução:

1º Extraímos os coeficientes $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ que são: $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 5}$ e $\boldsymbol{c = -2}$

2º Determinamos o valor do binómio descriminante para ver se a equação tem ou não raízes reais.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4.3.(-2)$

$\Delta = 25 + 24 = 29$ Logo a equação tem raízes reais.

3º Aplicação da fórmula: $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$

Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula teremos:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$$

Assim, determinamos o valor da soma das raízes da equação dada.

2. Produto das raízes

O produto das raízes$\boldsymbol{x_1 \times x_2}$, será dado pelo coeficiente $\boldsymbol{\frac{c}{a}}$**,** extraído na equação:

$\boldsymbol{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0}$; e será representado por, $\boldsymbol{P = \frac{c}{a}}$**.**

Significa que, $\boldsymbol{P = x_1 \times x_2}$ ou $\boldsymbol{P = \frac{c}{a}}$.

A mesma fórmula pode obter multiplicando as raízes a partir da fórmula resolvente, isto é: $x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})\times(-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{2a \times 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4 \times a \times a} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$

Portanto,

$$\boldsymbol{P = x_1 \times x_2 \Leftrightarrow P = \frac{c}{a}}$$

Exemplo: Considerando a equação dada anteriormente $\boldsymbol{3x^2 + 5x - 2 = 0}$ vamos determinar o produto das suas raízes.

Como já sabemos que a equação tem raízes, pois calculamos o valor do binómio deu um número maior que zero, então podemos aplicar directamente a fórmula do cálculo do produto das raízes:

$\boldsymbol{P = \frac{c}{a}}$

Venda proibida

Os coeficientes $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{c}$**,** que são: $\boldsymbol{a = 3\ e\ \ c = -2}$. Então, substituindo na fórmula teremos: $\boldsymbol{P = \frac{c}{a}} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P = \frac{(-2)}{3} = -\frac{2}{3}}$**.**

Assim, determinamos o valor de produto das raízes.

Partindo das fórmulas da soma e produto, $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$ e $\boldsymbol{P = \frac{c}{a}}$**;** podemos substituir na equação, $\boldsymbol{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0}$**;** para tal, na fórmula $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$**,** multiplicamos ambos os membros por (-1), e fica: $(-1)\ \boldsymbol{S = -\frac{b}{a}(-1) \leftrightarrow -S = \frac{b}{a}}$**.** Agora podemos substituir na fórmula. Assim:

$\boldsymbol{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0}$**.** Esta fórmula $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$ é da **soma e produto das raízes**. A mesma fórmula é conhecida como fórmula de **VIETT**.

Esta fórmula, permite escrever a equação quadrática conhecendo a soma das suas raízes assim como o produto das mesmas raízes. Por exemplo, escreva a equação quadrática cuja soma das raízes é 5 e o produto das mesmas é 6.

Fórmula: $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$

$$\boldsymbol{S = 5 \text{ e } P = 6}$$

Substituindo na fórmula teremos: $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ Esta é a equação quadrática pretendida.

Factorização de um trinómio $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$

Caro aluno, a partir das soluções $\boldsymbol{x_1 e\ x_2}$ da equação quadrática $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$**,** podemos factorizá-la, ficando da seguinte maneira: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)}$**.**

Ex: Factorizemos a seguinte equação quadrática: $\boldsymbol{3x^2 + 5x - 2 = 0}$:

Primeiro devemos determinar os valores de $\boldsymbol{x_1 e x_2}$**,** aplicando a fórmula resolvente. Assim:

Extraímos os coeficientes $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$. Assim: $\boldsymbol{a = 3, b = 5\ e\ c = -2}$, substituímos na fórmula abaixo:

$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}}$

$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} \leftrightarrow x_{1;2} = \frac{-5 \pm 7}{6}}$; $\boldsymbol{x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2_{\text{v}} x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$; já determinamos os valores de $\boldsymbol{x_1 e x_2}$que são: $\boldsymbol{x_1 = -2}$ e $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{3}}$. Agora podemos factorizar.

Assim: aplicamos a fórmula: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$; e substituímos na mesma pelas raízes

$\boldsymbol{x_1 = -2}$ **e** $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{3}}$**; e o coeficiente** $\boldsymbol{a = 3}$**, fica:**

$\boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \leftrightarrow 3[x - (-2)]\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0}$; conjugando os sinais dentro de parêntesis rectos teremos: $\boldsymbol{3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = 0}$. Assim, factorizamos a equação:

Venda proibida

$\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$. Significa que a equação, $\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$ é equivalente à $\mathbf{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = 0}$. Isto é:

$$\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0 \iff 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = 0\ .}$$

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre soma e produto das equações quadráticas, factorização do trinómio $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

Exercícios

1. Considere as equações abaixo, e determine os valores de $\boldsymbol{k, y}$ e $\boldsymbol{w}$de modo que a soma seja **-2** e o produto seja **5**, em cada alínea:

$a)\ x^2 + (k+1)x + 2k = 0$ b) $x^2 + 2(y+1)x - 2y = 0$ c) $x^2 - (w-7)x - \frac{1}{2}w = 0$

2. Na equação $2px^2 + 3pqx + 3q = 0$, a soma das raízes é 9 e o produto é 12. Calcule $p + q$.
3. Factorize as seguintes equações quadráticas:

a) $-2x^2 + 2x + 12 = 0$ b) $-x^2 - 6x - 9 = 0$ c) $3x^2 - x - 2 = 0$ d) $5x^2 + 36x - 32 = 0$

Faca o seu resumo no caderno

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu as fórmulas de soma e produto das raízes de uma equação quadrática. Foi igualmente abordado nesta lição o conteúdo sobre factorização do trinómio quadrático.

Confira a Chave de Correcção

Chave de Correcção

1. a) $s = -2; k = 1\ e\ P = 5; k = \frac{5}{2}$ b) $s = -2; y = 0\ eP = 5; y = -\frac{5}{2}$ c) $s = -2; w = 5\ eP = 5; w = -10$
2. $-\frac{27}{4}$
3. a) $-2(x+2)(x-3)$ b) $-(x-3)^2$ c) $3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-1)$ d) $5\left(x + \frac{4}{5}\right)(x-8)$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 9: Resolução de problemas conducentes às equações quadráticas

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido na lição anterior as fórmula de cálculo da soma e produto das raízes de uma equação quadrática, assim como a factorização do trinómio $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, nesta lição vamos continuar com os conteúdos sobre as equações quadrática mas já na perspectiva de saber como resolver problemas conducentes a obtenção de uma equação quadrática. Chamamos desde já a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Equacionar problemas conducentes às equações quadráticas;
- Resolver problemas conducentes às equações quadráticas;

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Problemas conducentes às equações quadráticas

Caro aluno, problemas conducentes às equações quadráticas, são problemas que traduzem um pensamento matemático que para sua resolução passam pela composição de uma equação quadrática. Esses problemas podem ser resolvidos em primeiro lugar equacionando-os na forma de equação quadrática e em seguida aplicar os procedimentos da resolução das equações quadráticas para obter as soluções.

Resolução de problemas conducentes às equações quadráticas

Para resolver problemas que conduzem à obtenção de equações quadráticas deve obedecer os seguintes passos:

1º Ler com atenção e interpretar o problema.

2º Fazer a escolha das incógnitas e escrever a equação.

3º Resolver a equação obtida.

4º Verificar as soluções encontradas.

5º Analisar as soluções e dar resposta ao problema.

Exemplo:

Determine o perímetro de um triângulo rectângulo cujas medidas são dadas por três números inteiros consecutivos.

Venda proibida

Resolução:

Caro aluno, para este problema podemos usar $\boldsymbol{x}$ como nossa incógnita. E para representar os três números consecutivos, o primeiro número pode ser representado por x, o segundo por $x+1$ e o terceiro número por $x+2$.

Este é um problema geométrico, sendo assim é recomendável que se faça o esboço da figura referida no problema.

Tratando se de um triângulo rectângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar os comprimentos dos lados do triângulo. Considerando o lado maior $x+2$ hipotenusa, o lado $x+1$ um dos catetos e o outro lado x o outro catecto.

Como o teorema de Pitágoras relaciona os lados de um triângulo rectângulo pela fórmula: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$ onde $\boldsymbol{c}$ é a hipotenusa, e $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são os catetos. Substituindo na fórmula teremos:

$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$

Desenvolvendo os dois casos notáveis teremos:

$$x^2 + 4x + 2^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 = x^2 + 4x + 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x - 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolvendo esta equação teremos:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \; a = 1, b = -2, c = -3$$

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

$$\triangle = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16$$

Aplicando a fórmula resolvente teremos:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Verificando as raízes, vamos considerar a raiz positiva dado que trata se de medidas de lados de um triângulo, sendo assim:

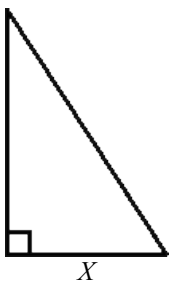
O lado $x = 3$

Lado $x + 1 = 3 + 1 = 4$

Lado: $x + 2 = 3 + 2 = 5$

Como cálculo do perímetro de um triângulo e dado pela fórmula:

$P_\Delta = l_1 + l_2 + l_3$



Venda proibida

Substituindo os valores correspondentes aos lados na fórmula teremos:

$P_{\Delta} = 3 + 4 + 5 = 12$

Resposta:

O perímetro do triângulo é de 12 unidades de comprimento.

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre a resolução de problemas conducentes a obtenção de equações quadráticas, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

Exercícios

1. A soma dos quadrados de três números inteiros consecutivos é **50**. Determine-os.
2. O perímetro de um triângulo equilátero é $\mathbf{36}\boldsymbol{cm}$. A altura relativa à base é de, $\mathbf{6}\boldsymbol{cm}$**.** Determine a área do triângulo.
3. A idade do Júnior será, daqui a 3 anos, o quadrado da idade que tinha há 3 anos. Qual e a idade do Júnior?

Faca o seu resumo no caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a aplicar as equações quadráticas na resolução de alguns problemas do nosso quotidiano.

Confira a seguir os seus resultados.

Chave de Correcção

1. Sol: $= \{-5; -4; -3\} ou \{3; 4; 5\}$

2. $A = 18\ cm^2$
3. 6 anos

Venda proibida

LIÇÃO Nº 10: Introdução ao estudo da função quadrática

Introdução

Caro aluno, acabou de aprender, nas lições anteriores, a função linear. Nesta lição, vamos introduzir um outro tipo especial de função – a função quadrática. Vai aprender este tipo de função a partir de exemplos e actividades.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar uma função quadrática;
- Identificar a expressão analítica de uma função quadrática;
- Representar graficamente uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$;
- Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Conceito de função quadrática

O que é uma função quadrática?

Certamente que está fazendo um monte de questões a respeito de função quadrática. É normal que isso aconteça, pois, este conceito é novo para i. Preste atenção nesta lição, e vai perceber este conceito com muita facilidade.

Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Vejamos os seguintes exemplos:

- $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, onde $a = 3,\ b = -2$ e $c = 5$;
- $f(x) = -x^2 + 6x$, onde $a = -1,\ b = 6$ e $c = 0$;
- $f(x) = -2x^2 - 7$, onde $a = -2,\ b = 0$ e $c = -7$;
- $f(x) = 4x^2$, onde $a = 4,\ b = 0$ e $c = 0$.

Qual é a característica comum em todas funções?

Se reparar atentamente nas funções, acima escritas, vai notar que em todas funções o valor de $\boldsymbol{a}$ é diferente de zero, razão pela qual na definição é colocada a restrição $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Venda proibida

Contudo, os outros elementos (***b*** e ***c***) podem assumir o valor zero.

Quando pelo menos um dos valores de ***b*** e ***c*** é igual a zero, a função quadrática é dita **incompleta**.

Exemplo

- $:f(x) = -x^2 + 6x$, onde a $= -1,$ b $= 6$ e c $= 0$;
- $f(x) = -2x^2 - 7$, onde a $= -2,$ b $= 0$ e c $= -7$;
- $f(x) = 4x^2$, onde a $= 4,$ b $= 0$ e c $= 0$.

Comecemos por estudar o caso da função quadrática em que a $\neq 0,$ b $= 0$ e c $= 0$ (função do tipo $f(x) = ax^2$).

Função do tipo $f(x) = ax^2$

É um caso particular da função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a $\neq 0,$ b $= 0$ e c $= 0$.

Exemplos:

- $f(x) = -6x^2$, onde a $= -6,$ b $= 0$ e c $= 0$;
- $f(x) = x^2$, onde a $= 1,$ b $= 0$ e c $= 0$.

Gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2$

Para construir o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2$, atribuímos a ***x*** alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores correspondentes de ***y*** para cada valor de ***x*** e, em seguida, ligamos os pontos obtidos.

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = -2x^2$.

Tabela

x	$y = -2x^2$
-2	$-2 \times (-2)^2 = -2 \times 4 = -8$
-1	$-2 \times (-1)^2 = -2 \times 1 = -2$
0	$-2 \times 0^2 = -2 \times 0 = 0$
1	$-2 \times 1^2 = -2 \times 1 = -2$
2	$-2 \times 2^2 = -2 \times 4 = -8$

Gráfico

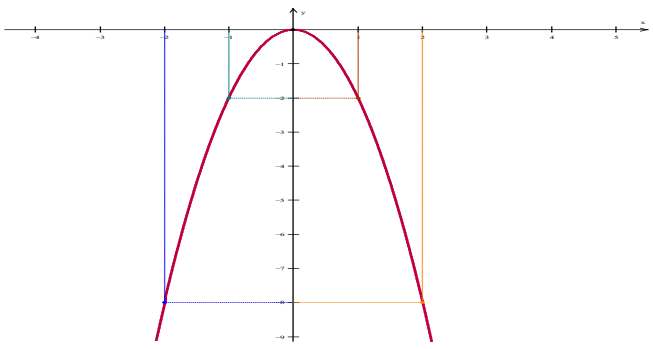


Gráfico 7 – Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**.

Venda proibida

Estudo completo da função quadrática

Depois de construirmos o gráfico da função quadrática do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$, vamos fazer o estudo completo deste tipo de função, tendo como base a função anterior, $f(x) = -2x^2$.

a) Domínio

O domínio da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que x pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, o x pode assumir qualquer número real.

Portanto, o domínio da função $f(x) = -2x^2$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é maior ou igual a y_V");
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é menor ou igual a y_V").

Se analisarmos a função $f(x) = -2x^2$, vemos que $a = -2$, logo: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 0\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]-\infty;\ 0]\}$

c) Zeros da função

Chamam-se zeros da função quadrática, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Se tomarmos a função $f(x) = -2x^2$:

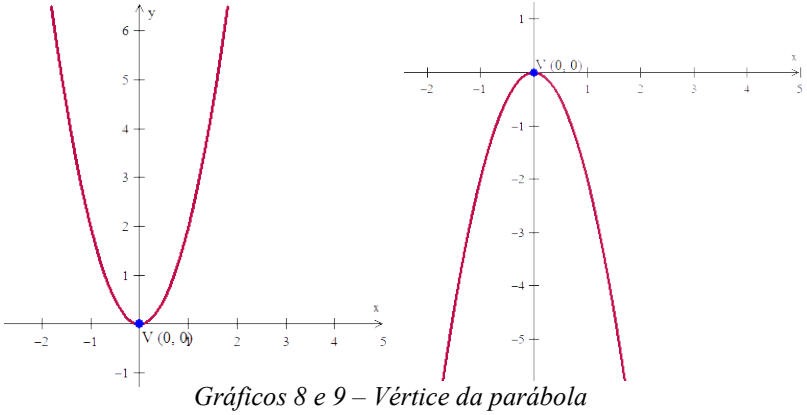
$$f(x) = 0 \ \leftrightarrow -2x^2 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{0}{-2} \ \rightarrow \ x^2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = x_2 = 0$$

Nota: Para toda função do tipo $f(x) = ax^2$, os zeros da função são iguais a 0, isto é, $x_1 = x_2 = 0$.

d) Vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V,** chamado **vértice da parábola.**

Para a função do tipo $f(x) = ax^2$, as coordenadas do vértice são $x_V = 0$ e $y_V = 0$. Portanto, o vértice **V** é definido da seguinte maneira: V (0, 0).



Gráficos 8 e 9 – Vértice da parábola

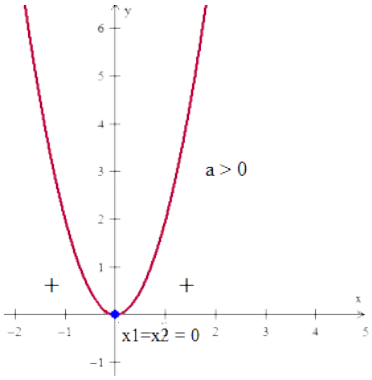
Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo V (0, 0); se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo V (0, 0).

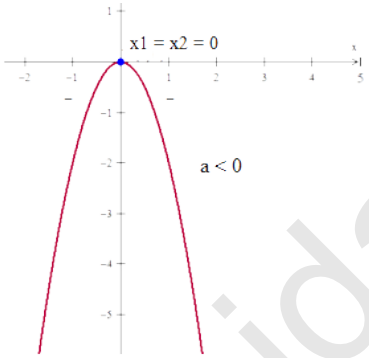
Venda proibida

Para o caso da função $f(x) = -2x^2$, uma vez que $a = -2$, a parábola fica voltada para baixo e as coordenadas do vértice são V (0, 0).

e) Variação do sinal da função

Determinar a variação do sinal de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ significa determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.





Gráficos 10 e 11 – Variação do sinal da função

Para o caso concreto de $f(x) = ax^2$, há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $f(x)$ é positiva para qualquer x diferente de x_1 ($f(x) > 0, \forall x \neq x_1$);
- Se $a < 0$, $f(x)$ é negativa para qualquer x diferente de x_1 ($f(x) < 0, \forall x \neq x_1$).

Para o caso da função $f(x) = -2x^2$, uma vez que $a = -2$, a variação do sinal é $f(x)$ é negativa para qualquer x diferente de 0 ($f(x) < 0, \forall x \neq 0$).

f) Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

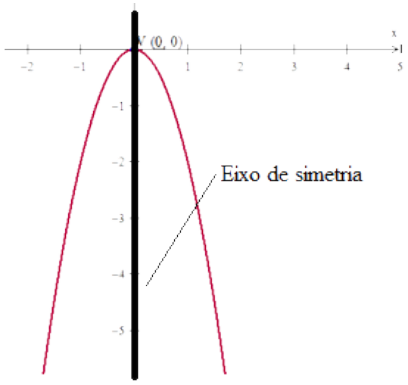
- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

Para o caso da função $f(x) = -2x^2$, uma vez que $a = -2$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ 0[$ e decrescente em $]0;\ +\infty[$.

g) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Venda proibida



Para a função $f(x) = -2x^2$, o eixo de simetria é $x = 0$.

Gráfico 12 – Eixo de simetria

Depois de ler bem o conteúdo da lição, acompanhe a resolução da actividade a seguir para dissipar qualquer dúvida.

Preste atenção na seguinte actividade resolvida.

Actividade

Construa o gráfico da função $f(x) = 3x^2$ e faça o seu estudo completo.

Resolução

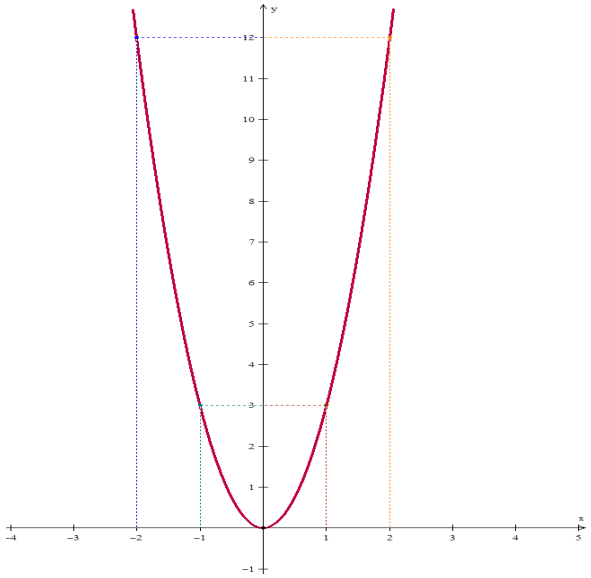
Para construir o gráfico devemos, primeiro, construir uma tabela dos valores de x e y e, posteriormente, fazer a correspondência desses valores no S.C.O.

Após a construção do gráfico, fazer o estudo da função seguindo os parâmetros acima apresentados.

- Tabela

x	$y = 3x^2$
-2	$3 \times (-2)^2 = 3 \times 4 = 12$
-1	$3 \times (-1)^2 = 3 \times 1 = 3$
0	$3 \times 0^2 = 3 \times 0 = 0$
1	$3 \times 1^2 = 3 \times 1 = 3$
2	$3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$

- Gráfico



- Estudo completo da função

a) Domínio

O domínio da função $f(x) = 3x^2$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função $f(x) = 3x^2$ é: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]0;\ +\infty]\}$

Venda proibida

c) Zeros da função

$f(x) = 0 \ \leftrightarrow 3x^2 = 0 \ \rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \ \rightarrow x^2 = 0 \ \rightarrow x_1 = x_2 = 0$

d) Vértice da parábola

Para a função $f(x) = 3x^2$, uma vez que $a = 3$, a parábola fica voltada para cima e as coordenadas do vértice são V (0, 0).

e) Variação do sinal da função

Para a função $f(x) = 3x^2$, uma vez que $a = 3$, a variação do sinal é: $f(x)$ é positiva para qualquer x diferente de 0 ($f(x) > 0, \forall x \neq 0$).

f) Variação da função (monotonia)

Para o caso da função $f(x) = 3x^2$, uma vez que $a = 3$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ 0[$ e crescente em $]0;\ +\infty[$.

g) Equação do eixo da simetria

Para a função $f(x) = 3x^2$, o eixo de simetria é $x = 0$.

Tem alguma dúvida? Acredito que não!
Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios seguintes no caderno. Bom trabalho!

Exercícios

1. Dadas as funções:

   $a)\ f(x) = 3x^2 - 2x + 6 \qquad b)\ f(x) = -x^2 - 4$

   $c)\ f(x) = 7x^2 + 2x \qquad d)\ f(x) = -8x^2$

   1.1. Identifique os valores de **a**, **b** e **c.**

   1.2. Quais das funções tem a concavidade voltada para baixo? Justifique.

2. Considere as funções abaixo escritas:

   $a)\ f(x) = -x^2 \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$

   2.1. Construa os gráficos das funções.

   2.2. Faça o estudo completo da função da alínea b).

Passe este resumo para o seu caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Quando pelo menos um dos valores de b e c é igual a zero, a função quadrática é dita incompleta.
Função do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$ é um caso particular da função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

Para construir o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2$,, atribuímos a x alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores correspondentes de y para cada valor de y e, em seguida, ligamos os pontos obtidos.

Fazer o estudo completo de uma função quadrática implica determinar, a partir da função os seguintes pontos:

a) **Domínio** - é o conjunto dos valores que x pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$.

b) **Contradomínio -** é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:
   - Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$;
   - Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$.

c) **Zeros da função** – são números reais x tais que $f(x) = 0$.

Nota: Para toda função do tipo $f(x) = ax^2$, os zeros da função são iguais a 0, isto é, $x_1 = x_2 = 0$.

d) **Vértice da parábola**

Para a função do tipo $f(x) = ax^2$, as coordenadas do vértice são $x_V = 0$ e $y_V = 0$. Portanto, o vértice V é definido é definido da seguinte maneira V (0, 0).

e) **Variação do sinal da função -** valores de x para os quais y é negativo e valores de x para os quais y é positivo.

Para o caso concreto de $f(x) = ax^2$, há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $f(x)$ é positiva para qualquer x diferente de x_1 ($f(x) > 0, \forall x \neq x_1$);
- Se $a < 0$, $f(x)$ é negativa para qualquer x diferente de x_1 ($f(x) < 0, \forall x \neq x_1$).

Venda proibida

f) Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

g) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1.

1.1. $a)\ f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ $\quad a = 3,\ b = -2$ e $c = 6$

$b)\ f(x) = -x^2 - 4$ $\quad a = -1,\ b = 0$ e $c = -4$

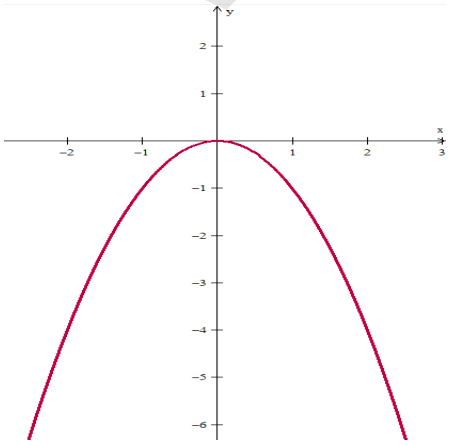
$c)\ f(x) = 7x^2 + 2x$ $\quad a = 7,\ b = 2$ e $c = 0$

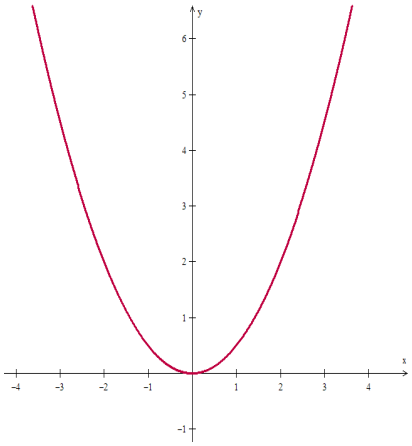
$d)\ f(x) = -8x^2$ $\quad a = -8,\ b = 0$ e $c = 0$

1.2. As funções que têm a concavidade voltada para baixo são: $b)\ f(x) = -x^2 - 4$ e $f(x) = -8x^2$, porque os valores do coeficiente a são negativos.

2.

2.1. Os gráficos das funções $a)\ f(x) = -x^2$ $\quad b)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ são, respectivamente:





2.2. O estudo completo da função $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ é:

Venda proibida

- **Domínio:** $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]0;\ +\infty]\}$;
- **Zeros da função**: $x_1 = x_2 = 0$;
- **Vértice da parábola**: V (0, 0);
- **Variação do sinal da função**: $f(x)$ é positiva para qualquer x diferente de 0 ($f(x) > 0, \forall x \neq 0$);
- **Variação da função (monotonia):** $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ 0[$ e crescente em $]0;\ +\infty[$;
- **Equação do eixo da simetria:** $x = 0$.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 11: Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$

Introdução

Caro aluno, na lição passada introduzimos o conceito de função quadrática, assim como a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$. Nesta lição vamos dar continuidade às funções quadráticas, concretamente às funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar graficamente as funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2 + c$;
- Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa de estudar durante 90 minutos.

Função do tipo $f(x) = ax^2 + c$

Conforme abordamos na lição passada, numa função quadrática incompleta, em que a $\neq 0$, pelo menos um dos valores, **b** e **c**, é igual a zero.

A função do tipo $f(x) = ax^2 + c$ é um caso particular da função quadrática, dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a $\neq 0$, b $= 0$ e c $\neq 0$.

Exemplos:

- $f(x) = -3x^2 + 5$, onde a $= -3$, b $= 0$ e c $= 5$;
- $f(x) = x^2 - 7$, onde a $= 1$, b $= 0$ e c $= 7$.

Como se constrói o gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + c$?

Acompanhe, a lição e vai perceber detalhadamente como se constrói o referido gráfico, a partir de uma actividade concreta.

Gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + c$

Para construir o gráfico de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + c$, podemos proceder de duas maneiras:

1) atribuímos a x alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores; correspondentes de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos; ou

Venda proibida

2) achamos os zeros da função, a ordenada na origem e o vértice, e de seguida unimos esses pontos.

Actividade

Construa o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 8$.

Usemos o segundo procedimento para construir o gráfico da função acima:

1) Vamos calcular os zeros da função.

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

Portanto: $x_1 = -2 \wedge x_2 = 2$

Nota: os zeros da função são os pontos em que o gráfico intersecta o eixo 0x.

2) De seguida, vamos determinar a ordenada na origem.

$$x = 0 \leftrightarrow f(0) = 2 \times 0^2 - 8 = 2 \times 0 - 8 = 0 - 8 = -8$$

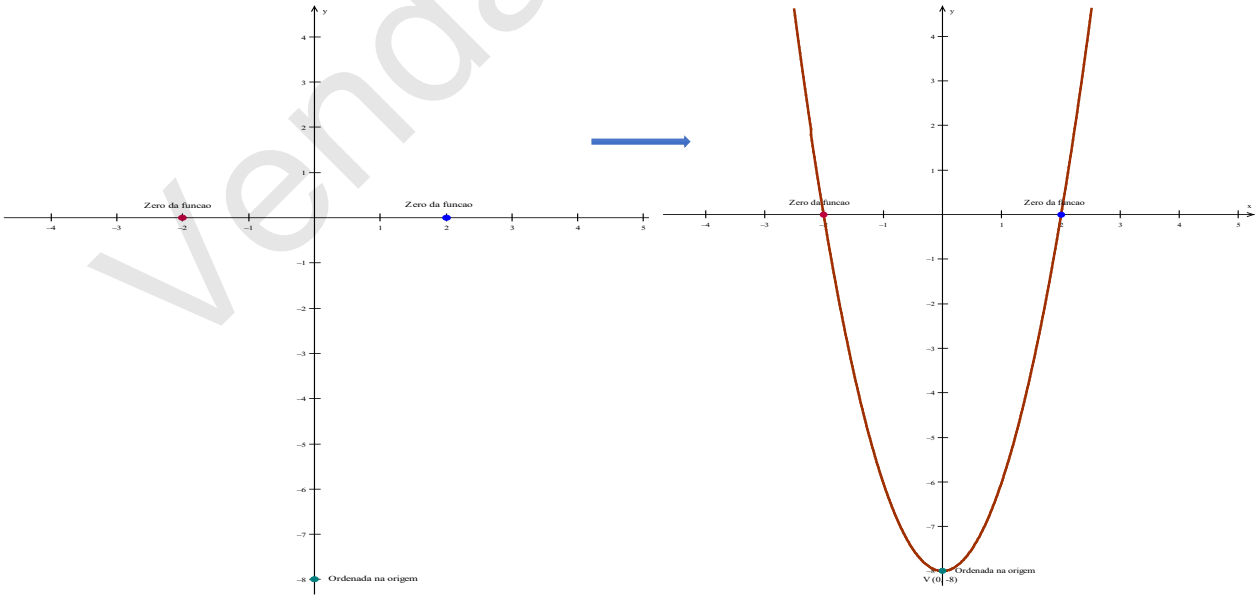
Nota: a ordenada na origem é o ponto onde o gráfico intersecta o eixo 0y.

3) Depois as coordenadas do vértice.

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow x_V = 0 \qquad y_V = 2 \times 0^2 - 8 = 0 - 8 = -8 \rightarrow y_V = -8$$

Portanto, o vértice é $V(0, -8)$.

4) E, por fim, marcamos os pontos no sistema de eixos ordenados e unimo-los.



Conclusão: O gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 8$ é uma **parábola voltada para cima**.

Uma vez que já sabe construir o gráfico deste tipo de função quadrática, podemos fazer o seu estudo completo.

Venda proibida

Estudo completo da função quadrática tipo $f(x) = ax^2 + c$

Depois de construirmos o gráfico da função quadrática do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}$, vamos fazer o estudo completo deste tipo de função, tendo como base a função anterior, $f(x) = 2x^2 - 8$.

a) Domínio

Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, o x pode assumir qualquer número real.

Portanto, o domínio da função $f(x) = 2x^2 - 8$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é maior ou igual a y_V");
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é menor ou igual a y_V").

Se analisarmos a função $f(x) = 2x^2 - 8$, vemos que $a = 2$, logo: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -8\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in [-8; +\infty[\}$.

c) Zeros da função

Chamam-se zeros da função quadrática, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Se tomarmos a função $f(x) = 2x^2 - 8$, obtemos como zeros da função:

$$f(x) = 0 \rightarrow\ 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow\ 2x^2 = 8 \rightarrow\ x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow\ x^2 = 4 \rightarrow\ x = \pm\sqrt{4}\ \rightarrow\ x = \pm 2$$

Portanto: $x_1 = -2\ \wedge x_2 = 2$

d) Vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V,** chamado **vértice da parábola.**

$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow\ x_V = 0 \qquad y_V = 20^2 - 8 = 0 - 8 = -8 \rightarrow y_V = -8$

Portanto, o vértice é $V(0, -8)$.

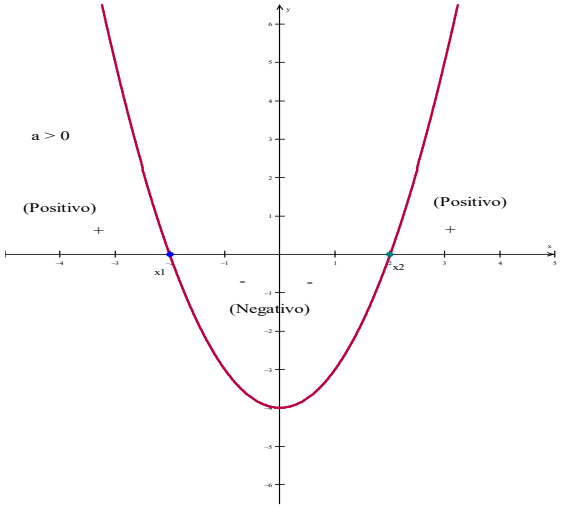
Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(0, y_V)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(0, y_V)$.

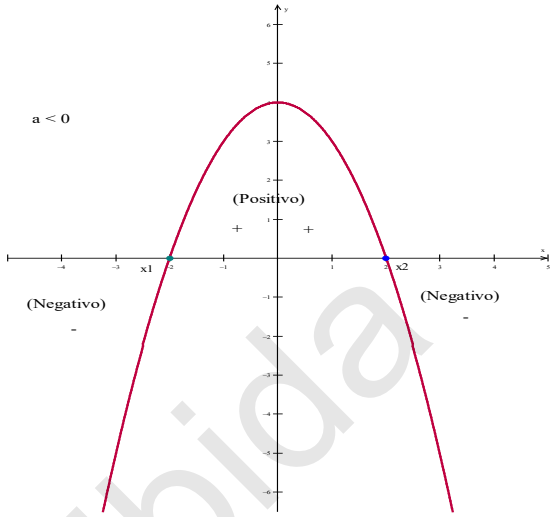
Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 8$, uma vez que $a = 2$, a parábola fica voltada para cima e as coordenadas do vértice são V (0, -8).

Venda proibida

e) Variação do sinal da função

Determinar a variação do sinal de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ significa determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.





Gráficos 13 e 14 – Variação do sinal da função

Para o caso concreto de $f(x) = ax^2 + c$, há duas possibilidades:

$$a > 0$$

x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva

$$a < 0$$

x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	Negativa	0	Positiva	0	Negativa

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 8$, uma vez que $a = 2$, a variação do sinal é $f(x)$ é:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2; 2[$	2	$]2;\ +\infty[$
$f(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva

Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;

Venda proibida

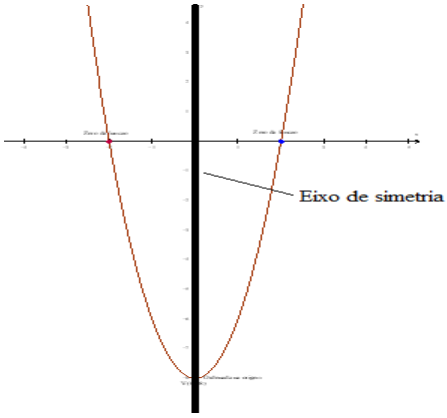
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 8$, uma vez que $a = 2$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ 0[$ e crescente em $]0;\ +\infty[$.

x	$]-\infty;\ 0[$	0	$]0;\ +\infty[$
$f(x)$	↘	8	↗
	↘ decresce		↗cresce

f) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.



Gráficos 15 – Eixo de simetria

Para a função $f(x) = 2x^2 - 8$, a equação do eixo de simetria é $x = 0$.

Depois de ler bem o conteúdo da aula, acompanhe a resolução da actividade a seguir, para dissipar qualquer dúvida.

Actividade

Construa o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 1$ e faça o seu estudo completo.

Resolução:

Antes de mais nada, vamos extrair os valores de **a**, **b** e **c**. Logo, a = -1, b = 0 e c = 1.

Agora vamos achar os zeros, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, e, posteriormente, construir o gráfico.

1. Zeros da função:

$f(x) = 0 \rightarrow\ -x^2 + 1 = 0 \rightarrow\ -x^2 = -1 \rightarrow\ x^2 = 1 \rightarrow\ x = \pm\sqrt{1}\ \rightarrow\ x = \pm 1$

Portanto: $x_1 = -1\ \wedge x_2 = 1$

Nota: os zeros da função são os pontos em que o gráfico intersecta o eixo 0x.

Venda proibida

2. Ordenada na origem:

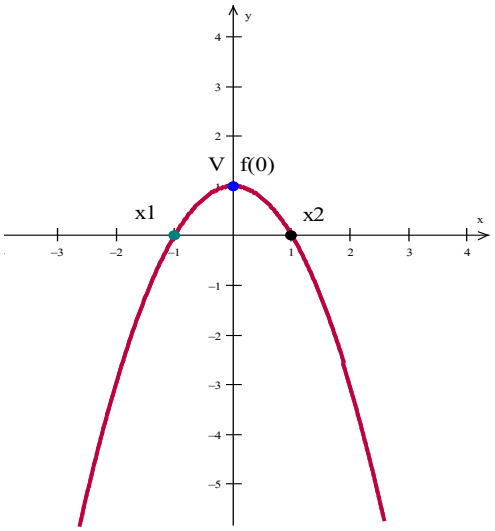
$x = 0 \leftrightarrow f(0) = -0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

3. Coordenadas do vértice:

$x_V = \frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow x_V = 0 \quad y_V = -0^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \rightarrow y_V = 1$

Portanto, o vértice é $V(0, 1)$.

4. Gráfico:



Estudo completo da função

a) Domínio

O domínio da função $f(x) = -x^2 + 1$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função $f(x) = -x^2 + 1$é: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 1\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]-\infty;\ 1]\}$

c) Zeros da função

$f(x) = 0 \ \leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -1 \ \wedge x_2 = 1$

d) Vértice da parábola

Para a função $f(x) = -x^2 + 1$, uma vez que $a = -1$, a parábola fica voltada para baixo e o vértice é V (0, 1).

e) Variação do sinal da função

Para a função $f(x) = -x^2 + 1$, uma vez que $a = -1$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ -1[$	-1	$]-1; 1[$	1	$]1;\ +\infty[$
$f(x)$	Negativa	0	Positiva	0	Negativa

f) Variação da função (monotonia)

Para o caso da função $f(x) = -x^2 + 1$, uma vez que $a = -1$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ 0[$ e decrescente em $]0;\ +\infty[$.

g) Equação do eixo da simetria

Para a função $f(x) = -x^2 + 1$, o eixo de simetria é $x = 0$.

Venda proibida

Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.
Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios, no caderno.

Exercícios

1. Considere as funções abaixo escritas:

   a) $f(x) = -x^2 + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ c) $f(x) = -3x^2 - 3$

1.1. Ache os valores de **a**, **b** e **c** nas funções acima.

1.2. Construa os gráficos das funções.

1.3.Faça o estudo completo da função da alínea c).

Agora compare as suas soluções com as que lhe são apresentadas na Chave de Correcção. Acertou em todas? Se sim, está de parabéns. Se teve dificuldades, releia a sua lição e volte a resolver os exercícios.

Passe este resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

A função do tipo $f(x) = ax^2 + c$ é um caso particular da função quadrática, dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a $\neq 0$, b $= 0$ e c $\neq 0$.

Para construir o gráfico de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + c$, podemos proceder de duas maneiras:

1. atribuímos a x alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores correspondentes de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos; ou
2. achamos os zeros da função, a ordenada na origem e o vértice, e de seguida unimos esses pontos.

Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$ implica determinar, a partir da função os seguintes pontos:

a) Domínio - é o conjunto dos valores que x pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$.

b) Contradomínio - é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

Venda proibida

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$;
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$.

c) Zeros da função – são números reais x tais que $f(x) = 0$.

d) Vértice da parábola

Para a função do tipo $f(x) = ax^2 + c$, as coordenadas do vértice são $x_V = 0$ e $y_V = f(x_V)$. Portanto, o vértice V é definido é definido da seguinte maneira V $(0, y_V)$.

f) Variação do sinal da função - valores de x para os quais y é negativo e valores de x para os quais y é positivo.

g) Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

h) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na chave de correcção.

Venda proibida

Chave de Correcção

1.

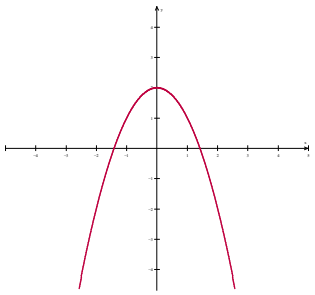
1.1. a) $f(x) = -x^2 + 2$ $\quad a = -1,\ b = 0$ e $c = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $\quad a = \frac{1}{2},\ b = 0$ e $c = -2$

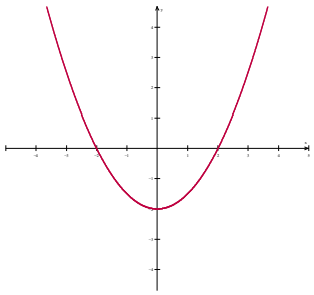
c) $f(x) = -3x^2 - 3$ $\quad a = -3,\ b = 0$ e $c = -3$

1.2.Gráficos das funções:

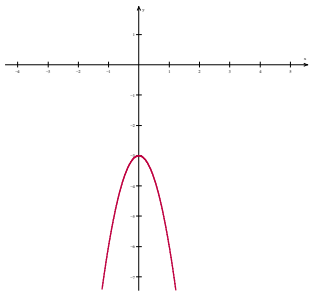
$a)\ f(x) = -x^2 + 2$



$b)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$



$c)\ f(x) = -3x^2 - 3$



1.3. Estudo completo da função $f(x) = -3x^2 - 3$

- **Domínio:** $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]-\infty;\ -3]\}$;
- **Zeros da função**: Não existem zeros da função.
- **Vértice da parábola**: V (0, -3);
- **Variação do sinal da função**: $f(x)$ é negativa para todo o domínio.
- **Variação da função (monotonia):** $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ 0[$ e decrescente em $]0;\ +\infty[$;
- **Equação do eixo da simetria:** $x = 0$.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 12: Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx$

Introdução

Caro aluno, na lição passada aprendeu a fazer o estudo da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$. Nesta, vai dar continuidade às funções quadráticas, concretamente à função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar graficamente as funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2 + bx$;
- Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx$.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$

Já sabe que, numa função quadrática incompleta, em que a $\neq 0$, pelo menos um dos valores, **b** e **c**, é igual a zero. A função do tipo $f(x) = ax^2 + c$ é um caso particular da função quadrática, dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a $\neq 0$, b $= 0$ e c $\neq 0$.

Um outro caso particular da função quadrática é a que a $\neq 0$, b $\neq 0$ e c $= 0$, isto é $f(x) = ax^2 + bx$.

Exemplos:

- $f(x) = 4x^2 + 5x$, onde a $= 4$, b $= 5$ e c $= 0$;
- $f(x) = -2x^2 + 8x$, onde a $= -2$, b $= 8$ e c $= 0$.

Mas, como se constrói o gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$?

Acompanhe, a lição e vai perceber detalhadamente como se constrói o referido gráfico, a partir de uma actividade concreta.

Gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$

Para construir o gráfico de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx$, podemos proceder de duas maneiras distintas:

1. atribuímos a x alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores correspondentes de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos; ou

Venda proibida

2. achamos os zeros da função, a ordenada na origem e o vértice, e de seguida unimos esses pontos.

Actividade

Construa o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 4x$.

Usemos o segundo procedimento para construir o gráfico da função acima:

1. Vamos calcular os zeros da função.

$f(x) = 0 \rightarrow\ 2x^2 - 4x = 0$

Se pusermos em evidência o x, teremos:

$$x(2x - 4) = 0 \rightarrow\ x = 0 \vee 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 0 \vee 2x = 4 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto: $x_1 = 0\ \wedge x_2 = 2$

Nota: os zeros da função são os pontos em que o gráfico intersecta o eixo 0x.

2. De seguida, vamos determinar a ordenada na origem.

$x = 0 \leftrightarrow f(0) = 2 \times 0^2 - 4 \times 0\ = 2 \times 0 - 0 = 0 - 0 = 0$

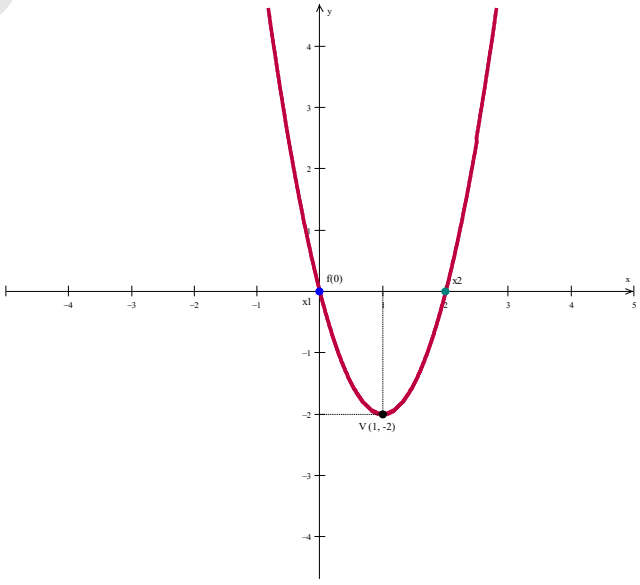
Nota: a ordenada na origem é o ponto onde o gráfico intersecta o eixo 0y.

3. Depois as coordenadas do vértice.

$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow\ x_V = 1\ \ y_V = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = 2 - 4 = -2 \rightarrow y_V = -2$

Portanto, o vértice é $V(1, -2)$.

4. E, por fim, marcamos os pontos no sistema de eixos ordenados e unimo-los.



Conclusão: O gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 4x$ é uma **parábola voltada para cima**.

Venda proibida

Uma vez que já sabe construir o gráfico deste tipo de função quadrática, podemos fazer o seu estudo completo.

Estudo completo da função quadrática tipo $f(x) = ax^2 + bx$

Depois de construirmos o gráfico da função quadrática do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$, vamos fazer o estudo completo deste tipo de função, tendo como base a função anterior, $f(x) = 2x^2 - 4x$.

a) Domínio

.Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, o x pode assumir qualquer número real.

Portanto, o domínio da função $f(x) = 2x^2 - 4x$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é maior ou igual a y_V");
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é menor ou igual a y_V").

Se analisarmos a função $f(x) = 2x^2 - 4x$, vemos que $a = 2$, logo: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -2\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in [-2; +\infty[\}$.

c) Zeros da função

Chamam-se zeros da função quadrática, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Se tomarmos a função $f(x) = 2x^2 - 4x$, obtemos como zeros da função:

$$f(x) = 0 \rightarrow\ 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow\ x(2x - 4) = 0 \rightarrow\ x = 0 \vee 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 0 \vee 2x = 4 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

d) Ordenada na origem

Chama-se ordenada na origem, o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y. O valor da ordenada na origem é igual ao valor do c, isto é, $y_0 = c$.

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 4x$, a ordenada na origem é $y_0 = 0$.

e) Vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V,** chamado **vértice da parábola.**

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow\ x_V = 1\ \ y_V = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = 2 - 4 = -2 \rightarrow y_V = -2$$

Venda proibida

Portanto, o vértice é $V(1,-2)$.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(x_V, y_V)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(x_V, y_V)$.

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 4x$, uma vez que $a = 2$, a parábola fica voltada para cima e as coordenadas do vértice são V (1, -2).

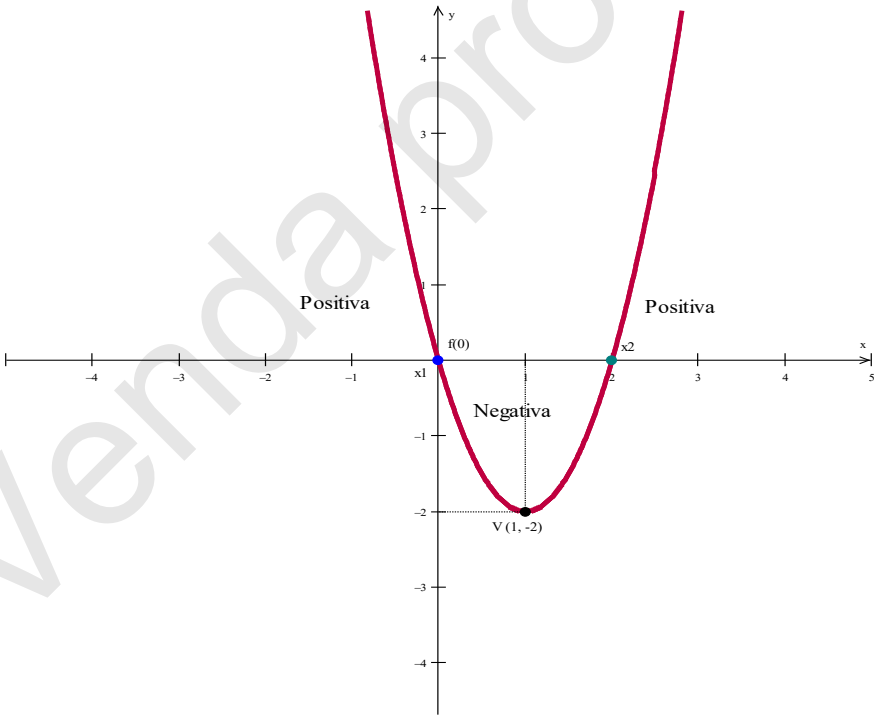
f) Variação do sinal da função

Determinar a variação do sinal de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ significa determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Para o caso concreto de $f(x) = ax^2 + bx$, há duas possibilidades:

$a > 0$						
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva

$a < 0$						
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	Negativa	0	Positiva	0	Negativa



Gráficos 16 – Variação do sinal da função

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 4x$, uma vez que $a = 2$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ 0[$	0	$]0;\ 2[$	2	$]2;\ +\infty[$
$f(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva

Venda proibida

g) Variação da função (monotonia)

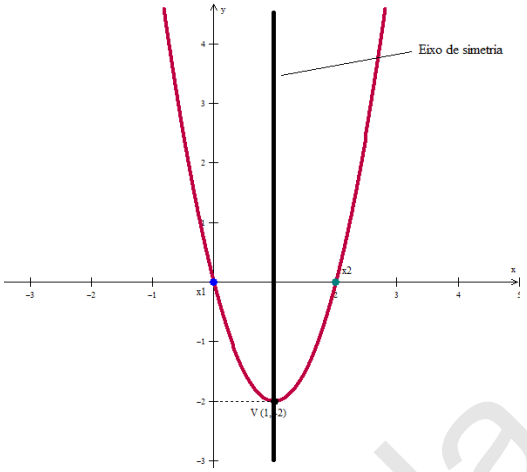
A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

Para o caso da função $f(x) = 2x^2 - 4x$, uma vez que $a = 2$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ 1[$ e crescente em $]1;\ +\infty[$.

h) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.



Para a função $f(x) = 2x^2 - 4x$, a equação do eixo de simetria é $x = 1$.

Gráficos 17 – Eixo de simetria

Depois de ler bem o conteúdo da aula, acompanhe a resolução da actividade a seguir, para dissipar qualquer dúvida.

Actividade

Construa o gráfico da função $f(x) = -3x^2 + 5x$ e faz o seu estudo completo.

Resolução:

Antes de mais nada, vamos extrair os valores de **a**, **b** e **c**. Logo, a = -3, b = 5 e c = 0.

Agora vamos achar os zeros, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, e, posteriormente, construir o gráfico.

1) Zeros da função:

Venda proibida

$f(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-3x + 5) = 0 \rightarrow x = 0 \vee -3x + 5 = 0 \rightarrow x = 0 \vee -3x = -5 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

Portanto: $x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{5}{3}$.

2) Ordenada na origem:

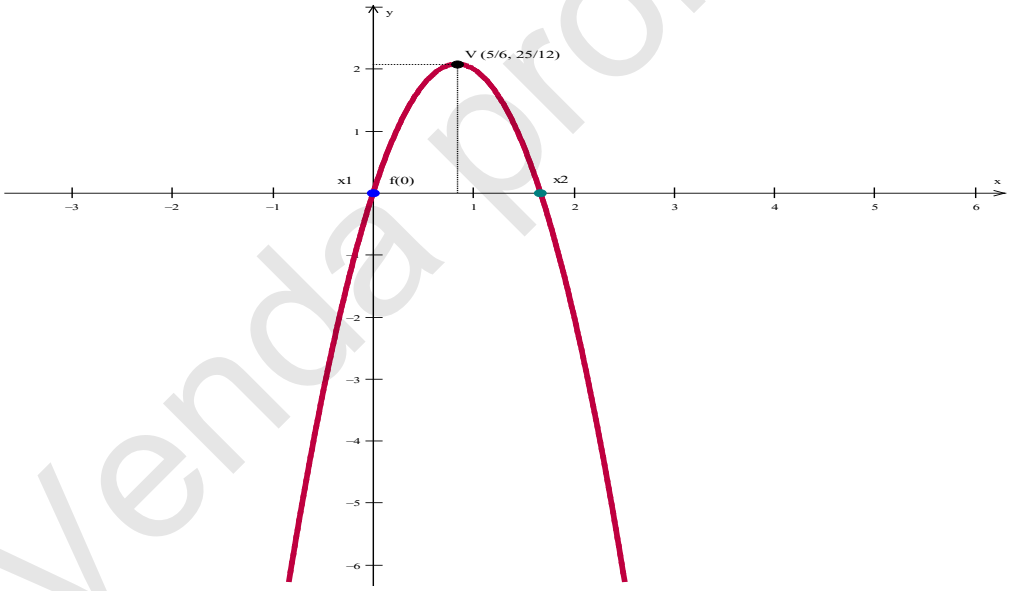
$x = 0 \leftrightarrow f(0) = -3 \times 0^2 + 5 \times 0 = 0 + 0 = 0$

3) Coordenadas do vértice:

$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{0 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$ $\quad y_V = -3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{6} = -3 \times \frac{25}{36} + \frac{25}{6} = -\frac{25}{12} + \frac{25}{6} = \frac{-25+50}{12} = \frac{25}{12}$

Portanto, o vértice é $V\left(\frac{5}{6}, \frac{25}{12}\right)$.

4) Gráfico:



- Estudo completo da função

a) Domínio

O domínio da função $f(x) = -3x^2 + 5x$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função $f(x) = -3x^2 + 5x$ é: $D'f = \left\{y \in \mathbb{R}: y \leq \frac{25}{12}\right\}$ ou

$D'f = \left\{y \in \mathbb{R}: y \in \left]-\infty; \frac{25}{12}\right]\right\}$

Venda proibida

c) Zeros da função

$f(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-3x + 5) = 0 \rightarrow x = 0 \vee -3x + 5 = 0 \rightarrow x = 0 \vee -3x = -5 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

Portanto: $x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{5}{3}$.

d) Vértice da parábola

Para a função $f(x) = -3x^2 + 5x$, uma vez que $a = -3$, a parábola fica voltada para baixo e o vértice é $V\left(\frac{5}{6}, \frac{25}{12}\right)$.

e) Variação do sinal da função

Para a função $f(x) = -3x^2 + 5x$, uma vez que $a = -3$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ 0[$	0	$]0; \frac{5}{3}[$	$\frac{5}{3}$	$]\frac{5}{3};\ +\infty[$
$f(x)$	Negativa	0	Positiva	0	Negativa

f) Variação da função (monotonia)

Para o caso da função $f(x) = -3x^2 + 5x$, uma vez que $a = -3$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty; \frac{5}{6}[$ e decrescente em $]\frac{5}{6};\ +\infty[$.

g) Equação do eixo da simetria

Para a função $f(x) = -3x^2 + 5x$, o eixo de simetria é $x = \frac{5}{6}$.

Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios, no caderno.

Exercícios

1. Considere as funções:

a) $f(x) = -2x^2 + 3x$ b) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

1.1. Ache os valores de **a**, **b** e **c** nas funções acima.

1.2. Construa os gráficos das funções.

1.3.Faça o estudo completo da função da alínea b).

Venda proibida

Passe este resumo para o seu caderno

Resumo da Lição

A função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$ é um caso particular da função quadrática, dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a $\neq 0$, b $\neq 0$ e c $= 0$.

Para construir o gráfico de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx$, podemos proceder de duas maneiras:

1. atribuímos a x alguns valores (negativos, nulo e positivos), calculamos os valores correspondentes de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos; ou
2. achamos os zeros da função, a ordenada na origem e o vértice, e de seguida unimos esses pontos.

Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx$ implica determinar, a partir da função os seguintes pontos:

a) Domínio - é o conjunto dos valores que $\boldsymbol{x}$ pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$.

b) Contradomínio - é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$;
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$.

c) Zeros da função – são números reais x tais que $f(x) = 0$.

d) Vértice da parábola

Para a função do tipo $f(x) = ax^2 + bx$, as coordenadas do vértice são $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_V = f(x_V)$. Portanto, o vértice V é definido é definido da seguinte maneira V (x_V, y_V).

a) Variação do sinal da função - valores de x para os quais y é negativo e valores de x para os quais y é positivo.

b) Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

a) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Venda proibida

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1.

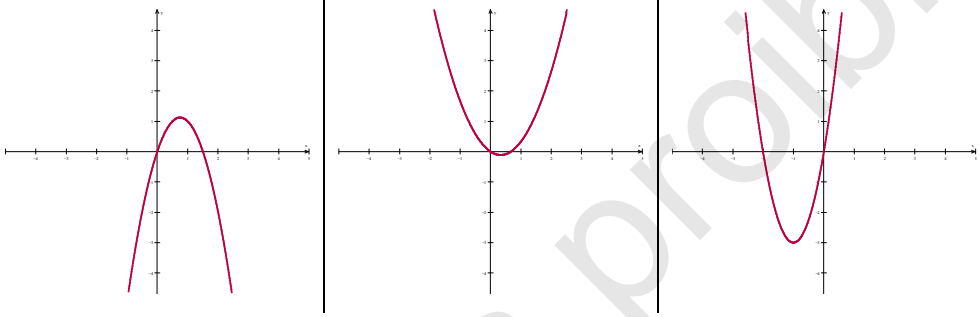
1.1. $a)\ f(x) = -2x^2 + 3x$ $\quad a = -2,\ b = 3\ e\ c = 0$

b) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$ $\quad a = 1,\ b = -\frac{2}{3}\ e\ c = 0$

c) $f(x) = 3x^2 + 6x$ $\quad a = 3,\ b = 6\ e\ c = 0$

1.2. Gráficos das funções:

$a)\ f(x) = -2x^2 + 3x$ $\quad b)\ f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$ $\quad c)\ f(x) = 3x^2 + 6x$



1.3. Estudo completo da função $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$

- **Domínio:** $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \left\{y \in \mathbb{R}: y \in \left]-\infty;\ -\frac{1}{9}\right]\right\}$;
- **Zeros da função**: $x_1 = 0\ \wedge x_2 = \frac{2}{3}$;
- **Vértice da parábola**: V $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$;
- **Variação do sinal da função**:

x	$]-\infty;\ 0[$	0	$]0;\frac{2}{3}[$	$\frac{2}{3}$	$]\frac{2}{3};\ +\infty[$
$f(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva

- **Variação da função (monotonia):** $f(x)$ é decrescente em $\left]-\infty;\ \frac{1}{3}\right[$ e crescente em $\left]\frac{1}{3};\ +\infty\right[$;
- **Equação do eixo da simetria:** $x = \frac{1}{3}$.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 13: Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ Caso $y = a(x - p)^2$

Introdução

Caro aluno, nesta lição vamos dar continuidade às funções quadráticas, concretamente às funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x - p)^2$. Aqui vamos, apenas, fazer a representação gráfica deste tipo de função, e o seu estudo completo será feito na próxima lição.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar graficamente as funções quadráticas do tipo $y = a(x - p)^2$ a partir de $y = ax^2$.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa estudar de durante 90 minutos.

Função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x - p)^2$

Nas lições passadas aprendeu que para construir o gráfico de uma função quadrática é preciso descobrir alguns pontos que pertencem à parábola atribuindo valores à variável x. Contudo, há pontos importantes e indispensáveis para a construção do gráfico. Esses pontos são os **zeros da função**, a **ordenada na origem** e o **vértice da parábola**.

Os zeros da função quadrática são os pontos em que o gráfico intersecta o eixo 0x. Estes podem ser calculados através da fórmula resolvente (fórmula de Bhaskara):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$.

Em relação ao valor do discriminante, podem ocorrer três casos:

$\Delta > 0$: a função tem dois zeros e a parábola intersecta o eixo 0x em dois pontos.	$\Delta = 0$: a função tem um zero e a parábola intersecta o eixo 0x em apenas um ponto.	$\Delta < 0$: a função não tem zero e a parábola não intersecta o eixo 0x.

Se o $\Delta = 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma $y = a(x - p)^2$ e o seu gráfico pode ser construído através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$.

Venda proibida

Nota:

- O gráfico da função $y = a(x-p)^2$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ $\boldsymbol{p}$ unidades para a direita;
- O gráfico da função $y = a(x+p)^2$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ $\boldsymbol{p}$ unidades para a esquerda.

Mas, como se constrói o gráfico deste tipo de função?

Acompanhe a lição e vai perceber detalhadamente como se constrói o referido gráfico, a partir de uma actividade concreta.

Gráfico da função do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ – caso $\boldsymbol{y = a(x-p)^2}$

Vamos construir o gráfico deste tipo de função a partir de um exemplo concreto:

Actividades

1. Construa o gráfico da função $y = -x^2 + 2x - 1$.

Para construir o gráfico da função acima mencionada, vamos seguir os passos:

1) Determinar os zeros da função:

Da função $y = -x^2 + 2x - 1$, temos: $a = -1,\ b = 2,\ e\ \ c = -1$.

Logo, $\Delta = b^2 - 4ac \ \rightarrow\ \Delta = 2^2 - 4.(-1).(-1) \ \rightarrow\ \Delta = 4 - 4 \ \rightarrow\ \ \Delta = 0$.

Portanto, $x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \ \rightarrow\ x_1 = x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2.(-1)} \ \rightarrow\ x_1 = x_2 = \frac{-2}{-2} \ \rightarrow\ x_1 = x_2 = 1$.

2) Escrever a função $y = ax^2 + bx + c$ na forma $y = a(x-p)^2$ (onde p é o zero da função):

Uma vez que $x_1 = x_2 = 1$, a função $y = -x^2 + 2x - 1$ pode ser escrita na forma $y = -(x-1)^2$.

3) Construir o gráfico da função através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$:

O gráfico da função $y = a(x-p)^2$ obtém-se a partir de $y = ax^2$, deslocando-o p unidades para direita.

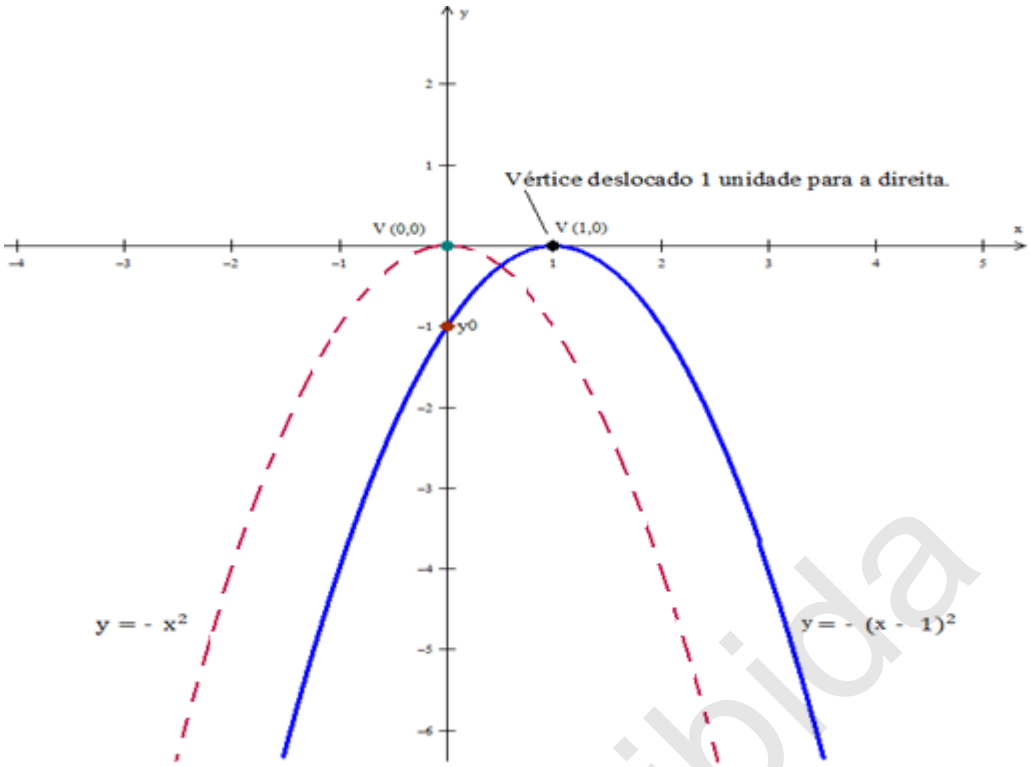
Assim, o gráfico da função $y = -(x-1)^2$ obtém-se a partir do gráfico $y = -x^2$, deslocando-o 1 unidade para a direita.

Nota que o gráfico vai intersectar o eixo 0y (ordenada na origem). Para determinar esse ponto de intersecção, basta fazer $x = 0$ e substituir na função:

$$x = 0 \ \rightarrow\ y_0 = -(0-1)^2 \ \rightarrow y_0 = -(-1)^2 \ \rightarrow y_0 = -1$$

Portanto, a ordenada na origem é $y_0 = -1$.

Venda proibida



2. Construa o gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

Resolução:

Antes de mais nada, vamos extrair os valores de **a**, **b** e **c**. Logo, a = 3, b = -6 e c = 3.

Agora vamos achar os zeros e a ordenada na origem assim como escrever a função na forma $y = a(x-p)^2$ e, posteriormente, construir o gráfico.

1) Zeros da função:

$f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \rightarrow \Delta = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0.$

$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{6}{6} \rightarrow x_1 = x_2 = 1.$

2) Ordenada na origem:

$x = 0 \leftrightarrow f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 \rightarrow f(0) = 0 + 0 + 3 \rightarrow f(0) = 3.$

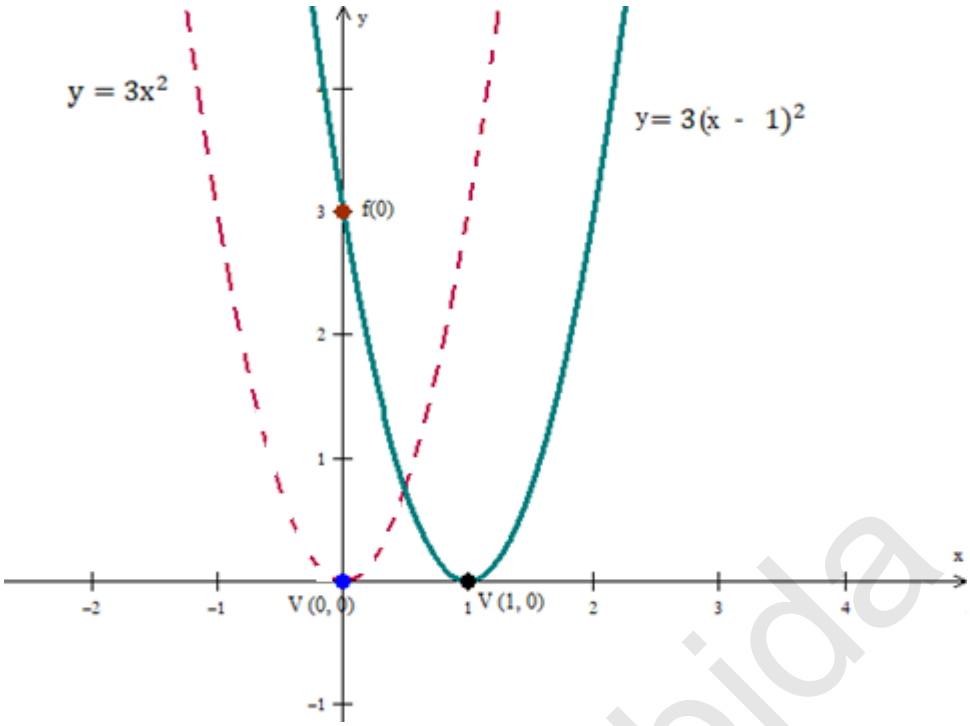
3) Função na forma $y = a(x-p)^2$:

Uma vez que $x_1 = x_2 = 1$, a função $y = 3x^2 - 6x + 3$ pode ser escrita na forma $y = 3(x-1)^2$.

4) Gráfico:

O gráfico da função $y = 3(x-1)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = 3x^2$, deslocando-o 1 unidade para a direita.

Venda proibida



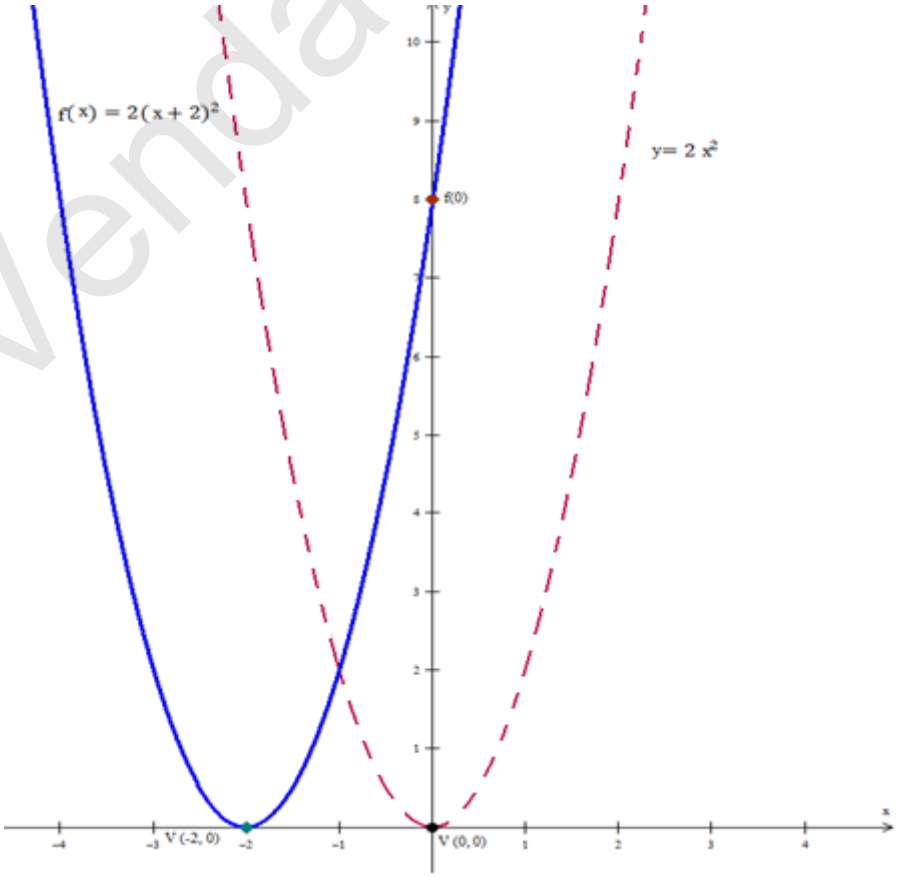
3. Construa o gráfico da função $f(x) = 2(x+2)^2$.

Resolução:

Para construir o gráfico da função $f(x) = 2(x+2)^2$, basta deslocar 2 unidades para a esquerda $y = 2x^2$.

É também importante determinar a ordenada na origem: $f(0) = 2(0+2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$.

O gráfico da função é:



Venda proibida

Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos, resolvendo o exercício, que segue, no seu caderno.

Exercícios

1. Considere a função $f(x) = -3(x+2)^2$

   Assinale com "V" as afirmações verdadeiras e com "F" as falsas:

   a) A ordenada na origem do gráfico da função f(x) é -2. ___

   b) A ordenada na origem do gráfico da função f(x) é -12. ___

   c) O gráfico da função f(x) obtém-se a partir do gráfico $y = -3x^2$, deslocando-o 4 unidades para a direita. ___

   d) O gráfico da função f(x) obtém-se a partir do gráfico $y = -3x^2$, deslocando-o 4 unidades para a esquerda. ___

2. Construa os gráficos das funções abaixo:

   a) $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$

   b) $(x) = 4(x+2)^2$

   c) $f(x) = (x-4)^2$

   d) $f(x) = -5x^2 - 20x - 20$

Passe este resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Os zeros da função quadrática são os pontos em que o gráfico intersecta o eixo 0x. Estes podem ser calculados através da fórmula resolvente (fórmula de Bhaskara): $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$.

Em relação ao valor do discriminante, podem ocorrer três casos:

- $\Delta > 0$**:** a equação tem duas raízes reais e a parábola intersecta o eixo 0x em dois pontos.
- $\Delta = 0$**:** a equação tem uma raiz real e a parábola intersecta o eixo 0x em apenas um ponto.
- $\Delta < 0$**:** a equação não tem nenhuma raiz real e a parábola não intersecta o eixo 0x.

Se o $\Delta = 0$**,** a função $y = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma $y = a(x-p)^2$ e o seu gráfico pode ser construído através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$:

- O gráfico da função $y = a(x-p)^2$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a direita.

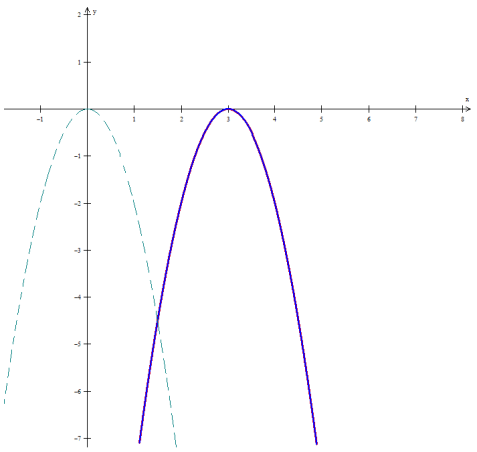
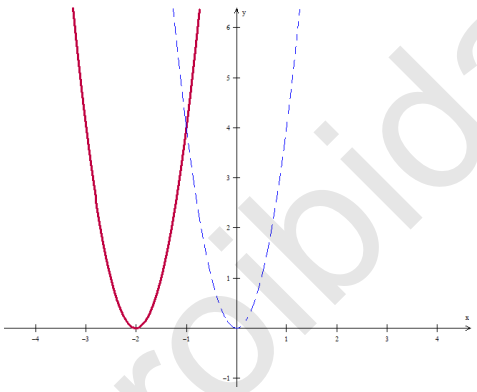
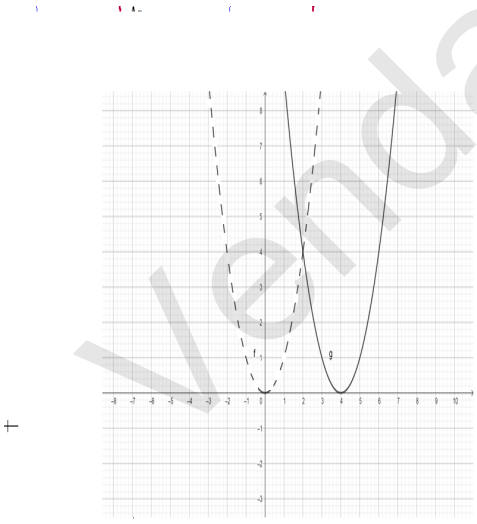
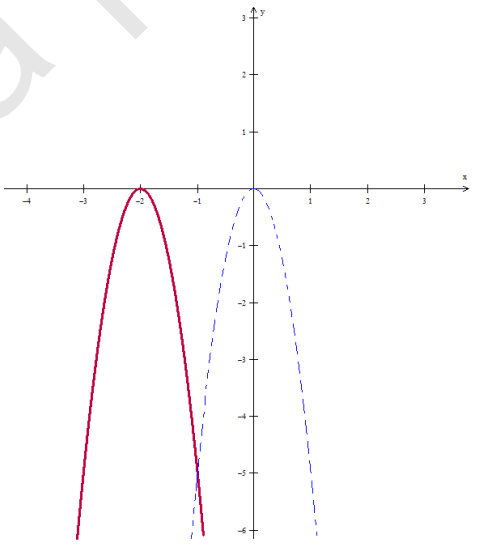
Venda proibida

- O gráfico da função $y = a(x + p)^2$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a esquerda.

Chave de Correcção

1. a) F b) V c) F d) F

2. Gráficos das funções:

$a)\ f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ 	$b)\ f(x) = 4(x + 2)^2$ 
$c)\ f(x) = (x - 4)^2$ 	$d)\ f(x) = -5x^2 - 20x - 20$ 

Venda proibida

LIÇÃO Nº 14: Estudo completo da função quadrática tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ Caso $y = a(x - p)^2$

Introdução

Caro aluno, na lição passada fizemos a representação gráfica da função quadrática tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, caso $y = a(x - p)^2$. Na presente lição vai fazer o estudo completo deste tipo de função.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Fazer estudo completo da função;
- Indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática;
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenada;
- Determinar as coordenadas do vértice
- Determinar a equação do eixo de simetria de uma parábola.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Estudo completo da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x - p)^2$

Depois de construirmos o gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x - p)^2$, vamos fazer o estudo completo deste tipo de função.

Vamos ter como ponto de partida a função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$. Da lição passada, vimos que a função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ pode ser escrita na forma $y = -(x - 1)^2$.

a) Domínio

Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, o x pode assumir qualquer número real.

Portanto, o domínio da função $y = -(x - 1)^2$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função quadrática definida por $f(x) = a(x - p)^2$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é maior ou igual a y_V");

Venda proibida

- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é menor ou igual a y_V").

Se analisarmos a função $y = -(x-1)^2$, vemos que $a = -1$ e $y_V = 0$. Logo: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 0\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in]-\infty;\ 0]\}$.

c) Zeros da função

Chamam-se zeros da função quadrática, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Para a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2$, existe um único zero da função que é igual ao valor de p, isto é, $x = \text{p}$.

Portanto, o zero da função $y = -(x-1)^2$ é $x = 1$ ou $x_1 = x_2 = 1$.

d) Ordenada na origem

Chama-se ordenada na origem, o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y. O valor da ordenada na origem obtém-se substituindo o x por 0 na função $y = a(x-p)^2$.

Para o caso da função $y = -(x-1)^2$, a ordenada na origem é $y_0 = -(0-1)^2 = -(-1)^2 = -1$.

e) Vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V,** chamado **vértice da parábola.**

$x_V = \frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow\ x_V = 1$

O valor de y_V obtém-se substituindo o valor de x por x_V na função $y = -(x-1)^2$. Portanto, $y_V = -(1-1)^2 = -0^2 \rightarrow y_V = 0$

Portanto, o vértice é $V(1, 0)$.

f) Parábola

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(x_V, y_V)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(x_V, y_V)$.

Para o caso da função $y = -(x-1)^2$, uma vez que $a = -1$, a parábola fica voltada para baixo e o ponto máximo é V (1, 0).

g) Variação do sinal da função

Determinar a variação do sinal de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ significa determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Para o caso concreto de $y = a(x-p)^2$, há duas possibilidades:

$a > 0$

x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ +\infty[$
y	Positiva	0	Positiva

$a < 0$

x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ +\infty[$
y	Negativa	0	Negativa

Venda proibida

Para o caso da função $y = -(x-1)^2$, uma vez que $a = -1$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ 1[$	1	$]1;\ +\infty[$
y	Negativa	0	Negativa

h) Variação da função (monotonia)

A função f (x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

Para o caso da função $y = -(x-1)^2$, uma vez que $a = -1$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ 1[$ e decrescente em $]1;\ +\infty[$.

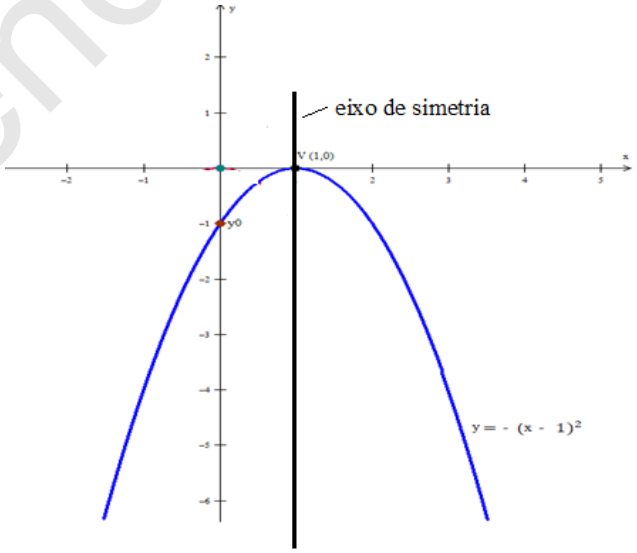
Podemos representar a monotonia em forma de tabela:

x	$]-\infty;\ 1[$	1	$]1;\ +\infty[$
$f(x)$		1	

i) Equação do eixo da simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Para a função $y = -(x-1)^2$, a equação do eixo de simetria é $x = 1$.



Actividade

Faça o estudo da função $f(x) = 3(x+2)^2$.

Para resolvermos este exercício, vamos nos basear no exemplo anterior.

Venda proibida

Resolução:

- **Domínio**

O domínio da função $y = 3(x+2)^2$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

- **Contradomínio**

O contradomínio da função $y = 3(x+2)^2$ é $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in [0; +\infty[\}$.

- **Zeros da função**

O zero da função $y = 3(x+2)^2$ é $x = -2$ ou $x_1 = x_2 = -2$.

- **Ordenada na origem**

Para a função $y = 3(x+2)^2$, a ordenada na origem é $y_0 = 3 \cdot (0+2)^2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$.

- **Vértice da parábola**

$x_V = \frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow x_V = \frac{-2+(-2)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow\ x_V = -2$

$y_V = 3 \cdot (-2+2)^2 = 3 \cdot 0^2 \rightarrow y_V = 0$

Portanto, o vértice é $V(-2, 0)$.

- **Parábola**

Para a função $y = 3(x+2)^2$, uma vez que $a = 3$, a parábola fica voltada para cima e o ponto mínimo é V (-2, 0).

- **Variação do sinal da função**

Para a função $y = 3(x+2)^2$, uma vez que $a = 3$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Positiva	0	Positiva

- **Variação da função (monotonia)**

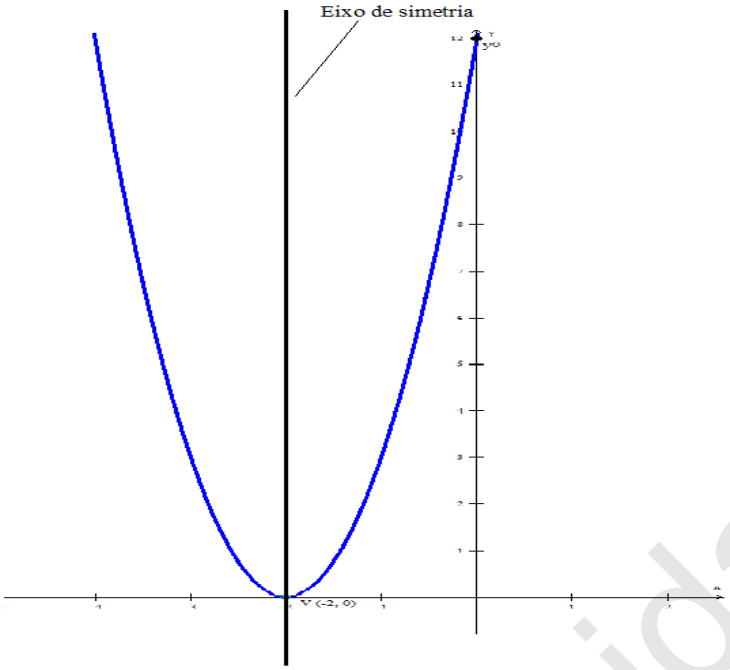
Para a função $y = 3(x+2)^2$, uma vez que $a = 3$:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Decrescente	0	Crescente

- **Equação do eixo da simetria**

Para a função $y = 3(x+2)^2$, a equação do Eixo de simetria é $x = -2$.

Venda proibida



Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Agora resolva os exercícios a seguir.

Venda proibida

Exercícios

1. Considera a função $f(x) = -3(x+2)^2$. Assinale com "V" as afirmações verdadeiras e com "F" as falsas:
   a) O domínio da função é $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$. ___
   b) A ordenada na origem do gráfico da função f(x) é -12. ___
   c) O zero da função é 2. ___
   d) O gráfico é uma parábola voltada para baixo. ___
   e) A equação do eixo de simetria é $y = 2$. ___

2. Faça o estudo completo de cada uma das funções:
   a) $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$
   b) $f(x) = 4(x+2)^2$
   c) $f(x) = (x-4)^2$
   d) $f(x) = -5x^2 - 20x - 20$

Agora compare as suas soluções com as que lhe são apresentadas na chave de correcção

Resumo da Lição

Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ - *caso* $y = a(x-p)^2$ implica determinar, a partir da função os seguintes pontos:

- **Domínio** - é o conjunto dos valores que x pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$.
- **Contradomínio -** é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades: Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ e se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$.
- **Zeros da função** – são números reais x tais que $f(x) = 0$.

Para a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2$, existe um único zero da função que é igual ao valor de p, isto é, $x = \text{p}$.

- **Ordenada na origem**

Chama-se ordenada na origem, o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y. O valor da ordenada na origem obtém-se substituindo o x por 0 na função $y = a(x-p)^2$.

- **Vértice da parábola**

$x_V = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $y_V = f(x_V)$. Portanto, o vértice V é definido da seguinte maneira V (x_V, y_V).

- **Parábola**

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(x_V, y_V)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(x_V, y_V)$.

- **Variação do sinal da função -** valores de x para os quais y é negativo e valores de x para os quais y é positivo.
- **Monotonia da função**

Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$; Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

- **Equação do eixo da simetria**

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. A sua equação é $x = x_V$.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são apresentadas na chave de correcção

Chave de Correcção

1. a) V b) V c) F d) V e) F

2. Estudo completo das funções:

Venda proibida

a) $f(x) = -2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2$

- **Domínio:** $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 0\}$;
- **Zeros da função:** $x_1 = x_2 = 3$;
- **Ordenada na origem**: $y_0 = -18$;
- **Vértice**: V (3, 0);
- **Parábola:** voltada para baixo;
- **Variação do sinal:**

x	$]-\infty;\ 3[$	3	$]3;\ +\infty[$
y	Negativa	0	Negativa

- **Monotonia**:

X	$]-\infty;\ 3[$	3	$]3;\ +\infty[$
Y	Crescente	0	Decrescente

- **Equação do eixo de simetria**: $x = 3$.

b) $f(x) = 4(x+2)^2$

- **Domínio:** $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$;
- **Zeros da função:** $x_1 = x_2 = -2$;
- **Ordenada na origem:** $y_0 = 16$;
- **Vértice**: V (-2, 0);
- **Parábola**: voltada para cima;
- **Variação do sinal:**

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Positiva	0	Positiva

- **Monotonia**:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Decrescente	0	Crescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = -2$.

c) $f(x) = (x-4)^2$

- **Domínio**: $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$;
- **Zeros da função:** $x_1 = x_2 = 4$;
- **Ordenada na origem:** $y_0 = 16$;
- **Vértice:** V (4, 0);
- **Parábola**: voltada para cima;
- **Variação do sinal:**

x	$]-\infty;\ 4[$	4	$]4;\ +\infty[$
y	Positiva	0	Positiva

- **Monotonia:**

x	$]-\infty;\ 4[$	4	$]4;\ +\infty[$
y	Decrescente	0	Crescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = 4$.

d) $f(x) = -5x^2 - 20x - 20 = -5(x+2)^2$

- **Domínio:** $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio:** $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 0\}$;
- **Zeros da função:** $x_1 = x_2 = -2$;
- **Ordenada na origem:** $y_0 = -20$;
- **Vértice**: V (-2, 0);
- **Parábola:** voltada para baixo;
- **Variação do sinal:**

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Negativa	0	Negativa

- **Monotonia:**

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Crescente	0	Decrescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = -2$.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 15: Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, Caso $y = a(x-p)^2 + q$

Introdução

Caro aluno, nesta lição vamos dar continuidade às funções quadráticas, concretamente às funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$. Aqui vamos, apenas, fazer a representação gráfica deste tipo de função, e o seu estudo completo será feito na próxima lição.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar graficamente as funções quadráticas do tipo $y = a(x-p)^2 + q$ a partir de $y = ax^2$.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar 90 minutos.

Função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$

Nas lições anteriores aprendeu a construir o gráfico e a fazer o estudo completo de uma função quadrática tipo $y = a(x-p)^2$ a partir de $y = ax^2$. Este tipo de função quadrática é aquele em que o $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Hoje vamos fazer o tratamento do tipo de função quadrática em que o $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$:

- Se o $\Delta > 0$, o gráfico da função pode ser construído facilmente basta para tal determinar os zeros da função, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, marcar estes pontos no SCO e uni-los;
- Se o $\Delta < 0$, a função não tem zeros e o gráfico não intersecta o eixo 0x. A expressão $y = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma $y = a(x-p)^2 + q$ e o gráfico da função pode ser construído através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$.

Os valores de p e q são iguais aos das coordenadas do vértice, x_v e y_v, respectivamente, que podem ser calculados usando as seguintes fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Nota:

- O gráfico da função $y = a(x-p)^2 + q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$, p unidades para a direita e q unidades para cima;

Venda proibida

- O gráfico da função $y = a(x-p)^2 - q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$, p unidades para a direita e q unidades para baixo;
- O gráfico da função $y = a(x+p)^2 + q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$, p unidades para a esquerda e q unidades para cima;
- O gráfico da função $y = a(x+p)^2 - q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$, p unidades para a esquerda e q unidades para baixo.

Gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$

Vamos construir o gráfico deste tipo de função a partir de um exemplo concreto:

Construa gráfico da função $y = -2x^2 + 2x - 1$.

Para construir o gráfico da função acima mencionada, vamos seguir os seguintes passos:

1) Determine os zeros da função:

Da função $y = -2x^2 + 2x - 1$, temos: $a = -2,\ b = 2,\ e\ c = -1$.

Logo, $\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \rightarrow \Delta = 4 - 8 \rightarrow \Delta = -4$

Sendo $\Delta = -4 < 0$, não existem zeros da função.

2) Determine a ordenada na origem da função:

A ordenada na origem é igual ao termo independente da função (c).

Portanto, a ordenada na origem é $y_0 = -1$.

3) Determine os valores de x_v e y_v:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-2)} = -\frac{2}{-4} \rightarrow x_v = \frac{1}{2}$; $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-4}{4\cdot(-2)} = \frac{4}{-8} \rightarrow y_v = -\frac{1}{2}$

4) Escreva a função $y = ax^2 + bx + c$ na forma $y = a(x-p)^2 + q$ (onde p é o x_v e o q é o y_v):

A função $y = -2x^2 + 2x - 1$ pode ser escrita na forma $y = -2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$.

5) Construa o gráfico da função através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$:

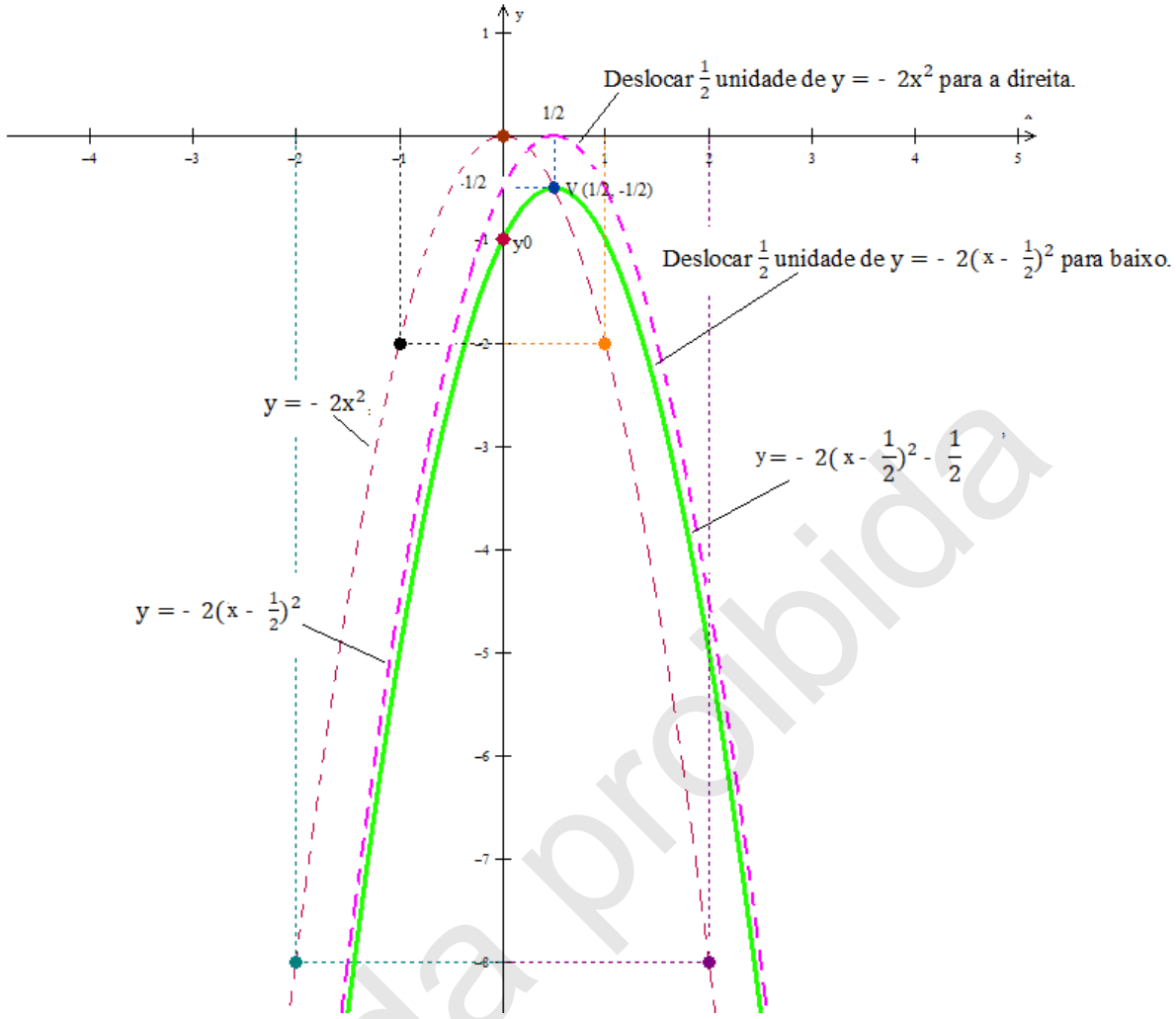
- O gráfico de $y = -2x^2$ obtém-se unindo os pontos obtidos através da tabela seguinte.

X	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

- Desloque $\frac{1}{2}$ unidade de $y = -2x^2$ para a direita (e obtém-se o gráfico de $y = -2(x - \frac{1}{2})^2$);
- Desloque $\frac{1}{2}$ unidade de $y = -2(x - \frac{1}{2})^2$ para baixo.

Venda proibida

O gráfico da função $y = -2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$ é:



Actividades

1. Construa o gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x + 3$.

Resolução:

Antes de mais nada, vamos extrair os valores de **a**, **b** e **c**. Logo, a = 1, b = 3 e c = 3.

Agora vamos achar os zeros, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, assim como escrever a função na forma $y = a(x - p)^2 + q$ e, posteriormente, construir o gráfico.

1) Zeros da função:

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \rightarrow \Delta = 9 - 12 \rightarrow \Delta = -3.$

O valor do Δ é negativo. Portanto, não existem zeros da função.

2) Ordenada na origem:

$x = 0 \leftrightarrow f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 \rightarrow f(0) = 0 + 0 + 3 \rightarrow f(0) = 3.$

Venda proibida

3) Coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\cdot 1} = -\frac{3}{2} \rightarrow x_v = -\frac{3}{2} \quad ; \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-3}{4\cdot 1} = \frac{3}{4} \rightarrow y_v = \frac{3}{4}$$

4) Função na forma $y = a(x-p)^2 + q$:

A função $y = x^2 + 3x + 3$ pode ser escrita na forma $y = 1 \cdot \left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \frac{3}{4}$. Isto é $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

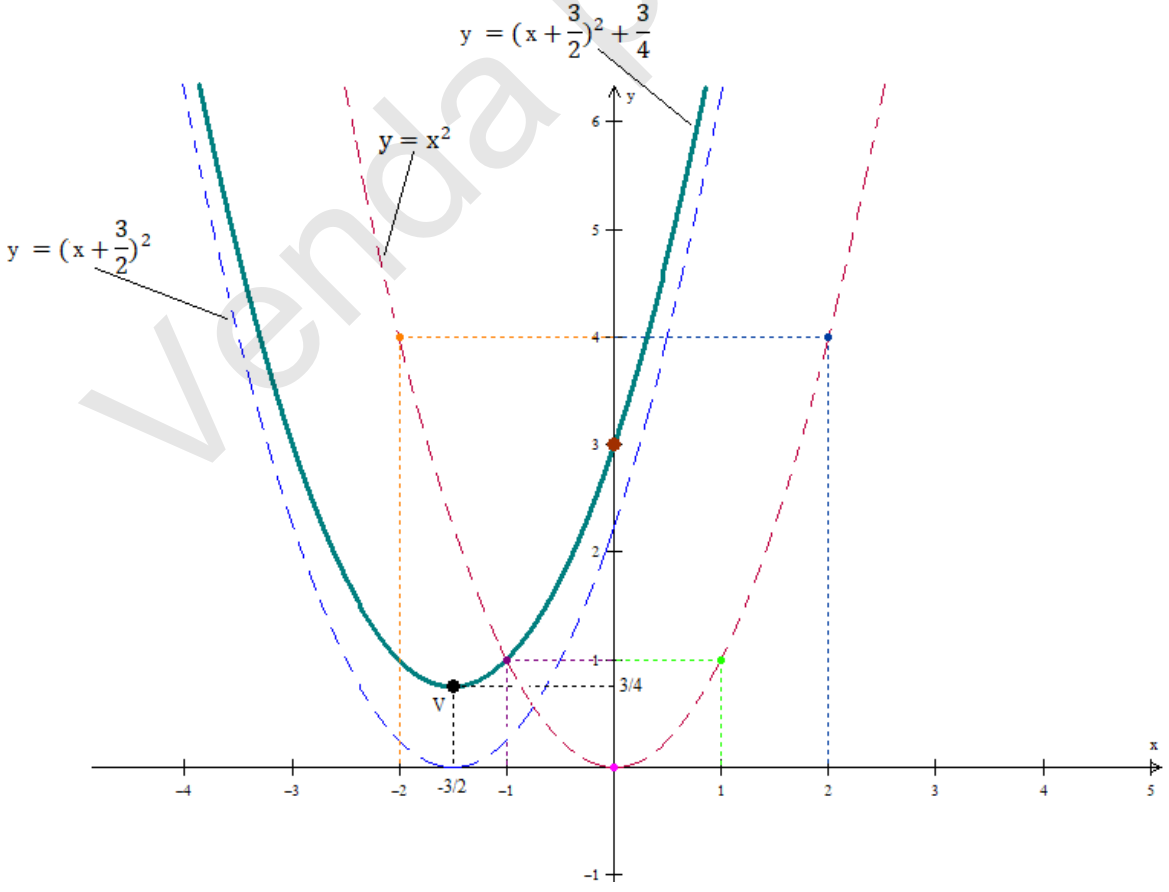
5) Gráfico:

O gráfico da função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$ obtém-se da seguinte maneira:

- Construir o gráfico de $y = x^2$, unindo os pontos obtidos através da tabela seguinte.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- a partir do gráfico de $y = x^2$, deslocar $\frac{3}{2}$ unidade para a esquerda (e obter o gráfico de $y = (x + \frac{3}{2})^2$);
- a partir do gráfico de $y = (x + \frac{3}{2})^2$, deslocar $\frac{3}{4}$ unidade para cima.



2. Construa o gráfico da função $f(x) = 2(x+2)^2 - 3$.

Venda proibida

Resolução:

Para construir o gráfico da função $f(x) = 2(x+2)^2 - 3$, basta fazer o seguinte:

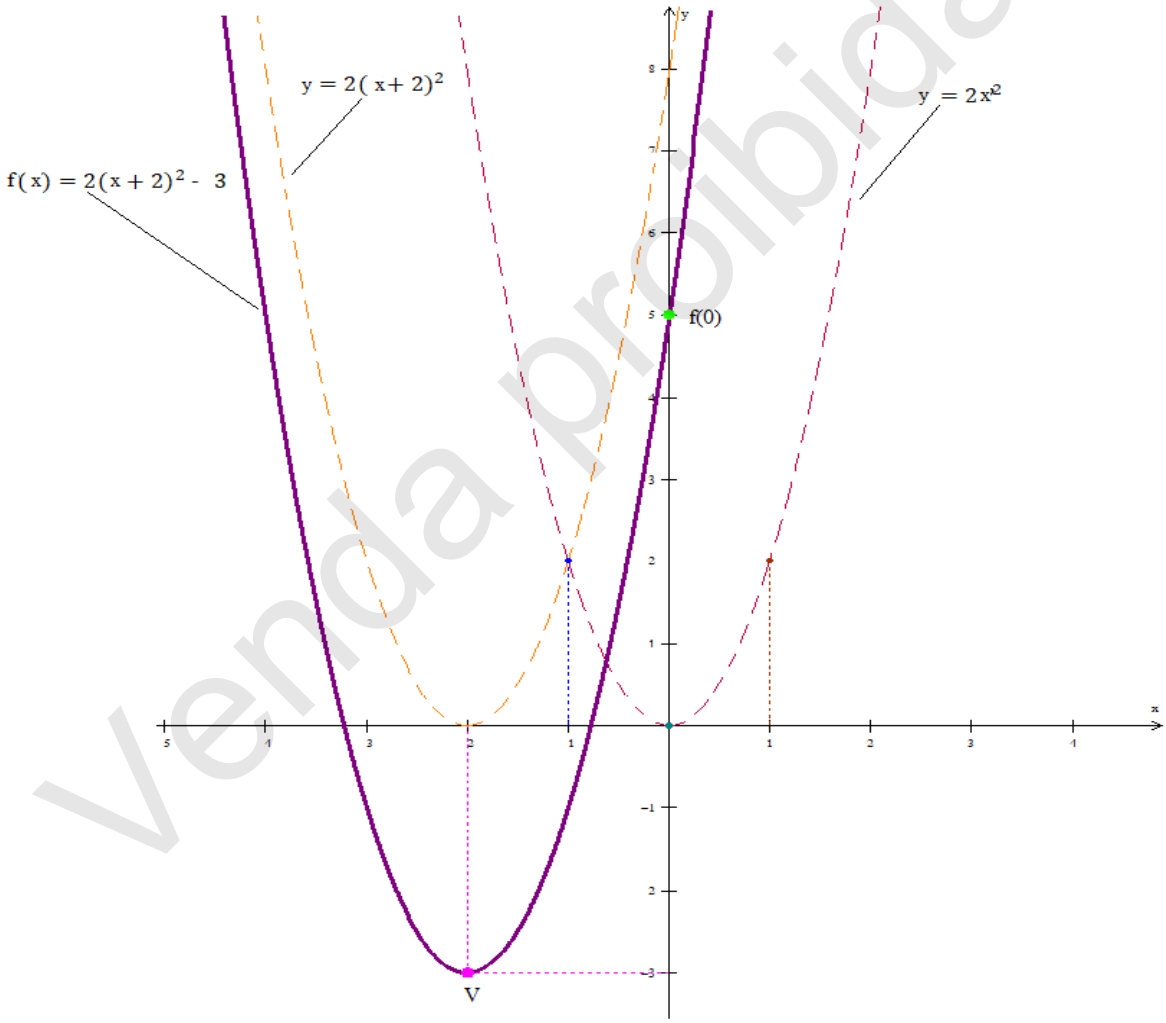
1) Construa o gráfico de $y = 2x^2$, unindo os pontos obtidos através da tabela seguinte.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

2) Desloque 2 unidades para a esquerda $y = 2x^2$, para obter o gráfico de $y = 2(x+2)^2$;
3) Desloque 3 unidades para baixo de $y = 2(x+2)^2$, para obter $f(x) = 2(x+2)^2 - 3$.

É também importante determinar a ordenada na origem: $f(0) = 2(0+2)^2 - 3 = 2 \cdot 4 - 3 \rightarrow f(0) = 8 - 3 = 5$.

O gráfico da função é:



Venda proibida

Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e dos exercícios resolvidos.

Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva o exercício que segue.

Exercícios

1. Considere a função $f(x) = -3(x+2)^2 + 4$. Assinale com "V" as afirmações verdadeiras e com "F" as falsas:
   a) A concavidade da parábola de f(x) está voltada para baixo. ___
   b) A ordenada na origem do gráfico da função f(x) é -16. ___
   c) O gráfico da função f(x) obtém-se a partir do gráfico $y = -3x^2$, deslocando-o 2 unidades para a direita e 4 para cima. ___
   d) O gráfico da função f(x) obtém-se a partir do gráfico $y = -3x^2$, deslocando-o 2 unidades para a esquerda e 4 para cima. ___

2. Construa os gráficos das funções abaixo:
   a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
   b) $f(x) = 4(x+2)^2 + 3$
   c) $f(x) = (x-4)^2 - 2$
   d) $f(x) = -5x^2 - 4x - 3$

Passe este resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

- Se o $\Delta < 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma $y = a(x-p)^2 + q$ e o seu gráfico pode ser construído através de transformações lineares feitas a $y = ax^2$.
- Os valores de p e q são iguais aos das coordenadas do vértice, x_v e y_v, respectivamente, que podem ser calculados usando as seguintes fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

- O gráfico da função $y = a(x-p)^2 + q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a direita e q unidades para cima;
- O gráfico da função $y = a(x-p)^2 - q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a direita e q unidades para baixo;
- O gráfico da função $y = a(x+p)^2 + q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a esquerda e q unidades para cima;
- O gráfico da função $y = a(x+p)^2 - q$, obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ p unidades para a esquerda e q unidades para baixo.

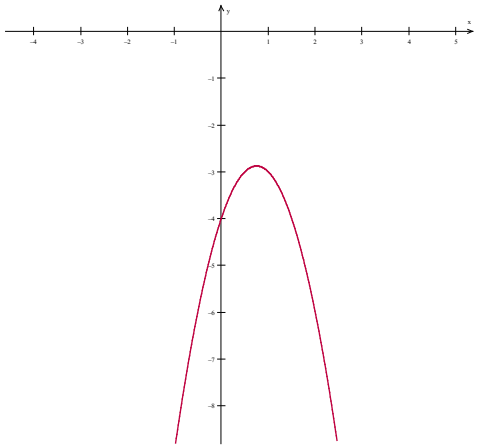
Compare os seus resultados com estes que são apresentados a seguir

Venda proibida

Chave de Correcção

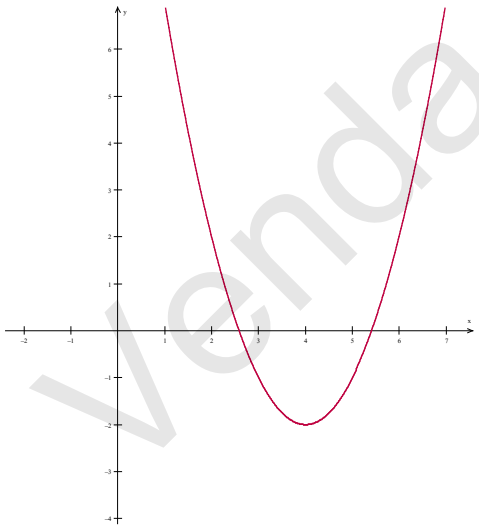
1. a) V b) F c) F d) V
2. Gráficos das funções:

$a)\ f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

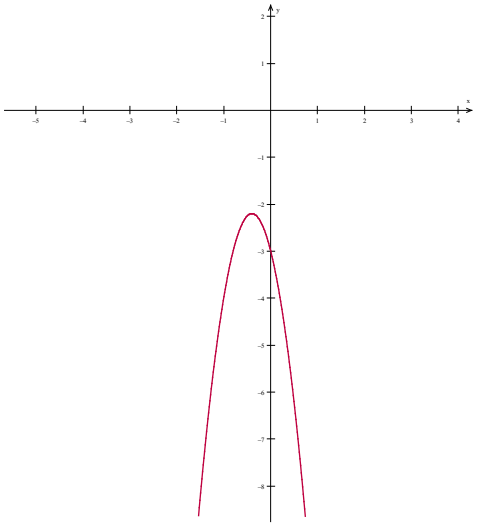


$b)\ f(x) = 4(x+2)^2 + 3$

$c)\ f(x) = (x-4)^2 - 2$



$d)\ f(x) = -5x^2 - 4x - 3$



Venda proibida

LIÇÃO Nº 16: Estudo completo da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$; Caso $y = a(x-p)^2 + q$

Introdução

Caro aluno, na lição passada fizemos as representações gráficas de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$. Na presente lição vamos fazer o estudo completo desse mesmo tipo de funções quadráticas.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Fazer estudo completo da função;
- Indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática;
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenada;
- Determinar as coordenadas do vértice;
- Determinar a equação do eixo de simetria de uma parábola

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Estudo completo da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ - caso $y = a(x-p)^2 + q$

Depois de construirmos o gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$, vamos fazer o estudo completo deste tipo de função.

Vamos ter como ponto de partida a função $f(x) = x^2 + 3x + 3$, cujo o gráfico foi construído na aula passada, no qual vimos que a função $f(x) = x^2 + 3x + 3$ pode ser escrita na forma $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Se tiver alguma dúvida de como transformar a função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $y = a(x-p)^2 + q$, faça revisão da última aula.

Vamos, a seguir, fazer o estudo completo da função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

a) Domínio

Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, o x pode assumir qualquer número real.

Venda proibida

Portanto, o domínio da função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

b) Contradomínio

O contradomínio da função quadrática definida por $f(x) = a(x-p)^2 + q$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é maior ou igual a y_V");
- Se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq y_V\}$ (lê-se: "y pertence a $\mathbb{R}$, tal que y é menor ou igual a y_V").

Se analisarmos a função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, vemos que $a = 1$ e $y_V = \frac{3}{4}$. Logo: $D'f = \left\{y \in \mathbb{R}: y \geq \frac{3}{4}\right\}$ ou $D'f = \left\{y \in \mathbb{R}: y \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right\}$.

c) Zeros da função

Chamam-se zeros da função quadrática, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Portanto, a função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$ tem como zeros:

$$y = 0 \rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

Analisando a igualdade $(x + \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$ podemos notar que ela é impossível, pois o quadrado de um número não deve ser negativo. Logo, a função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$ não tem zeros.

d) Ordenada na origem

Chama-se ordenada na origem, o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y. O valor da ordenada na origem obtém-se substituindo o x por 0 na função $y = a(x-p)^2 + q$.

Para o caso da função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, a ordenada na origem é $f(0) = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \rightarrow f(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \rightarrow f(0) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \rightarrow f(0) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \rightarrow f(0) = \frac{12}{4} \rightarrow f(0) = 3$

e) Vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V,** chamado **vértice da parábola.**

Na função do tipo $y = a(x-p)^2 + q$, a coordenada $x_V = p$ e a coordenada $y_V = q$.

Portanto, na função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, o vértice é $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

f) Parábola

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(x_V, y_V)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(x_V, y_V)$.

Venda proibida

Para o caso da função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, uma vez que $a = 1$, a parábola fica voltada para cima e o ponto mínimo é V $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

g) Variação do sinal da função

Determinar a variação do sinal de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ significa determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

$a > 0$					
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$a < 0$					
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-

Se a função $y = a(x - p)^2 + q$ não tiver zeros, há duas possibilidades:

- $a > 0$: a função é positiva em todo o domínio;
- $a < 0$: a função é negativa em todo o domínio.

Assim, a função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$ é positiva em todo intervalo, uma vez que $a = 1 > 0$ e não tem zeros.

h) Variação da função (monotonia)

A função f(x) muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty;\ x_V[$ e $]x_V;\ +\infty[$, f (x) é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$;
- Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

Para o caso de $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, uma vez que $a = 1$, a função é decrescente em $\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[$ e crescente em $\left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[$.

Podemos representar a monotonia em forma de tabela:

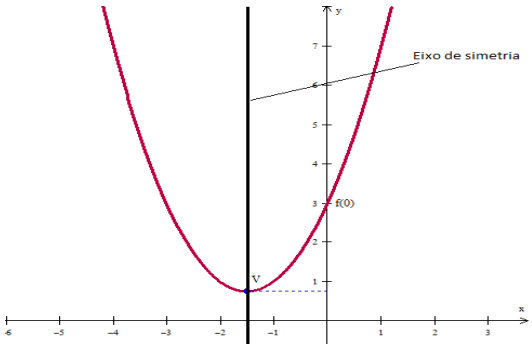
x	$\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[$	$-\frac{3}{2}$	$\left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[$
$f(x)$	↘	$\frac{3}{4}$	↗

i) Equação do eixo de simetria

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. Uma vez que a recta passa por V, ela divide a parábola em duas partes iguais e a sua equação é $x = x_V$.

Para a função $y = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$, a equação do eixo de simetria é $x = -\frac{3}{2}$.

Venda proibida



Actividade

1. Faça o estudo completo da função $f(x) = -2(x+2)^2 + 3$.

Para resolvermos este exercício, vamos nos basear no exemplo anterior.

Resolução:

- **Domínio**

O domínio da função $y = -2(x+2)^2 + 3$ é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$

- **Contradomínio**

O contradomínio da função $y = -2(x+2)^2 + 3$ é $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 3\}$ ou $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \in [-\infty; 3[\}$.

- **Zeros da função**

$$y = 0 \rightarrow -2(x+2)^2 + 3 = 0 \rightarrow -2(x+2)^2 = -3 \rightarrow (x+2)^2 = \frac{-3}{-2} \rightarrow (x+2)^2 = \frac{3}{2}$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 \ \vee\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 2$$

Portanto, os zeros da função são $x = \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 = -0{,}8$ e $x = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 2 = -3{,}2$.

- **Ordenada na origem**

Para a função $y = -2(x+2)^2 + 3$, a ordenada na origem é $y_0 = -2 \cdot (0+2)^2 + 3 = -2 \cdot 2^2 + 3 = -2 \cdot 4 + 3 = -5$.

- **Vértice da parábola**

$x_V = -2$, que equivale ao valor de p na função $y = -2(x+2)^2 + 3$;

$y_V = 3$, que equivale ao valor de q na função $y = -2(x+2)^2 + 3$.

Venda proibida

Portanto, o vértice é $V(-2,3)$.

- **Parábola**

Para a função $y=-2(x+2)^2+3$, uma vez que $a=-2$ (negativo), a parábola fica voltada para baixo e o ponto máximo é $V(-2,3)$.

- **Variação do sinal da função**

Para a função $y=-2(x+2)^2+3$, uma vez que $a=-2$, a variação do sinal é:

x	$]-\infty;\ -3{,}2[$	$-3{,}2$	$]-3{,}2;\ -0{,}8[$	$-0{,}8$	$]-0{,}8;\ +\infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-

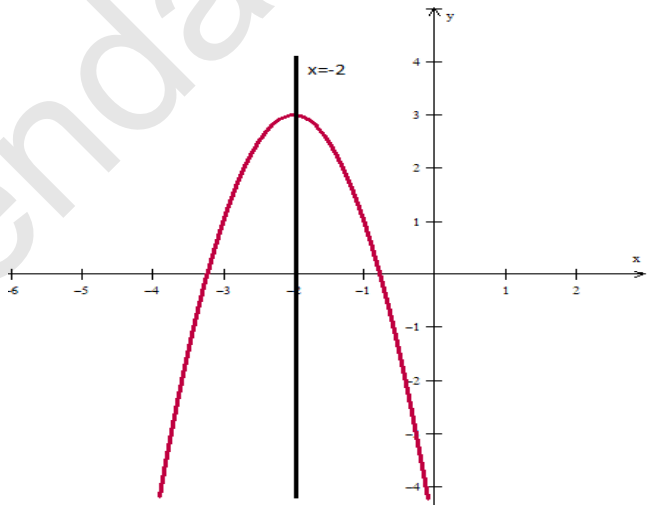
- **Variação da função (monotonia)**

Para a função $y=-2(x+2)^2+3$, uma vez que $a=-2$:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Crescente	-3	Decrescente

- **Equação do eixo da simetria**

Para a função $y=-2(x+2)^2+3$, a equação do eixo de simetria é $x=-2$, que equivale ao valor de x_v.



Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Agora, resolva os exercícios, no seu caderno.

Venda proibida

Exercícios

1. Considere a função $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Assinale com "V" as afirmações verdadeiras e com "F" as falsas:
   a) A concavidade da parábola de f(x) está voltada para baixo. ___
   b) A ordenada na origem do gráfico da função f(x) é - 2. ___
   c) A função não tem zeros. ___
   d) As coordenadas do vértice são $x_v = 2$ e $y_v = 1$. ___

2. Faça o estudo completo das funções:
   a) $f(x) = -2(x+2)^2 + 18$
   b) $f(x) = 4(x+2)^2 + 3$
   c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

Passe para o seu caderno o seguinte resumo.

Resumo da Lição

O Fazer o estudo completo de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ - *caso* $y = a(x-p)^2 + q$ implica determinar, a partir da função os seguintes pontos:

- **Domínio** - é o conjunto dos valores que x pode assumir. Para qualquer função quadrática, o domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$. Isto é, $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ ou $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$.
- **Contradomínio -** é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades: Se $a > 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq q\}$ e se $a < 0$, $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq q\}$.
- **Zeros da função** – são números reais x tais que $f(x) = 0$.

Para a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ – caso $y = a(x-p)^2 + q$, os zeros são determinados usando a fórmula resolvente $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Ordenada na origem**

Chama-se ordenada na origem, o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y. O valor da ordenada na origem obtém-se substituindo o x por 0 na função $y = a(x-p)^2 + q$.

- **Vértice da parábola**

As coordenadas do vértice podem ser obtidos da expressão $y = a(x-p)^2 + q$, onde $x_V = p$ e $y_V = q$. Portanto, o vértice V é definido da seguinte maneira V (p, q).

- **Parábola**

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto mínimo $V(p, q)$; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto máximo $V(p, q)$.

Venda proibida

- **Variação do sinal da função -** valores de x para os quais y é negativo e valores de x para os quais y é positivo.

$a > 0$					
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$a < 0$					
x	$]-\infty;\ x_1[$	x_1	$]x_1;\ x_2[$	x_2	$]x_2;\ +\infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-

- **Monotonia da função**

Se $a > 0$, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty;\ x_V[$ e crescente em $]x_V;\ +\infty[$; Se $a < 0$, $f(x)$ é crescente em $]-\infty;\ x_V[$ e decrescente em $]x_V;\ +\infty[$.

- **Equação do eixo da simetria**

O eixo de simetria é a recta que passa por V e é perpendicular ao eixo Ox. A sua equação é $x = x_V$.

Agora compare os seus resultados

Chave de Correcção

1. a) F b) F c) V d) V
2. Estudo completo das funções:

a) $f(x) = -2(x+2)^2 + 18$

- **Domínio:** $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio**: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \leq 18\}$;
- **Zeros da função:** $-2(x+2)^2 = -18 \rightarrow (x+2)^2 = \frac{-18}{-2} \rightarrow (x+2)^2 = 9 \rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{9} \rightarrow x + 2 = \pm 3 \rightarrow x = 1 \vee x = -5$;
- **Ordenada na origem:** $f(0) = -2(0+2)^2 + 18 = -2 \cdot 4 + 18 = 10$;
- **Vértice**: V (-2, 18);
- **Parábola:** voltada para baixo;
- **Variação do sinal:**

$a < 0$					
x	$]-\infty;\ -5[$	-5	$]-5;\ 1[$	1	$]1;\ +\infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-

b) $f(x) = 4(x+2)^2 + 3$

- **Domínio**: $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio**: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 3\}$;
- **Zeros da função:** $4(x+2)^2 + 3 = 0 \rightarrow 4(x+2)^2 = -3 \rightarrow (x+2)^2 = -\frac{3}{4}$

O quadrado de um número não deve ser negativo, logo a função não tem zeros;

- **Ordenada na origem:** $f(0) = 4(0+2)^2 + 3 = 4 \cdot 4 + 3 = 19$;
- **Vértice**: V (-2, 3);
- **Parábola:** voltada para cima;
- **Variação do sinal:**

A função é positiva em todo domínio;

Venda proibida

- **Monotonia:**

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Crescente	18	Decrescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = -2$.

- **Monotonia**:

x	$]-\infty;\ -2[$	-2	$]-2;\ +\infty[$
y	Decrescente	3	Crescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = -2$.

c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

- **Domínio**: $Df = \{x \in]-\infty;\ +\infty[\}$;
- **Contradomínio**: $D'f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -4\}$;
- **Zeros da função:** $(x-3)^2 = 4 \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{4} \rightarrow x - 3 = \pm 2 \rightarrow x = 5 \vee x = 1$;
- **Ordenada na origem:** $f(0) = (0-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$;
- **Vértice**: V (3, -4);
- **Parábola:** voltada para cima;
- **Variação do sinal:**

$a > 0$					
x	$]-\infty;\ 1[$	1	$]1;\ 5[$	5	$]5;\ +\infty[$
$f(x)$	+	0	-	0	+

- **Monotonia:**

x	$]-\infty;\ 3[$	3	$]3;\ +\infty[$
y	Decrescente	-4	Crescente

- **Equação do eixo de simetria:** $x = 3$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 17: Resolução de problemas práticos que envolvem funções quadráticas

Introdução

Caro aluno, depois de ter representado graficamente e feito o estudo completo das funções quadráticas, nas lições anteriores, vai aprender, nesta lição, a resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Resolução de problemas práticos que envolvem funções quadráticas

Nas lições anteriores vimos que para fazer o estudo completo de uma função quadrática, temos que determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, a ordenada na origem, o vértice da parábola, a variação do sinal, a monotonia e a equação do eixo de simetria dessa função.

A resolução de um problema que envolve função quadrática é feita determinando, pelo menos, um dos parâmetros acima descritos.

Vamos, de seguida, resolver três exercícios para demonstrar os procedimentos a serem tomados na resolução de um problema que envolve funções quadráticas.

Actividades

1. A altura, em metros, a que uma bola se encontra do chão quando é lançada para cima é dada em função do tempo, em segundos, pela função

$$h(t) = -t^2 + 2t + 3.$$

Antes de resolver o problema, vamos extrair os valores de a, b e c, e, posteriormente, determinar alguns pontos fundamentais da função: $a = -1$, $b = 2$ e $c = 3$.

- **Zeros da função:**

Usando a fórmula resolvente temos: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Venda proibida

Logo, $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 \Leftrightarrow \Delta = 4 + 12 \Leftrightarrow \Delta = 16$.

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ t_2 = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

- **Ordenada na origem:**

$t = 0 \Longrightarrow h(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 \Leftrightarrow h(0) = -0 + 0 + 3 \Leftrightarrow h(0) = 3$

- **Coordenadas do vértice:** $V\ (t_V, h_V)$

$t_V = \frac{t_1 + t_2}{2} \Leftrightarrow t_V = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow\ t_V = 1$

$h_v = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow h_v = -\frac{16}{4 \times (-1)} = \frac{-16}{-4} \Leftrightarrow h_v = 4.$

Depois de determinar os zeros da função, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, vamos resolver o problema, procurando dar significado aos pontos acima determinados.

a) A que altura do chão se encontra a bola no instante em que é lançada?

O instante em que que a bola é lancada corresponde ao instante inicial ($t = 0$). Portanto, determinar a altura do chão a que a bola se encontra, significa determinar a ordenada na origem $h(0) = 3$.

Resposta: No instante em que a bola é lançada, ela encontra-se a 3 m do chão.

b) Determine a altura máxima atingida pela bola.

Para determinar a altura máxima atingida pela bola, primeiro é preciso perceber que a trajectória descrita pela bola, de acordo com a função acima apresentada, é uma parábola.

Portanto, determinar a altura máxima atingida pela bola, significa encontrar a coordenada vertical do vértice ($h_v = 4$).

Resposta: A altura máxima atingida pela bola é de 4 m.

c) Em que tempo a bola atinge a altura máxima?

O tempo de altura máxima corresponde à coordenada horizontal do vértice ($t_V = 1$).

Resposta: O tempo da altura máxima é de 1 s.

2. A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora h do dia, pela expressão $t = -h^2 + 22h - 85$.

Venda proibida

Antes de resolvermos o problema, a semelhança do que foi feito no exercício anterior, vamos extrair os valores de a, b e c, e, posteriormente, determinar alguns pontos fundamentais da função: $a = -1$, $b = 22$ e $c = -85$.

- **Zeros da função:**

Usando a fórmula resolvente temos: $h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Logo, $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (22)^2 - 4 \times (-1) \times (-85) \Leftrightarrow \Delta = 484 - 340 \Leftrightarrow \Delta = 144$.

$$h_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{144}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-22 \pm 12}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{-22 + 12}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \\ h_2 = \frac{-22 - 12}{-2} = \frac{-34}{-2} = 17 \end{cases}$$

- **Ordenada na origem:**

$h = 0 \Longrightarrow t(0) = -0^2 + 22 \times 0 - 85 \Leftrightarrow h(0) = -0 + 0 - 85 \Leftrightarrow t(0) = -85$

- **Coordenadas do vértice:** $V\ (h_V, t_V)$

$$h_V = \frac{h_1 + h_2}{2} \Leftrightarrow h_V = \frac{5 + 17}{2} = \frac{22}{2} = 11 \Leftrightarrow\ h_V = 11$$

$$t_v = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow t_v = -\frac{144}{4 \times (-1)} = \frac{-144}{-4} \Leftrightarrow t_v = 36$$

Depois de determinar os zeros da função, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, vamos resolver o problema, procurando dar significado aos pontos acima determinados.

a) Em quais horários a temperatura é 0^oC?

Para responder esta questão, temos que recorrer a equação e determinar as horas em que a temperatura é de 0^oC. Isto é, temos que determinar os zeros da função.

Resposta: A temperatura é de 0^oC às 5 h e 17 h.

b) Em que período do dia a temperatura é positiva? E negativa?

Para responder esta questão, temos que fazer o estudo da variação do sinal da função:

h	$]-\infty;\ 5[$	5	$]5;\ 17[$	17	$]17;\ +\infty[$
$t(h)$	-	0	+	0	-

Resposta: A temperatura é positiva no período entre 5 h e 17 h, e é negativa antes das 5 h e depois das 17 h.

c) Em que período do dia a temperatura é crescente? E decrescente?

Para responder esta questão, temos que fazer o estudo da monotonia da função:

Venda proibida

h	$]-\infty;\ 11[$	11	$]11;\ +\infty[$
$t(h)$		36	

Resposta: A temperatura é crescente antes das 11h, e é decrescente depois das 11 h.

d) Em que horário a temperatura é máxima?

O tempo da temperatura máxima corresponde à coordenada horizontal do vértice ($h_V = 11$).

Resposta: A temperatura é máxima às 11h.

e) Qual é a temperatura máxima?

A temperatura máxima corresponde à coordenada vertical do vértice ($t_V = 36$).

Resposta: A temperatura máxima é 36^oC.

3. O João encontrou um gafanhoto em cima de um muro. Quando o gafanhoto saltou, a sua altura em relação ao chão (metros) variou com o tempo (em segundos) de acordo com a seguinte condição: $s(t) = -2t^2 + 4t + 6$.

Antes de resolvermos o problema, a semelhança do que foi feito no exercício anterior, vamos extrair os valores de a, b e c, e, posteriormente, determinar alguns pontos fundamentais da função: $a = -2$, $b = 4$ e $c = 6$.

- **Zeros da função:**

Usando a fórmula resolvente temos: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Logo, $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (4)^2 - 4 \times (-2) \times 6 \Leftrightarrow \Delta = 16 + 48 \Leftrightarrow \Delta = 64$.

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-4+8}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \\ t_2 = \frac{-4-8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{cases}$$

- **Ordenada na origem:**

$t = 0 \Longrightarrow s(0) = -2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 6 \Leftrightarrow s(0) = -0 + 0 + 6 \Leftrightarrow s(0) = 6$

- **Coordenadas do vértice:** $V\ (t_V, s_V)$

$$t_V = \frac{t_1 + t_2}{2} \Leftrightarrow t_V = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow\ t_V = 1$$

$$s_v = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow s_v = -\frac{64}{4 \times (-2)} = \frac{-64}{-8} \Leftrightarrow s_v = 8$$

Venda proibida

Depois de determinar os zeros da função, a ordenada na origem e as coordenadas do vértice, vamos resolver o problema, procurando dar significado aos pontos acima determinados.

a) Determine a altura do muro.

A altura do muro corresponde à ordenada na origem da função $s(0)$, e de acordo com a resolução acima apresentada, $s(0) = 6$.

Resposta: A altura do muro é de 6 m.

b) Qual foi a altura máxima atingida pelo gafanhoto?

A altura máxima atingida pela gafanhoto equivale coordenada vertical do vértice ($s_v = 8$), acima determinada.

Resposta: A altura máxima atingida pelo gafanhoto é de 8m.

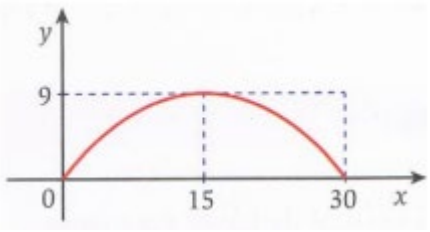
Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa dos exercícios resolvidos.

Agora chegou a momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios propostos.

Exercícios

1. A trajectória descrita por uma bola de golfe tem a forma de uma parábola. Num terreno plano, a distância percorrida pela bola de golfe foi de 30 metros e a altura máxima atingida foi de 9 metros.



Escreva uma equação para a trajectória da bola de golfe.

2. O movimento de um projéctil, lançado para cima, é descrito pela equação $y = -40t^2 + 200t$, onde y é a altura, em metros, atingida pelo projéctil t segundos após o lançamento.

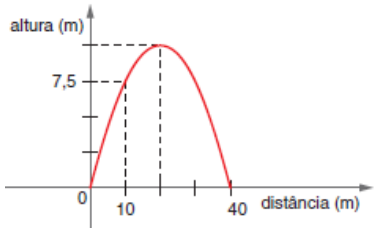
a) Qual foi a altura máxima atingida pelo projéctil?

b) Determine o tempo que esse projéctil permanece no ar.

3. Um coco é largado do alto de um coqueiro e cai em direcção ao solo. A sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento o coco atingirá o solo?

Venda proibida

4. Um futebolista chutou uma bola que se encontrava parada no chão e ela descreveu uma trajectória parabólica, indo tocar o solo 40 m adiante, como mostra a figura.



Qual foi a altura máxima atingida pela bola?

5. Uma indústria de refrigerantes tem a sua produção diária P, em garrafas, variando com o número de operadores em serviço n, de acordo com a função $P(n) = n^2 + 50n + 20000$.
   a) Qual será a produção se o número de operadores for 40?
   b) Calcule o número de operadores necessário para produzir 20600 garrafas de refrigerantes.

6. O saldo de uma conta bancaria é dado por $S = t^2 - 11t + 24$, onde $\boldsymbol{S}$ é o saldo em Meticais e o $\boldsymbol{t}$ é o tempo em dias. Determine:
   a) Em que dias o saldo é zero.
   b) Em que período o saldo é negativo.
   c) Em que período o saldo é positivo.
   d) Em que dia o saldo é mínimo.
   e) O saldo mínimo.

Agora passe este resumo para o seu caderno

Resumo da Lição

Para resolver um problema que envolve uma função quadrática, primeiro deve-se extrair os valores de a, b e c, e, posteriormente, determinar alguns pontos fundamentais da função como, zeros da função, ordenada na origem e coordenadas do vértice e fazer o estudo da variação do sinal e da monotonia da função, e procurar dar significado à estes parâmetros determinados.

Confira a seguir os resultados dos exercícios que acabou de resolver.

Chave de Correcção

1. $y = -25x^2 + 750x$ **2.** a) 250 m b) 5 s **3.** $5s$

4. $10\ m$ **5.** a) 23600 b) 10

Venda proibida

6. a) Dias 3 e 8 c) Antes do dia 3 e depois do dia 8 e) - 6 Meticais

b) Entre os dias 3 e 8 d) Dia 5

Venda proibida

LIÇÃO Nº 18: Resolução gráfica de inequação quadrática

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido na lição anterior a resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas, nesta lição vamos abordar conteúdo sobre inequações quadráticas, sua resolução usando o método gráfico.

Convidamos desde já a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar inequações quadráticas;
- Resolver graficamente uma inequação quadrática.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Inequações quadráticas

Inequação quadrática é uma expressão do segundo grau com uma variável, representada na forma: $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c < 0 \ ou \ ax^2 + bx + c \leq 0$, onde ***a, b, c*** são números reais com $a \neq 0$.

Nota: Caro aluno, a diferença entre equações e inequações é apenas o sinal que liga os dois membros, de **igualdade** para as equações e **desigualdade** para as inequações.

Exemplos:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

b) $5x^2 - 10x \leq 0$

c) $-x^2 + 4 < 0$

d) $x^2 + 2 > 0$

Resolução das inequações quadrática

Resolver uma inequação quadrática, é determinar todos valores do universo que transformam a inequação em desigualdade verdadeira.

Ao conjunto de todos elementos do universo que transformam a inequação numa desigualdade verdadeira chama-se **conjunto solução ou solução da inequação.**

Para encontrar o conjunto solução da inequação quadrática, pode se proceder em dois métodos: **método analítico ou método gráfico**

Venda proibida

Resolução de inequações quadráticas pelo método gráfico

Caro aluno, para resolver uma inequação quadrática pelo método gráfico, devemos estudar o sinal de cada função correspondente à inequação.

Exemplos:

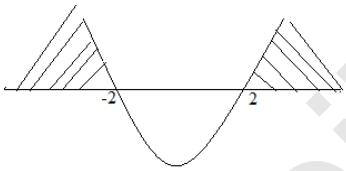
Seja dada a inequação: $x^2 - 4 > 0$, resolva-a graficamente.

1º Passo: Formar a função correspondente a inequação: $f(x) = x^2 - 4$; para $f(x) > 0$

2º Passo: Determinar os zeros da função.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

3º Passo: Fazer o esboço do gráfico da função e analisar da variação do sinal.



4º Passo: A partir do gráfico, extrair a solução da inequação.

Solução: $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Resolva os seguintes exercícios

Exercícios

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre inequações quadráticas, sua resolução usando o método gráfico, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

1. Resolva graficamente as seguintes inequações:

a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 3 < 0$

c) $2x^2 - 10x \geq 0$

d) $-x^2 - 2 > 0$

e) $-2x^2 + 2x + 4 \geq x + 3$

f) $x^2 + 6x - 7 > 0$

Elabore o seu resumo no caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a resolver inequações quadráticas aplicando o método gráfico. Dissemos que este método baseia-se na leitura da variação do sinal do gráfico da função quadrática.

Confira os seus resultados aqui.

Chave de Correcção

1. a) $x \in [1;4]$ b) $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ c) $x \in]-\infty;0] \cup [5;+\infty[$ d) $x \in \emptyset$

e) $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$ f) $x \in]-\infty;-7[\cup]1;+\infty[$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 19: Resolução analítica de inequação quadrática

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido na lição anterior a resolver inequações quadráticas aplicando o método gráfico, nesta lição vamos continuar a resolver inequações quadráticas, aplicando um outro método, neste caso o método analítico.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver analiticamente uma inequação quadrática.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Resolução analítica de inequação quadrática

A resolução de inequações quadráticas também pode ser feita aplicando o método analítico, com a utilização de quadro de sinais, que pode ter varias formas de acordo com cada caso. Para o preenchimento do quadro de sinais temos que em primeiro lugar, determinar os zeros da função.

Seja dada a inequação: $x^2 - 4 > 0$, resolva-a.

1º Passo: Transformar a inequação numa equação correspondente: $x^2 - 4 = 0$;

2º Passo: Determinar as raízes da equação e factorizá-la;

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \vee x_2 = 2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

3º Passo: Representar a inequação na forma factorizada;

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$$

4º Passo: Fazer a tabela da variação dos sinais, colocando as raízes em ordem crescente na primeira linha na tabela e na primeira coluna os factores da inequação.

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;2[$	2	$]2;+\infty[$
$(x-2)$					
$(x+2)$					
$(x-2)(x+2)$					

5º Passo: Fazer análise do sinal de cada factor e do produto dos factores.

Venda proibida

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;2[$	2	$]2;+\infty[$
$(x-2)$	$-$	-4	$-$	0	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	4	$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

6º Passo: A partir da tabela, extrair a solução da inequação verificando os intervalos onde o produto é positivo.

S: $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Exemplo 2:

Resolva a seguinte inequação quadrática $x^2 + x - 2 < 0$ usando o método analítico.

1º Passo: Achar os zeros $x^2 + x - 2 < 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \; a = 1, b = 1, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 41(-2) = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \vee x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

2º Passo: Factorizar o polinómio o $x^2 + x - 2$, teremos:

Lembre se de: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$, então:

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, voltando a nossa inequação($x^2 + x - 2 < 0$**)** substituir teremos:

$x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) < 0$

3º Passo: Preencher a tabela

Assim que já temos os factores na inequação, vamos preencher a tabela:

x	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,1[$	1	$]1,+\infty[$
$x-1$	-	-3	-	0	+
$x+2$	-	0	+	3	+
$(x+2)(x-1)$	+	0	-	0	+

4º Passo: Extracção da solução

Então nossa inequação será satisfeita para: $x \in]-2,1[$ que é a solução da inequação.

Venda proibida

Chegou o momento de exercitação. Mãos a obra.

Exercícios

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre a resolução de inequações usando o método analítico, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos:

Usando o método analítico, resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 + 4x + 4 < 0$

b) $-x^2 + x + 6 \leq 0$

c) $2x^2 - 10x \geq 0$

d) $-x^2 - 2 > 0$

e) $-2x^2 + 2x + 4 \geq x + 3$

f) $x^2 + 6x - 7 > 0$

Faça o seu resumo no caderno como forma de consolidação da matéria.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a resolver inequações quadráticas aplicando o método analítico. Dissemos que este método baseia-se no uso de tabela que nos permite fazer a leitura do sinal de cada facto que compõe o trinómio quadrático.

Confira a Chave de Correcção

Chave de Correcção

a) $x \in \emptyset$

b) $x \in [-2,3]$

c) $x \in]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

d) $x \in \emptyset$

e) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$

f) $x \in]-\infty; -7[\cup]1; +\infty[$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 20: Poliedros

Introdução

Caro Aluno, nesta lição vamos começar por recordar o conceito de poliedro e a sua classificação com base no número de bases, número de lados da base, para com base nesses conhecimentos aprendermos a diferenciar poliedros de Platão, convexos e não convexos e ainda vai aprender a relação de Euler e sua aplicação.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar poliedros;
- Classificar poliedros;
- Aplicar a relação de Euler no cálculo do número de faces, ;
- Aplicar a relação de Euler no cálculo do número vértices;
- Aplicar a relação de Euler no cálculo do número de arestas.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar 60 minutos.

Caro Aluno, muitas formas reais encontradas em objectos do dia-a-dia, tais como embalagens de produtos, construções, entre outros, lembram sólidos geométricos, os quais são figuras tridimensionais idealizadas pela Geometria. Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos: Poliedros e não poliedros.

Conceito de poliedro

Os poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos e outros.).

A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa “vários”, e edro, “face”. A seguir alguns exemplos de poliedros:

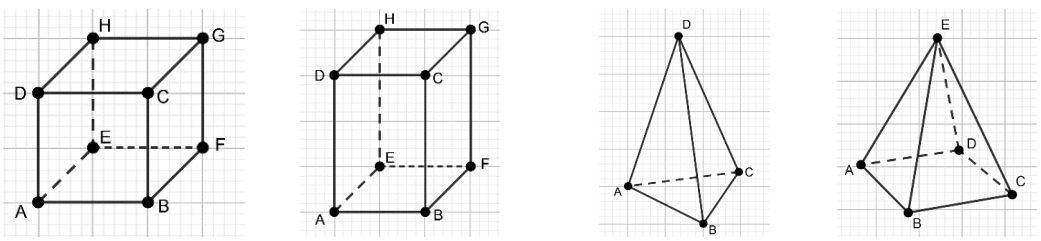


Fig. 2 – Poliedros

Venda proibida

Elementos dos poliedros

Os poliedros têm como elementos que os distinguem as faces, as arestas, os vértices.

Faces: são os polígonos que formam a superfície do poliedro. Exemplo: ABCD, DCGF, etc.

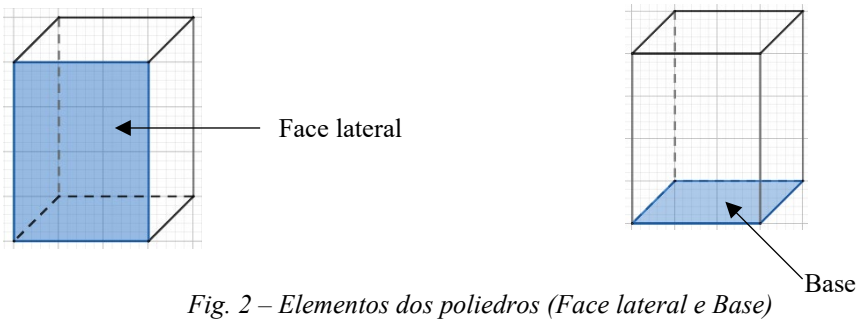


Fig. 2 – Elementos dos poliedros (Face lateral e Base)

Arestas: são os lados dos polígonos que constituem as faces do poliedro. Cada aresta é um segmento de recta determinada pela intersecção de duas faces. Exemplo: AB, BH, HG, etc.

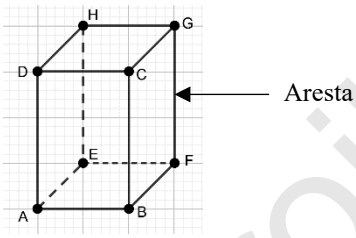


Fig. 3 – Elementos dos poliedros (Aresta)

Vértices: são as extremidades das arestas. Cada vértice é a intersecção de duas ou mais arestas. Exemplo: A,B,C,D,E,F,G,H.

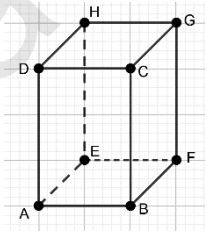


Fig. 4 – Elementos dos poliedros (Vértices)

Classificação de poliedro

A classificação de poliedros baseia-se nas suas características, como o número de bases, a inclinação das arestas, entre outros elementos.

Por exemplo, quanto às bases podemos ter pirâmides e prismas:

Os **prismas** são poliedros que possuem duas bases congruentes e paralelas em planos distintos;

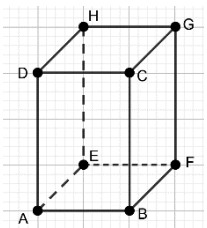


Fig. 5 – Prisma

Note que de todas as faces deste poliedro duas são destintas, as faces ABFE e DCGH, estas faces são chamadas bases.

Venda proibida

As **pirâmides** são poliedros que possuem apenas uma base poligonal e as faces laterais triangulares.

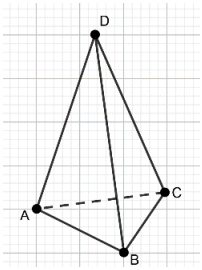


Fig. 6 – Pirâmide triangular

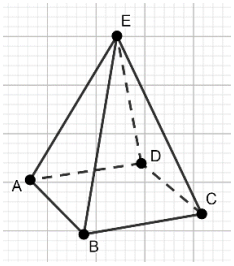


Fig. 7 – Pirâmide quadrangular

Um elemento que também nos ajuda a classificar poliedro é a face, quando o poliedro possui todas as faces e consequentemente todas as arestas congruentes, é chamado poliedro regular, ou poliedro de **Platão.**

Exemplo:

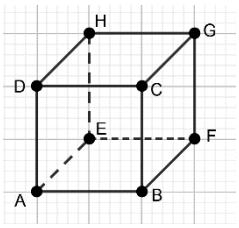


Fig. 8 – Hexaedro (6 faces) ou Cubo

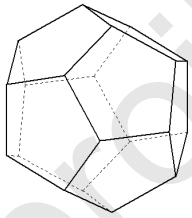
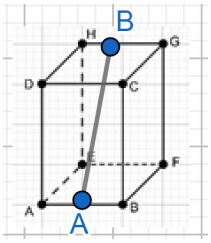


Fig. 9 – Dodecaedro (12 faces)

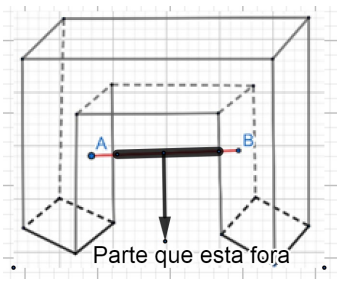
Platão foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental.

Dentro do conjunto de todos os poliedros, existem dois grupos muito importantes, os convexos e os não convexos (côncavo), esta lição dedica especial atenção a um desses dois tipos, os convexos.

Convexo: um poliedro é convexo se qualquer que seja o segmento com extremidades dentro do poliedro estiver totalmente contido no poliedro. Por outras palavras ele fica completamente no interior do poliedro. Observe o segmento AB.



Côncavo: um poliedro é côncavo se algum segmento com extremidades dentro do poliedro possuir pontos fora do poliedro. Por outras palavras ele não fica completamente no interior do poliedro tem uma parte fora dele como ilustra, por exemplo o segmento AB na imagem.



Quando o poliedro é convexo, é possível utilizar a relação de Euler para encontrar seu número de arestas, lados ou vértices.

Venda proibida

Relação de Euler

Segundo Euler, em todos os poliedros convexos, nos quais as faces são formadas por polígonos regulares com o mesmo número de arestas, vale a seguinte relação:

$$F + V - 2 = A$$

Onde:

V: é o número de vértices;

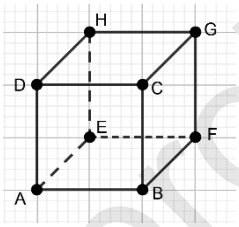
A: é o número de arestas;

F: é o número de faces.

Esta relação é válida para todo poliedro convexo, mas existem alguns poliedros não convexos para os quais ela também pode ser verificada. Por isso dizemos:

Todo poliedro convexo é euleriano (isso significa que para ele vale a relação de Euler), mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Exemplo 1: O cubo é um poliedro convexo e tem 6 faces, 8 vértices, e 12 arestas.



Verificação:

$V = 8$

$F = 6$

$A = 12$

$F + V - 2 = A$

$6 + 8 - 2 = 14 - 2 = 12$

Exemplo 2:Determine o número de arestas de um sólido geométrico que possui 10 vértices e 7 faces.

Resolução:

Dados: $V = 10$

$F = 7$

$A =?$

Então, como $F + V - 2 = A$ teremos:

$7 + 10 - 2 = A$

$A = 7 + 10 - 2 = 15$

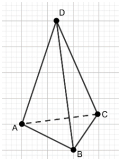
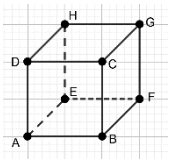
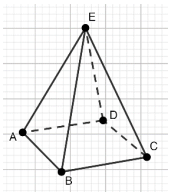
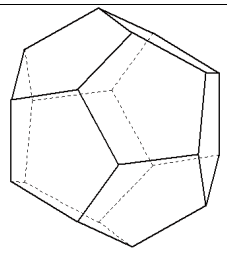
Resposta: Se esse poliedro existir, o número de aresta será 15.

Caro aluno, acabou de aprender a relação de Euler, mas isso basta? Claro que não basta pois como percebeu a relação de Euler nos dá:

- o número de **arestas** sabendo o número de vértices e de faces;
- o numero de **vértices** sabendo o número de faces e arestas;
- o numero de **faces** sabendo o número de arestas e vértices.

Venda proibida

Da observação do poliedro podemos saber facilmente se é uma pirâmide ou prisma. Se for pirâmide tem uma base e essa base é um polígono com um determinado número de lados que define o número de faces laterais. Se é um prisma tem duas bases e a base determina o número de faces laterais que ele tem. Se for um poliedro regular podemos saber facilmente o número de faces que tem e o número de lados que tem cada face. Com base nessa informação podemos usar as estratégias expostas no quadro a seguir:

Poliedro	Faces	Vértices	Arestas	Relação de Euler
 Pirâmide triangular	4	4	$\frac{4\times3}{2}=\frac{12}{2}=\mathbf{6}$ Porque é uma pirâmide tem 4 faces triangulares, cada face com três lados, mas cada lado é aresta de duas faces.	$4+4-2=6$
 Hexaedro	6	8	$\frac{6\times4}{2}=\frac{24}{2}=\mathbf{12}$ Porque é um poliedro regular que tem 6 faces quadrangulares, cada face com quatro lados, mas cada lado é aresta de duas faces.	$6+8-2=12$
 Pirâmide quadrangular	5	5	$\frac{4\times3+1\times4}{2}=\frac{16}{2}=\mathbf{8}$ Porque é uma pirâmide que tem 4 faces triangulares mais 1 face quadrangular, cada face triangular com três lados, e a face quadrangular com quatro lados, cada lado é aresta de duas faces.	$5+5-2=8$
 Dodecaedro	12	**20**	$\frac{12\times5}{2}=\frac{60}{2}=\mathbf{30}$ Porque é um poliedro regular que tem 12 faces pentagonais, cada face com cinco lados, mas cada lado é aresta de duas faces.	$F+V-2=A$ $12+V-2=30$ $V=30+2-12$ $=\mathbf{20}$

Venda proibida

Exercícios

1. Determine o número de faces que possui um poliedro
   a) com 12 arestas e 6 vértices;
   b) com 10 arestas e 6 vértices
   c) com 12 vértices e 9 faces.

2. Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objectos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler. Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?
   a) 2V-4F=4 b) 2V-2F=4 c) 2V+F=4 d) 2V-F=4

3. O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Então, qual o número de faces do poliedro?

4. Um octaedro possui 8 faces e 16 arestas. Determine o número de seus vértices.

5. Sabendo que um poliedro possui 20 vértices e que em cada vértice se encontram 5 arestas, determine o número de faces dessa figura.

6. Sabendo que num poliedro o número de vértices corresponde a 2/3 do número de arestas, e o número de faces é três unidades menos que o de vértices. Calcule o número de faces, de vértices e arestas desse poliedro.

7. Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

8. Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

Faca o seu resumo no caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição recordamos o conceito de poliedro, a classificação destes quanto ao número de bases dentre outras coisas referentes aos poliedros.

Ainda sobre a classificação dos poliedros, dedicamos uma especial atenção aos poliedros eulerianos, e dissemos que para estes existe uma relação matemática segundo a qual pode-se calcular o número de faces, de arestas e de vértices.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de Correcção

1. a) 8 b) 6 c) 19
2. d)
3. 12 faces
4. 6 vértices
5. 32 faces
6. O poliedro possui 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.
7. 8 faces
8. O poliedro possui 3 faces pentagonais e 3 faces triangulares, totalizando 6 faces

Venda proibida

LIÇÃO Nº 21: Área e volume do cubo

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido o conceito de poliedro e ter aplicado a relação de Euler para a determinação de faces, de vértices e arestas num poliedro convexo, chegou a vez de calcular a área e o volume do hexaedro mais conhecido pelo nome de cubo.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular área do cubo;
- Calcular volume do cubo.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Caro aluno, nesta lição vamos dedicar a nossa atenção ao cubo. Como bem sabe o cubo é um solido geométrico da família dos poliedros cujas faces são iguais e por sinal são quadrados. Por serem faces quadrangulares, vamos dedicar algum tempo para recordar o cálculo da área do quadrado.

Exemplo: Calcule a área do quadrado sabendo que a medida da amplitude do seu lado é de $6cm$.

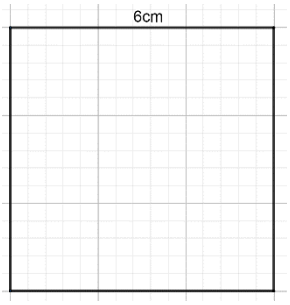
Resolução:

Dados

$l = 6\text{cm}$

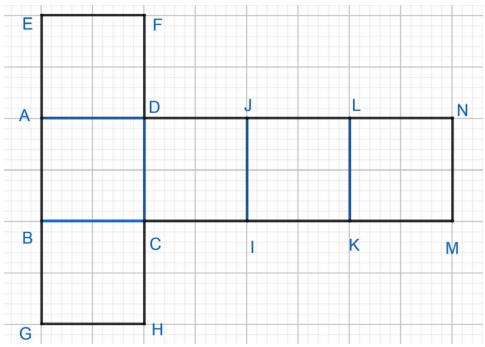
$A_{\square} = l \times l$

$A_{\square} = 6\text{cm} \times 6\text{cm} = 36\text{cm}^2$



Caro aluno, consideramos que este exercício é suficiente para rever a área da superfície delimitada por este polígono que chamamos quadrado, agora voltemos ao cubo.

O cubo tem seis faces quadrangulares, geometricamente iguais como indica a figura ao lado, depois da planificação. Por isso para calcular a área deste sólido é preciso ter em conta todas as suas faces.

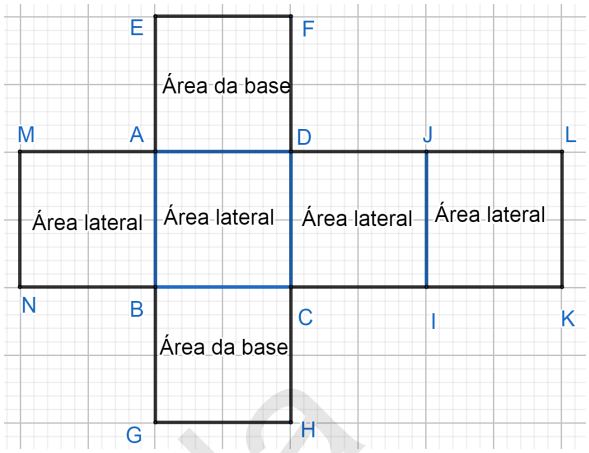


Venda proibida

Área total do cubo

A área total do cubo será dada pela soma resultante da adição das áreas das bases e as áreas laterais.

$$A_T = 4A_L + 2A_B$$



Onde A_T é área total

A_L é Área lateral

A_B é área da base

Mas como sabemos $A_L = A_B$ então:

$$A_T = 4A_L + 2A_B = 6A_{\square}$$

Volume do cubo

Exemplo: Calcule a área total da superfície do cubo sabendo que a medida da amplitude da sua aresta é de $4cm$.

Resolução:

Dados

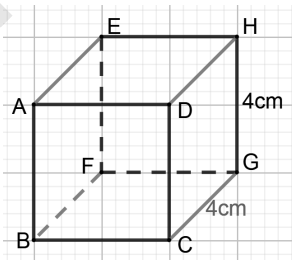
$l = \text{a} = 4\text{cm}$

$\text{A}_T = 6 \times \text{A}_{\square}$

$\text{A}_T = 6 \times l^2$

$\text{A}_T = 6 \times 4^2 = 6 \times 16cm^2$

$= 96cm^2$



Resposta: A área total do cubo é de $96cm^2$.

O volume do cubo é igual ao cubo da medida da amplitude da sua aresta.

$$V = a \times a \times a = a^3$$

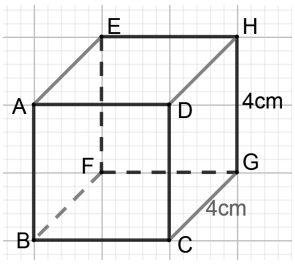
Exemplo: Calcule o volume de um cubo sabendo que a medida da amplitude da sua aresta é de $4cm$.

Resolução:

Dados

$\text{a} = 4\text{cm}$

$V = a^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64cm^3$



Resposta: O volume do cubo é de $64cm^3$.

Chegamos ao fim desta lição, mas antes de realizar exercícios de consolidação de tudo o que aprendeu vamos deixar aqui alguma curiosidade que ao longo deste estudo sobre os sólidos ira perceber melhor.

O cubo é um caso particular de prisma. Por isso podemos também definir o cubo como um prisma com seis faces iguais.

Resolva a seguir os seguintes exercícios.

Venda proibida

Exercícios

1. Calcule a área total da superfície do cubo sabendo que a medida da sua aresta é de $5cm$.
2. Calcule o volume de um cubo sabendo que a medida da sua aresta é de $7cm$.
3. Um reservatório de forma cúbica tem de aresta $1{,}5m$. Despreza a espessura das paredes do reservatório.
   a) Qual é a sua capacidade?
   b) Qual é a área total da superfície que envolve o reservatório sem incluir a tampa.

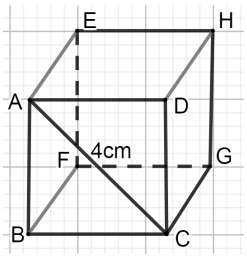
4. O perímetro de uma das faces de um cubo é de $30\ cm$. Qual é o volume desse cubo?

5. A área da base de um cubo é igual a 12 cm², então o volume desse cubo, em cm³, é de:
   a) $12\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $36\sqrt{2}$ d) 1728

6. A soma das arestas de um cubo é igual a 132 cm. Então o volume desse cubo é igual a:
   a) 11 cm^3 b) 121 cm^3 c) 484 cm^3 d) 1331 cm^3 e) 1728 cm^3

7. Certo cubo possui volume igual a 13824 cm, então a soma do comprimento das arestas desse cubo é igual a:
   a) 144cm b) 288cm c) 192cm d) 216cm e) 264cm

8. No cubo a seguir foi traçada a medida da diagonal da sua face:
   O volume do cubo em cm^3 é igual a:
   a) $2\sqrt{2}$ b) $16\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{8}$



9. .Dois cubos, A e B, foram construídos de tal forma que a aresta do cubo B é o dobro da medida da aresta do cubo A. Quando comparamos o volume do cubo B com o volume do cubo A, podemos afirmar que:
   a) o volume do cubo B é 2 vezes maior que o volume do cubo A.
   b) o volume do cubo B é 4 vezes maior que o volume do cubo A.
   c) o volume do cubo B é 6 vezes maior que o volume do cubo A.
   d) o volume do cubo B é 8 vezes maior que o volume do cubo A.
   e) o volume do cubo B é 10 vezes maior que o volume do cubo A.

Faca o seu resumo no caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área total da superfície que cobre o hexaedro e a calcular o seu volume. Aprendeu que para calcular a área total do cubo é necessário adicionar a áreas das bases e a área das faces laterais e que o volume deste poliedro de Platão é dado pelo cubo da sua aresta.

Confronte as suas respostas com as da Chave de Correcção, a seguir.

Chave de Correcção

1. 150 cm^2
2. 343 cm^3
3. a)3,4 m^3
   b)11,3m^2
4. 421,9 cm^3
5. b)
6. d)
7. b)
8. b)
9. d)

Venda proibida

LIÇÃO Nº 22: Área e volume do paralelepípedo

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido a calcular a área e o volume do cubo, chegou a vez de calcular também a área e o volume do paralelepípedo.

Como já deve ter visto nem todas as caixas, por exemplo, tem o formato de um cubo. Algumas caixas, embora parecidas com o cubo, têm faces que são maiores que as outras faces por isso aprender a calcular área e volume destes outros representantes de sólidos geométricos é de extrema importância como vai perceber nesta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

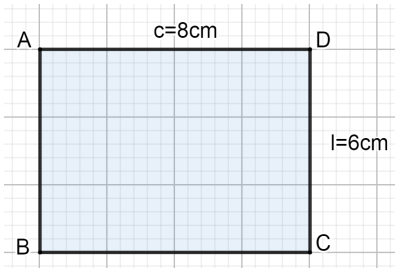
- Calcular área do paralelepípedo;
- Calcular volume do paralelepípedo.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Caro aluno, nesta lição vamos dedicar a nossa atenção ao paralelepípedo. Como bem sabe o paralelepípedo é um solido geométrico da família dos poliedros cuja base é um paralelogramo. A pesar de termos mencionado o paralelogramo, não vamos proceder como nos casos anteriores em que revimos o cálculo da área da superfície delimitada pelo polígono mencionado, mas vamos nos aproximar a isso ao dedicar algum tempo para recordar o cálculo da área do quadrado e do rectângulo.

Exemplo: Calcule a área do rectângulo sabendo que a medida do seu lado é de $6cm$ e do seu comprimento $8cm$.

Resolução:



Dados

$l = 6\text{cm}$

$\text{c} = 8\text{cm}$

$\text{A}_{\square} = c \times l$

$\text{A}_{\square} = 8\text{cm} \times 6\text{cm} = 48\text{cm}^2$

Venda proibida

Exemplo: Calcule a área do quadrado sabendo que a medida do comprimento seu lado é de $6cm$.

Resolução:

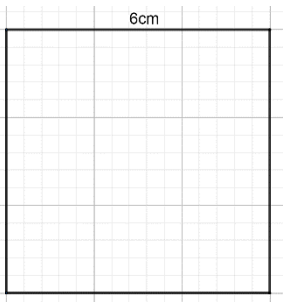
Dados

$l = 6\text{cm}$

$\text{A}_{\square} = l \times l$

$\text{A}_{\square} = 6\text{cm} \times 6\text{cm}$

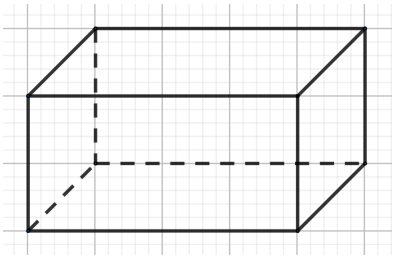
$= 36\text{cm}^2$



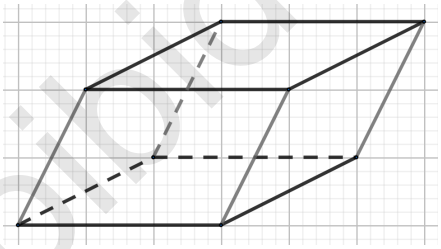
Consideramos que este exercício é suficiente para rever a área da superfície delimitada por estes dois polígonos que chamamos quadrado e rectângulo, agora voltemos ao paralelepípedo.

Tipos de paralelepípedos

Os paralelepípedos podem ser rectos ou oblíquos



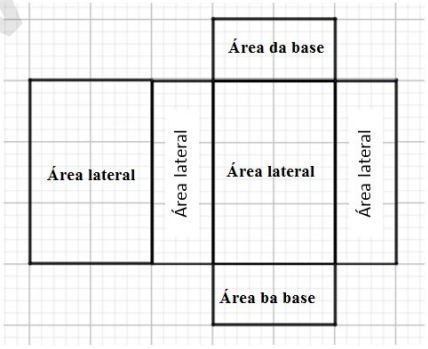
Recto- Este paralelepípedo tem como faces laterais, superfícies delimitadas por rectângulos propriamente ditos



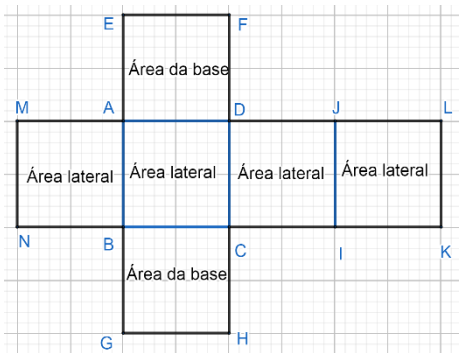
Oblíquo -Este paralelepípedo tem como faces laterais, superfícies delimitadas por paralelogramos propriamente

O paralelepípedo que nos interessa estudar é o recto. Ele também tem seis faces como o cubo, mas com uma diferença, nem todas as faces são geometricamente iguais como indica a figura que ilustra os dois sólidos a seguir, depois da sua planificação.

Paralelepípedo



Cubo



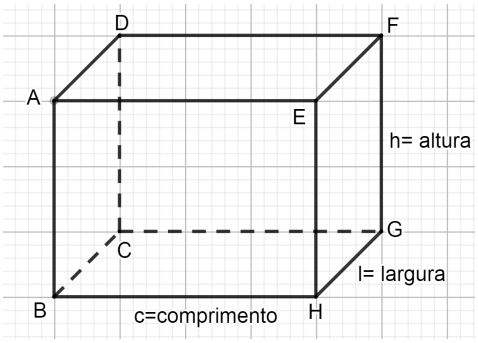
Por isso para calcular a área deste sólido é preciso ter em conta que tem faces iguais duas a duas dentre as quais duas são bases.

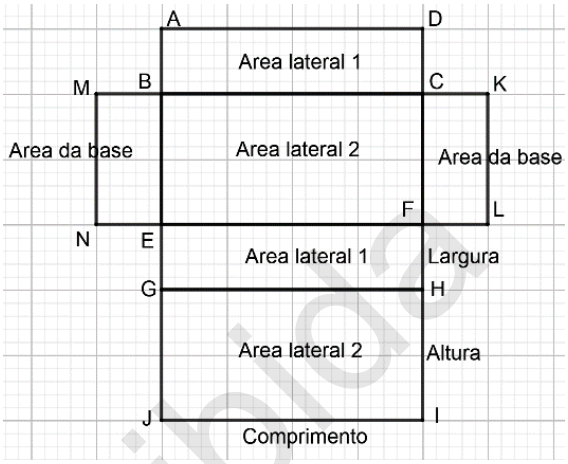
Venda proibida

Área total do paralelepípedo

Um paralelepípedo é um prisma composto por 6 faces. Ademais, analisando esse sólido, é possível perceber que as faces opostas são congruentes. Assim, para calcular a área de cada uma das faces, basta multiplicar as duas dimensões da face.

A área total do paralelepípedo será dada pela soma resultante da adição das áreas das bases e as áreas laterais.





$$A_T = 2A_b + S_l$$

$$S_l = 2 \times A_{L1} + 2 \times A_{L2}$$

$$A_T = 2 \times A_{L1} + 2 \times A_{L2} + 2 \times A_B$$

$$A_T = 2 \times (A_{L1} + A_{L2} + A_{B)}$$

$$A_T = 2 \times (c \times l + c \times h + l \times h)$$

Onde A_T é área total

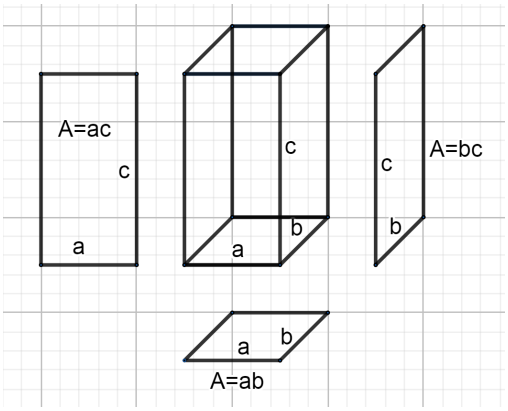
A_{L1} é área lateral

A_{L2} é área lateral

A_B é área da base

Mas você pode estar a dizer "eu já vi" em algum livro uma outra fórmula para a área total deste prisma especial e não é esta. Pronto! Vamos a isso. Vamos descobrir a diferença.

Como pode ver ao lado, se considerarmos que as três medidas do paralelepípedo são a, b, c teremos duas faces que são bases cuja área é ab, duas faces laterais cuja área é bc e por último duas faces também laterais cuja área é ac. Por isso a área total é muitas vezes apresentada em muitos livros como $A = 2ab + 2ac + 2bc$



ou

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

Exemplo: Calcule a área total da superfície do paralelepípedo sabendo que a medida da amplitude da sua altura é de

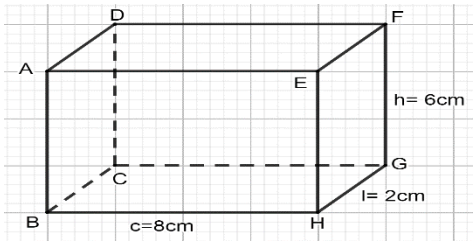
Resolução:

Dados

$c = 8\text{cm}$

$h = 6\text{cm}$

$l = 2\text{cm}$

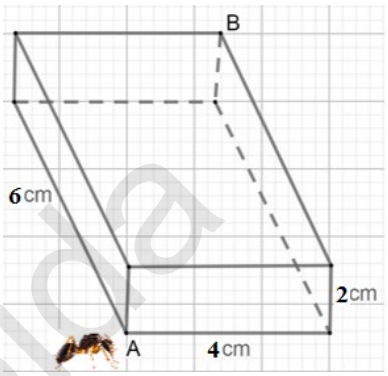


Venda proibida

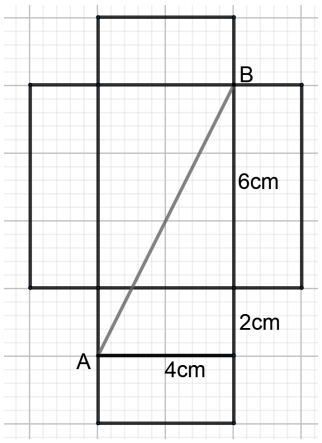
$6cm$ do seu comprimento 8cm e da lua largura 2cm.	$A_T = 2 \times (c \times l + c \times h + l \times h)$ $A_T = 2 \times (8 \times 2 + 8 \times 6 + 2 \times 6) = 152cm^2$ **Resposta:** A área total do paralelepípedo é de $152cm^2$.

Actividade

Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice A do paralelepípedo recto ilustrado ao lado. Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice B (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo) ?



Resolução:



A menor distância entre A e B é quando traçamos um segmento no plano, ou seja, planificando a caixa. Pois aí teremos o um triângulo rectângulo, em que o percurso da formiga é a diagonal, e podemos aplicar o Teorema de Pitágoras da seguinte forma:

$$|AB|^2 = (4cm)^2 + [(2+6)cm]^2$$

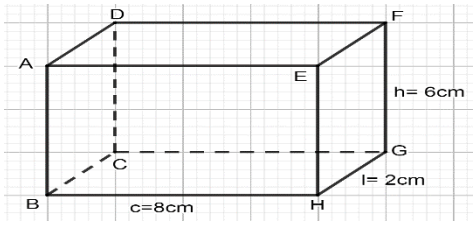
$$|AB|^2 = 16cm^2 + 64cm^2 = 80cm^2$$

$$|AB| = \sqrt{80}cm = 4\sqrt{5}cm$$

E como é o seu volume? O volume do paralelepípedo á semelhança de outros prismas é igual ao produto da sua área da base pela sua altura.

$V_{paralelepipedo} = A_{base} \times h$, como a base é um retângulo e a área do retângulo é igual ao $c \times l$ teremos: $V = c \times l \times h$

Exemplo: Calcule o volume de um paralelepípedo sabendo que a medida da amplitude da sua altura é de $6cm$ do seu comprimento 8cm e da lua largura 2cm	**Resolução:** **Dados** c = 8cm h = 6cm l = 2cm $V = c \times l \times h$ $V = 8 \times 2 \times 6 = 96cm^3$ **Resposta:** O volume do paralelepípedo é de $96cm^3$.



O paralelepípedo é o segundo caso particular de prisma. Por isso podemos também definir o paralelepípedo como um prisma cuja base é um paralelogramo.

Venda proibida

Agora é hora de exercitação. Vamos a isso.

Exercícios

1. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo sabendo que a medida da sua altura é de $7cm$, do seu comprimento 10cm e da sua largura 3cm.

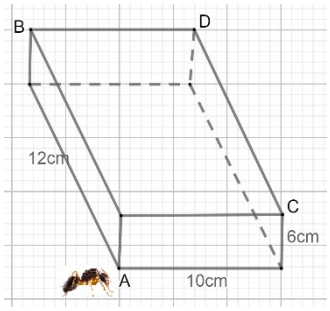
2. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo sabendo que a medida da sua altura é de $9cm$, a do seu comprimento 12cm e a da sua largura 5cm.

3. Calcule o volume de um paralelepípedo sabendo que a medida altura é de $10cm$, do seu comprimento 12cm e da sua largura 5cm.

4. Uma caixa de papelão será fabricada por uma indústria com as seguintes medidas: 40 cm de comprimento, 20 cm de largura e 15 cm de altura.
   a) Qual deve ser a área da superfície dessa caixa?
   b) Qual deve ser o volume dessa caixa?

5. Qual o volume de concreto utilizado na construção de uma laje de 80 centímetros de espessura numa sala com medidas iguais a 4 metros de largura e 6 metros de comprimento?

6. Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice A do paralelepípedo recto ilustrado ao lado. Qual a menor distância que ela precisa de percorrer (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo) para chegar:
   a) Ao vértice B?
   b) Ao vértice C?
   c) Ao vértice D?



Anote este resumo no seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área total da superfície que cobre o paralelepípedo e a calcular o seu volume. Aprendeu que para calcular a área total deste solido geométrico é necessário adicionar

Venda proibida

a áreas das suas duas bases e a área das faces laterais, e que o seu volume é calculado multiplicando as três dimensões do solido (comprimento, largura e a altura).

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. 242 cm^2
2. 426 cm^2
3. 600 cm^3
4. a) 3400 cm^2
   b) 12000 cm^3
5. 19,2m^3
6. a)13,4 cm^2
   b)11,6 cm^2
   c)20,6 cm^2

Venda proibida

LIÇÃO Nº 23: Área e volume de prismas

Introdução

Caro Aluno, depois de ter aprendido a calcular a área total e o volume do cubo, chegou a vez de aprofundar os seus conhecimentos, aprendendo a calcular a área e o volume do prisma. Este conhecimento é extremamente importante, pois no dia-a-dia nos deparamos com objectos e ou construções que tem o formato de um prisma.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular áreas de prismas;
- Calcular volumes de prismas.

Para a melhor compreensão desta lição necessitas de estudar 90 minutos.

Caro aluno, nesta lição vamos dedicar a nossa atenção ao prisma. Como bem sabe o prisma é um solido geométrico da família dos poliedros que tem duas bases paralelas e geometricamente iguais e cujas faces laterais são paralelogramos.

O prisma tem duas bases paralelas e geometricamente iguais e faces com o formato de um paralelogramo. Eles podem ser rectos ou oblíquos.

Exemplo:

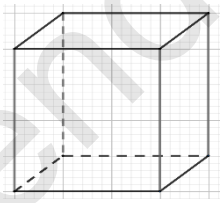


Fig. 10 – Prisma recto

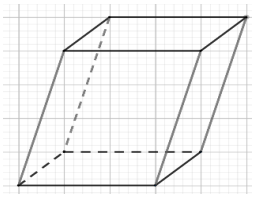


Fig. 11 – Prisma oblíquo

O número de lados da base determina o nome do prisma:

Exemplo:

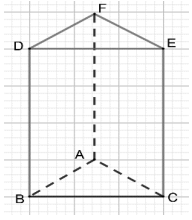


Fig. 11 – Prisma triangular

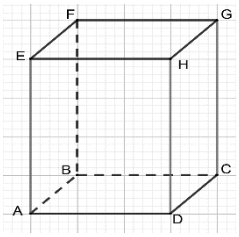


Fig. 12 – Prisma rectangular

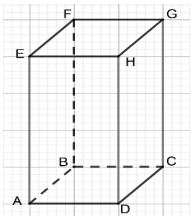


Fig. 13 – Prisma quadrangular

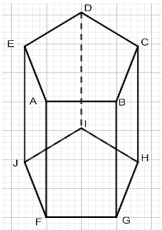


Fig. 14 – Prisma pentagonal

Venda proibida

Área total de um prisma

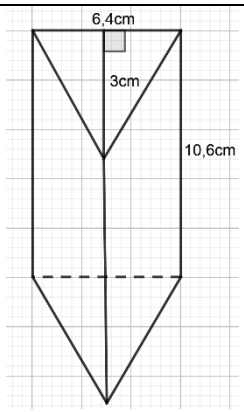
Para calcular a área total de um prisma é preciso ter em conta que qualquer prisma tem duas bases, e o formato da base determina o número das faces laterais, pois a área é dada pela soma da área de todas as faces e bases do prisma.

Os prismas podem ser regulares ou irregulares. Se o prisma for regular tem todas as faces laterais iguais.

Seja A_b a área da base de um prisma regular. Sabemos que ele possui duas bases iguais, e as áreas laterais iguais, e sempre paralelogramos. Então, seja $S_l = A_{l1} + A_{l2} \ldots A_{ln} = nA_{li}$ a soma das áreas laterais. A área total de um prisma qualquer é calculada por $A_T = 2A_b + S_l = 2A_b + nA_{li}$, onde ***n*** é o número de lados da base.

Exemplo:

Um estojo tem a forma de um prisma regular recto triangular. Determine a área total da superfície do estojo, considerando as dimensões na figura



Dados:

$l = b_\Delta = 6{,}4cm$

$h_\Delta = 3cm$

$c = 10{,}6cm$

$A_p = ?$

$V_p = A_b \times h$

Resposta: A área do estojo é de $222{,}72cm^2$.

Resolução:

$A_T = 2A_b + S_l$ mas a base é triangular, por isso temos que:

$A_b = \frac{b \times h}{2} = \frac{6{,}4 \times 3}{2} = 9{,}6cm^2$

A face é rectangular e por isso $A = c.l$

Então $A_T = 2A_b + S_l = 2A_b + 3.c.l$

$A_T = 2 \times 9{,}6cm^2 + 3 \times 6{,}4 \times 10{,}6cm^2$

$A_T = (19{,}2 + 203.52)cm^2 = 222{,}72cm^2$

Volume do prisma

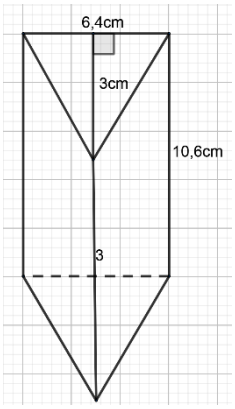
O volume de um prisma é o produto da medida da sua área da base pela altura.

$V_{prisma} = A_{base} \times h$ ou simplesmente $V_p = A_b \times h$

Exemplo:

Um estojo tem a forma de um prisma recto triangular. Determine o seu volume, considerando as dimensões na figura

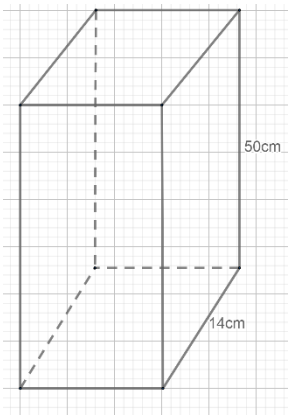
Venda proibida

Dados:	**Resolução**:
 $b_\Delta = 6{,}4cm$ $h_\Delta = 3cm$ $h_p = 10{,}6cm$ $V_p = ?$ $V_p = A_b \times h$ **Resposta:** O volume do prisma é de $101{,}76cm^3$.	$V_p = A_b \times h_p$ mas a base é triangular e por isso temos que: $A_b = \frac{b \times h}{2} = \frac{6{,}4 \times 3}{2} = 9{,}6cm^2$ Substituindo na fórmula do volume teremos: $V_p = 9{,}6cm^2 \times 10{,}6cm = 101{,}76cm^3$

Chegou a hora de exercitação. Vamos a isso.

Exercícios

1. Qual é a área do prisma da imagem a seguir, sabendo que ele é um prisma recto e sua base é quadrada?



a) $3192cm^2$ b)$3291cm^2$ c)$3912cm^2$ d)$3921cm^2$

2. Qual é o volume do prisma da imagem a seguir, sabendo que ele é um prisma recto e sua base é quadrada?

a) $280cm^3$ b)$700cm^3$ c)$980cm^3$ d)$9800cm^3$

3. Qual o volume de um prisma recto de base hexagonal, sabendo que a base é um polígono regular cujo lado mede 4 centímetros e cujo apótema mede aproximadamente 2,74 centímetros, e que a altura desse prisma é de 24 centímetros.

a) $78{,}12cm^3$ b)$89{,}12cm^3$ c)$789{,}12cm^3$ d)$789{,}21cm^3$

4. O volume de uma piscina em forma de prisma de base quadrada é 5025 metros cúbicos. Sabendo que a altura dessa piscina é de 5 metros, qual é a medida da aresta da sua base em metros?

a) $7{,}7m$ b)$17{,}7m$ c)$27{,}7m$ d)$37{,}7m$

5. Uma caixa de papelão será fabricada por uma indústria com as seguintes medidas: 60 cm de comprimento, 20 cm de largura e 15 cm de altura. Essa caixa irá armazenar chocolates na forma de um prisma com as dimensões medindo 8 cm de comprimento, 4 cm de largura e 3

Venda proibida

cm de altura. Qual o número de doces necessários para o preenchimento total da caixa fabricada?

6. Um prisma de base quadrangular possui volume igual a 192 cm³. Determine sua altura sabendo que ela corresponde ao triplo da medida da aresta da base.

Passe este resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área total de um prisma e o seu volume. Consolidou o seu conhecimento sobre o paralelepípedo, um prisma especial que tem duas faces paralelas geometricamente iguais e as restantes faces têm a forma de paralelogramo.
No que diz respeito ao cálculo da área do prisma você aprendeu que basta calcular as áreas das faces incluindo as bases pois a área total é dada pela soma de todas essas áreas. Aprendeu que o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura do prisma.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a)
2. d)
3. c)
4. d)
5. 125
6. 12

Venda proibida

LIÇÃO Nº 24: Área e volume do cilindro

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai, primeiro, rever o conceito de círculo e o cálculo da sua área, como forma de preparação para melhor aprender o cálculo da área e do volume do cilindro.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

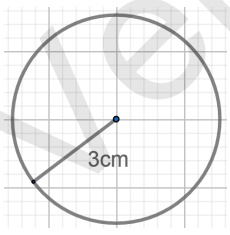
- Calcular áreas de cilindro;
- Calcular volumes de cilindro;

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos.

Caro aluno, muitas formas reais encontradas em objectos do dia-a-dia, tais como refrescos, garrafas, entre outros, lembram sólidos geométricos, os quais são figuras tridimensionais idealizadas pela Geometria. Muita coisa neste sólido lembra a circunferência e o círculo não e verdade? Claro que sim. Por isso antes de mais nada vamos rever o perímetro da circunferência e a área do círculo.

Exemplo:

Considere a figura a seguir e calcule o perímetro da circunferência e a área do respectivo círculo.



Observando a figura temos que $r = 3cm$ como dado.

Resolução:

Perímetro

Como deve lembrar-se o perímetro é o comprimento da circunferência e é dado pela fórmula $P = 2\pi r$

Então teremos:

$P = 2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 3cm$

$P = 18{,}84cm$

Resolução:

Área

Também deve se lembrar que a área do círculo é a medida da superfície delimitada pela circunferência e é dada pela fórmula $A = \pi r^2$ logo:

$A = 3{,}14 \times 3^2 = 28{,}26cm^2$

Muito bem! Agora podemos voltar ao nosso conceito.

Venda proibida

Conceito de cilindro

O conceito de cilindro é muito importante. Nas cozinhas encontramos muitas aplicações do uso de cilindros. Nas construções, observamos caixas para água, ferramentas, objectos, vasos de plantas, todos eles com formas cilíndricas.

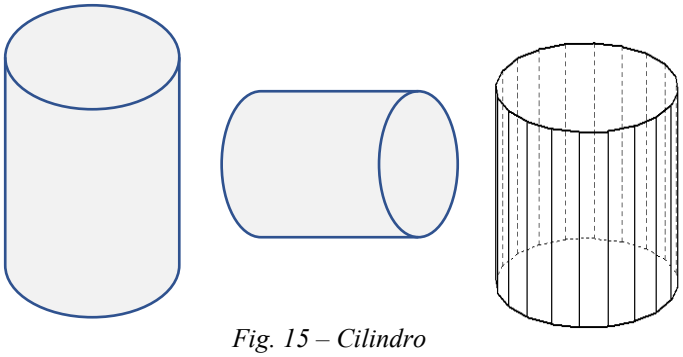
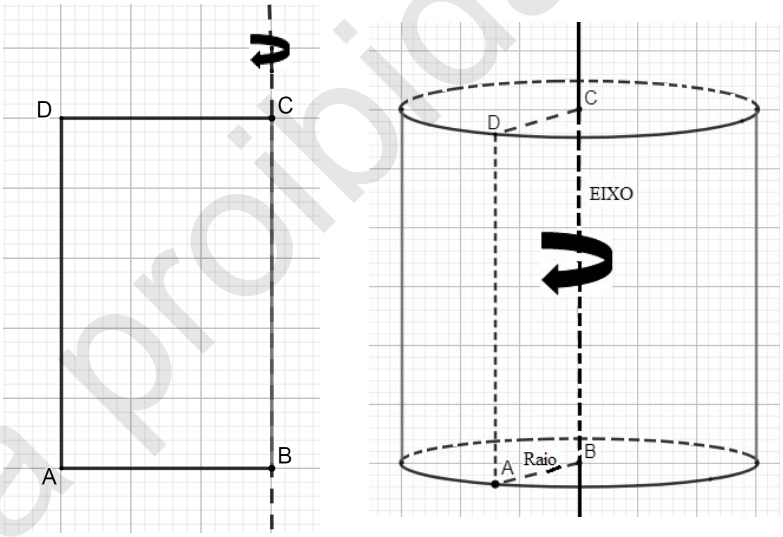


Fig. 15 – Cilindro

O cilindro é um solido de revolução. Mas o que é isso de solido de revolução? De certeza deve esta a questionar. Vamos responder a esta questão.

O sólido de revolução é um corpo geométrico que pode ser formado girando uma superfície plana em torno de uma linha chamada eixo. Veja ao lado como podemos ter o cilindro procedendo conforme o que foi dito. Se girarmos o rectângulo ABCD em torno do eixo BC temos por revolução o cilindro.



Elementos do cilindro

Num cilindro, podemos identificar vários elementos:

Base: É a região plana contendo a curva directriz e todo o seu interior. Em um cilindro existem duas bases.

Eixo: É o segmento de recta que liga os centros das bases do cilindro.

Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do cilindro.

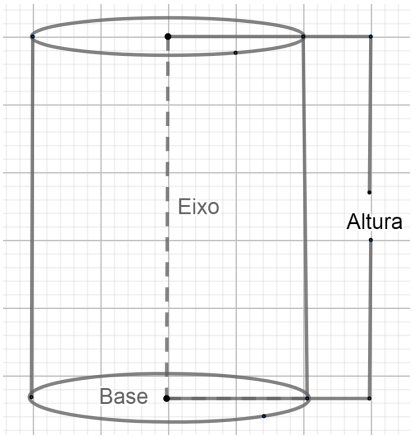
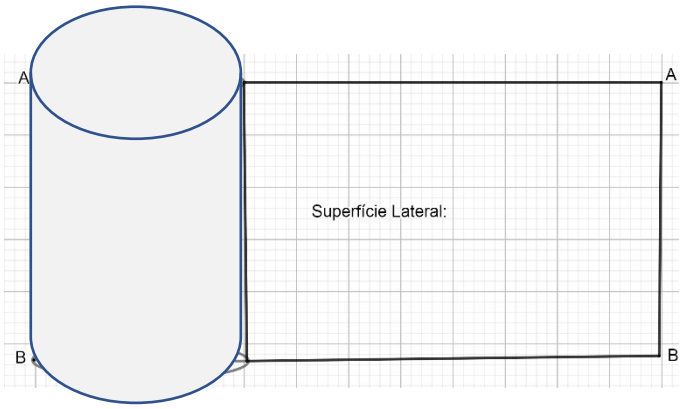


Fig. 16 – Elementos do cilindro

Superfície Lateral: É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estão nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva directriz.

Venda proibida



Superfície Total: É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.

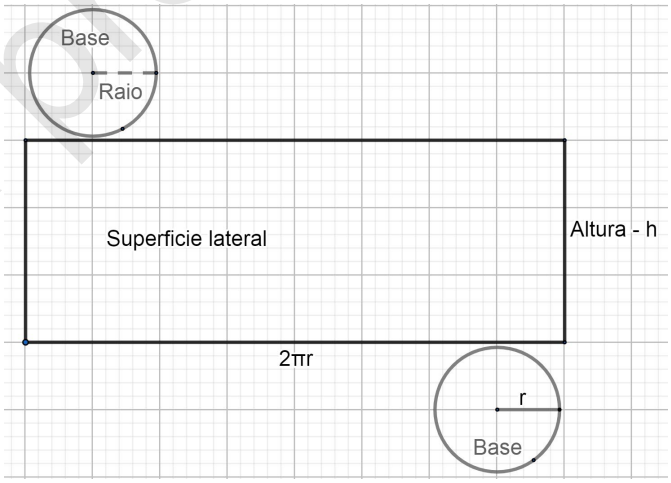
Área do cilindro

A área do cilindro, como todo o solido geométrico é dada pela soma da área das bases e a área lateral. As bases do cilindro são em formato de círculo por isso para calcular a sua área teremos que saber antes de mais nada a medida do seu raio.

Planificação do cilindro

A área lateral que é a medida da superfície que envolve o cilindro. Esta superfície tem o formato, depois da planificação, de um rectângulo, por isso é dada por: $\boldsymbol{A = 2\pi rh}$ onde $\boldsymbol{2\pi r}$ é o comprimento e $\boldsymbol{h}$ a largura mas que é ao mesmo tempo a altura do cilindro.

Logo $\boldsymbol{A_l = 2\pi rh}$



Sabendo que a base do cilindro é circular teremos a sua área dada pela fórmula da área do círculo. Mas o cilindro tem duas bases logo $\boldsymbol{A_{Tb} = 2\pi r^2}$.

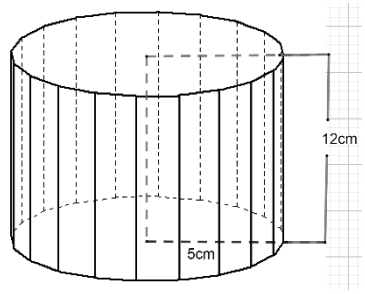
Logo a área total do cilindro será:

$$\boldsymbol{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)}$$

Exemplo:

Calcule a área total de um cilindro cujo raio da base mede $5cm$ e cuja altura mede $12cm$.

Venda proibida



Dados:

$r = 5cm$

$h = 12cm$

Pedido

$A_T = ?$

Sabe-se que:

$\boldsymbol{A_T = 2\pi r(h + r)}$

Resolução:

$\boldsymbol{A_T = 2\pi r(h + r)}$

$\boldsymbol{A_T = 2.3,14.5(12 + 5)cm^2}$

$\boldsymbol{A_T = 2.3,14.5.17cm^2}$

$\boldsymbol{A_T = 533,8cm^2}$

Resposta: A área total do cilindro é $\boldsymbol{533,8cm^2}$

Volume do cilindro

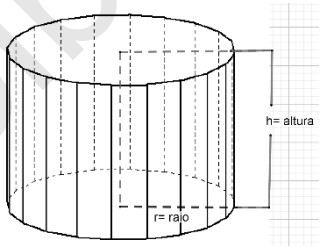
O volume do cilindro calcula-se de forma semelhante a utilizada no cálculo do volume do prisma recto. O volume de um cilindro é o produto da medida da área da base pela medida da altura do cilindro.

$$V_{cilindro} = A_{base} \times Altura$$

Mas já sabe que $A_b = \pi r^2$

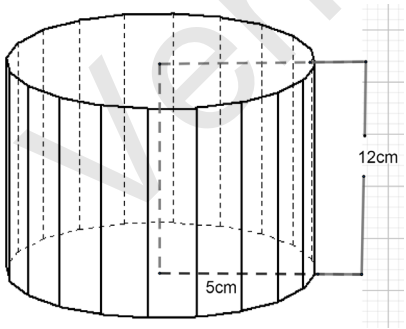
Logo

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$



Exemplo:

Calcule o volume de um cilindro cujo raio da base mede $5cm$ e cuja altura mede $12cm$.



Dados:

$r = 5cm$

$h = 12cm$

Pedido

$V_c = ?$

Sabe-se que:

$V_c = \pi r^2 h$

Resolução:

$V_c = \pi r^2 h$

$V_c = 3,14 \times 5^2 12cm^3$

$V_c = 3,14.25.12 = 942cm^3$

Resposta: O volume do cilindro é $942cm^3$.

Resolva no seu caderno os seguintes exercícios.

Exercícios

1. Determine a área total de um cilindro com $4cm$ de raio e $5cm$ de altura.

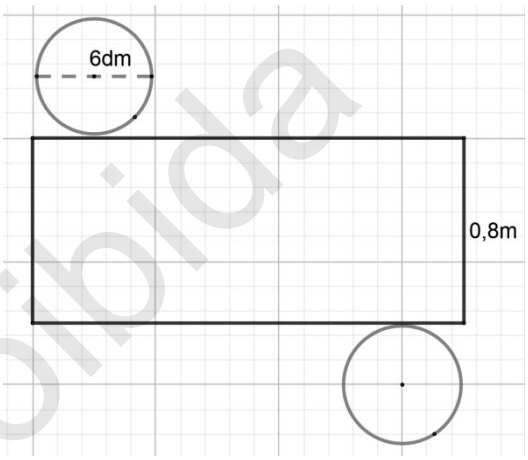
Venda proibida

2. Calcule a área e o volume de um cilindro cujo raio da base mede $2{,}4cm$ e cuja altura mede $6{,}4cm$.

3. Qual dos dois cilindros, A e B, tem maior volume?

Cilindro A	Cilindro B
Raio da base mede $8cm$	Raio da base mede $12cm$
Altura $12cm$	Altura $8cm$

4. O Senhor Lourenço mandou fazer latas de forma cilíndrica para conservar mapira. Ao lado encontra-se a planificação de um deles.



   a) Qual é a área da chapa que foi necessária para fazer cada lata?
   b) Qual é o volume de cada lata?

5. A Joana bebe dois copos de leite por dia. Se cada copo tiver $15cm$ de altura e $3cm$ de raio, quantos litros de leite bebe, aproximadamente, a Joana numa semana?

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área total de um cilindro e o seu volume. Para facilitar os cálculos reviu as fórmulas de cálculo do perímetro da circunferência e do cálculo da área do círculo. No que diz respeito ao cálculo da área do cilindro você aprendeu que basta calcular as áreas das bases que são circulares e adicioná-las à área da superfície lateral do cilindro que tem a forma de um rectângulo de pois da planificação. Aprendeu que o volume do cilindro, tal como de outros sólidos geométricos, é dado pelo produto da área da base pela altura do cilindro.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. $226{,}1cm^2$
2. $A_T = 132{,}6cm^2$; $V = 115{,}8cm^3$
3. B
4. a) $207{,}24dm^2$
4. b) $226{,}08dm^3$
5. $\approx 6l$

LIÇÃO Nº 25: Área e volume de pirâmide

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido a calcular a área total e o volume do prisma, chegou a vez de aprofundar mais os seus conhecimentos, aprendendo a calcular a área e o volume de mais um solido geométrico, a pirâmide. Este conhecimento é extremamente importante pois no dia-a-dia nos deparamos com objectos e ou construções que tem o formato de uma pirâmide.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular áreas de pirâmides;
- Calcular volumes de pirâmides.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos.

Caro Aluno. Nesta lição vamos dedicar a nossa atenção a pirâmide. Como bem sabe, a pirâmide é um poliedro em que uma das faces, a base, é um polígono que pode ter três ou mais lados, e as restantes faces laterais são triângulos que têm um vértice comum.

Exemplo:

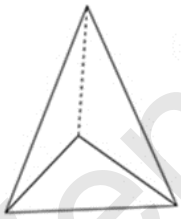


Fig. 17 – Pirâmide triangular

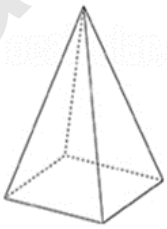


Fig. 18 – Pirâmide quadrangular

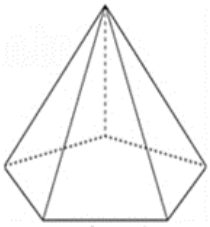


Fig. 19 – Pirâmide pentagonal

Como pode ver, a pirâmide tem muito a ver com o triângulo pois as suas faces são triangulares. Por isso, antes de avançarmos para aprender a calcular a área e volume de pirâmides, vamos dedicar um tempo para recordar o cálculo da área da superfície triangular.

Exemplo: Calcule a área do triângulo sabendo que a medida da sua base é de $6cm$ e a sua altura é de $4cm$.

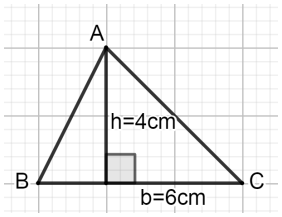
Resolução:

Dados

$b = 6\text{cm}$

$h = 4\text{cm}$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$



Venda proibida

$$\left| A_{\Delta} = \frac{6 \times 4}{2} = 12cm^2 \right.$$

Consideramos que um exercício é suficiente para você recordar-se. Vamos prosseguir.

Elementos da pirâmide

Toda pirâmide regular possui, além de elementos clássicos como faces, arestas e vértices, os seguintes elementos:

Vértice da pirâmide: Ponto "V" destacado na imagem anterior;

Apótema: Representado por "m", é o segmento de reta que liga o vértice da pirâmide ao ponto médio de qualquer aresta pertencente à sua base;

Apótema da base: A projecção ortogonal (h) do vértice da pirâmide na sua base é chamada de Centro da base. O segmento "c" de reta que liga esse centro ao ponto médio de qualquer aresta da base é chamado de apótema da base.

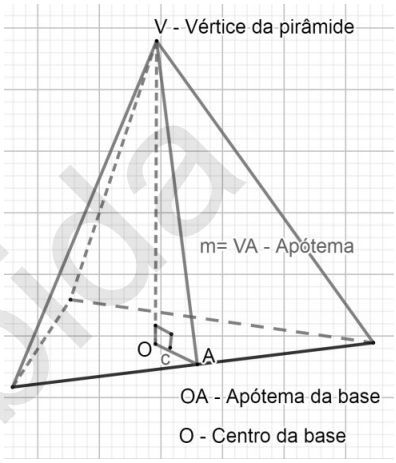


Fig. 20 – Elementos da pirâmide

Área total de uma pirâmide

Para calcular a área total de uma pirâmide é preciso ter em conta que a pirâmide tem uma base que é um polígono qualquer e as faces são triangulares. Uma outra coisa importante a reter a partir da base é que o número de lados da base define o número de faces triangulares que a pirâmide tem. Se já tivermos essa informação, o que pode restar é saber que a área é dada pela soma da área de todas as faces incluindo a base.

Seja A_b a área da base de uma pirâmide. Sabemos que ela possui uma base e as áreas laterais, que são sempre triangulares, se $A_l = A_{l1} + A_{l2} \ldots A_{ln}$ é a soma das áreas laterais. A área total de um prisma qualquer é calculada por $A_T = A_b + A_l$.

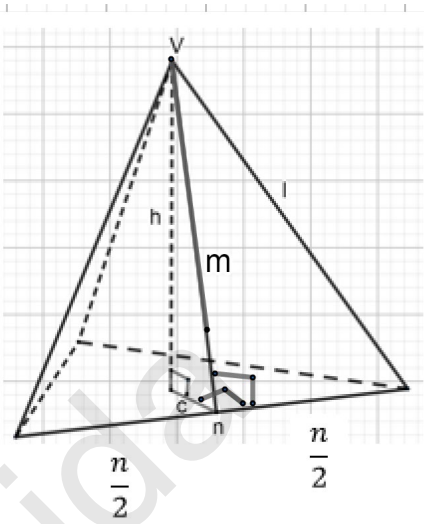
Área da base

O cálculo da área da base da pirâmide depende do polígono que a compõe. Se esse polígono for um triângulo ou um paralelogramo, o cálculo da área será fácil. Entretanto, caso se trate de uma figura com uma quantidade de lados maior, é bom tentar decompor esse polígono em outros cujo cálculo da área apresente fórmula conhecida.

Venda proibida

Área da face

As faces laterais de uma pirâmide sempre serão triângulos cuja altura é o apótema da pirâmide e a base é a aresta da base da pirâmide relativa à face observada. Desse modo, conforme a imagem abaixo, a fórmula da área lateral de uma face da pirâmide é:



$$A = \frac{m \times n}{2}$$

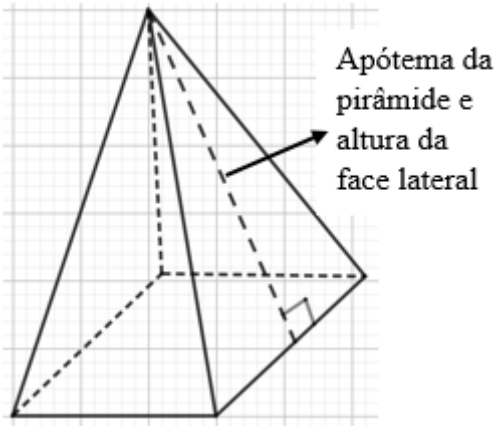
Onde $\boldsymbol{m}$ é apótema e $\boldsymbol{n}$ a aresta correspondente.

Entretanto, só é possível calcular essa área se os valores do apótema e da aresta da base da pirâmide forem explicitados no problema. Caso falte a medida do apótema, será necessário calculá-la. Uma das maneiras que podem ser usadas é recorrer ao Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Onde $\boldsymbol{m}$ é apótema e $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}$ é a metade da aresta como ilustra a figura.

Por fim para calcular a área lateral total, basta adicionar as áreas das faces da pirâmide. Se a pirâmide for regular, as faces terão a mesma área e a seguinte fórmula poderá ser usada.

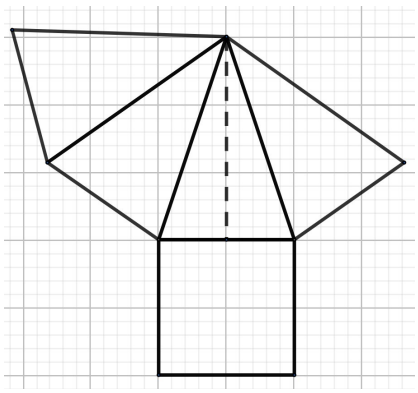


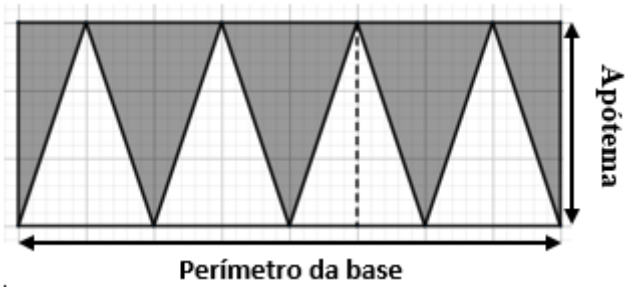
$$A = k\frac{m \times n}{2}$$

Onde k será o número de lados do polígono que faz a base da pirâmide.

Mas podemos simplificar tudo isto se a pirâmide for regular. Tomemos como exemplo a pirâmide quadrangular.

Com a planificação esta pirâmide fica assim:





Venda proibida

$A_T = A_b + A_l$ mas já sabe que $A_l = 4 \times A_{face}$, porque esta pirâmide é regular e tem como base um polígono regular denominado quadrado. Se tivesse k lados seria $A_l = k \times A_{face}$

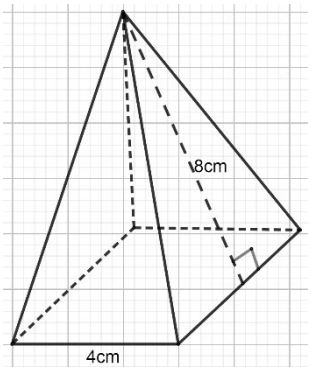
Observando a planificação pode-se dizer que a área lateral é a metade da área do rectângulo cujo comprimento é o perímetro da base e cuja largura é a medida do apótema da pirâmide.

Então, a área total de uma pirâmide regular é dada por:

$$A_T = A_b + k \times A_{face}$$

$$A_T = A_b + \frac{Perimetro\ da\ base \times A\text{pótema da pirâmide}}{2}$$

Exemplo: Calcule a área total da superfície da pirâmide quadrangular, com as medidas expressas na figura a baixo.



Resolução:

$\boldsymbol{A_b = l^2 = 4^2 = 16cm^2}$

$$\boldsymbol{A_l = \frac{Perimetro\ da\ base \times A\text{pótema da pirâmide}}{2}}$$

$$\boldsymbol{A_l = \frac{4 \times 4 \times 8}{2} = 64cm^2}$$

$$A_T = A_b + A_l = 16 + 64 = 80cm^2$$

Resposta: A área total da pirâmide é de $80cm^2$.

Volume da pirâmide

Se tivermos dois recipientes com mesma base e mesma altura, sendo que um deles é pirâmide e o outro paralelepípedo, pode-se chegar á conclusão de que para encher o recipiente no formato de paralelepípedo precisaria de três do outro no formato de pirâmide.

Por isso, pode se dizer que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um paralelepípedo com a mesma base e mesma altura.

$$V_{piramide} = \frac{A_b \times h}{3}$$

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} V_{paralelepipedo}$$

Exemplo: Calcule o volume da pirâmide quadrangular, com as medidas expressas na figura a baixo.

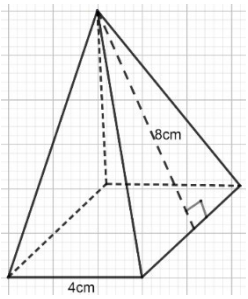
Resolução:

Dados

$h = 8cm$

$l = 4cm$

Venda proibida



$$V_{pi} = \frac{A_b \times h}{3}$$

$$V_{pi} = \frac{4 \times 4 \times 8}{3} = 42{,}7cm^3$$

Resposta: O volume da pirâmide é de $42{,}7cm^3$

Resolva a seguir os exercícios para consolidar a matéria.

Exercícios

1. Uma pirâmide possui base formada por um triângulo rectângulo que tem catetos medindo 6 centímetros e 8 centímetros e altura igual a 10 centímetros. Então, o volume dessa pirâmide, em cm³, é igual a:

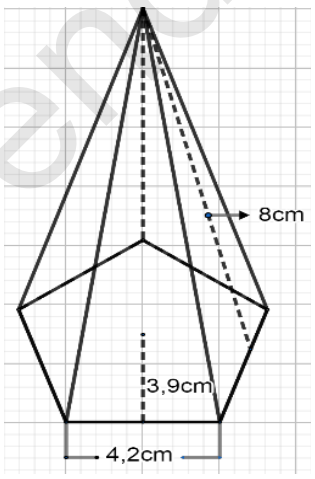
   a) $240cm^3$ b) $140cm^3$ c) $80cm^3$ d) $70cm^3$ e) $50cm^3$

2. Uma pirâmide recta possui base quadrada, com 6 metros de lado e altura igual a 4 metros. Sabendo disso, podemos afirmar que o comprimento da sua geratriz é igual a:

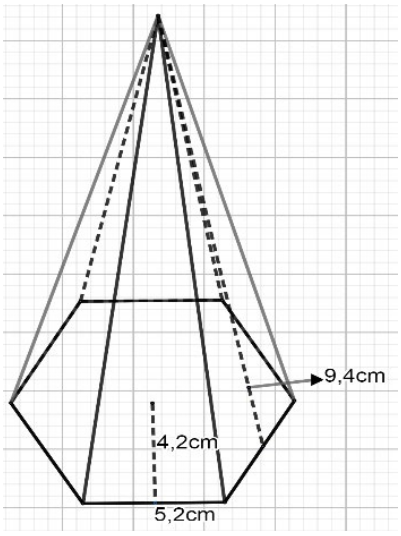
   a) $10cm$ b) $7cm$ c) $6cm$ d) $5cm$ e) $4m$

3. Calcule a área total das seguintes pirâmides:

   a)



   b)

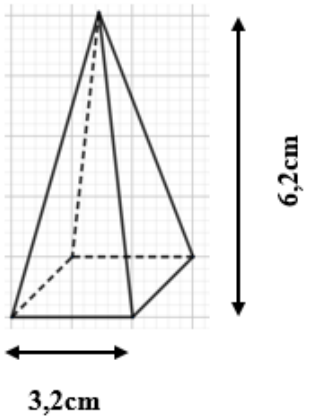


4. A pirâmide de Keops, no Egipto, tem 138m de altura e a base tem a forma de um quadrado com 227 de lado. Determina o volume da pirâmide.

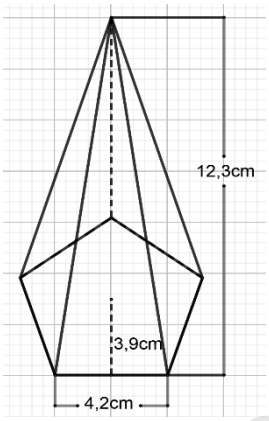
Venda proibida

5. Calcule o volume das seguintes pirâmides regulares:

a)



b)



Passe este resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área total e o volume de uma pirâmide. Consolidou o seu conhecimento no que diz respeito a estes cálculos, ao acrescentar mais um elemento na família dos sólidos, e ter chegado a conclusão de que também para a pirâmide precisamos adicionar a área da base a área lateral para obtermos a área total.

Aprendeu que diferentemente do prisma a pirâmide tem apenas uma base, que tem o formato de um polígono, e este polígono determina o número de faces que a pirâmide tem. Um outro dado importante que deve ser retido é que existem pirâmides regulares, aquelas cuja base é um polígono regular. Nessas pirâmides regulares as faces são todas iguais.

Por ultimo, aprendeu que o volume da pirâmide é dada pela terça parte do volume do paralelepípedo correspondente, ou seja aquele paralelepípedo que tem a base e altura igual a da pirâmide em causa.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a)$240cm^3$
2. $5cm^3$
3. a) $124{,}95cm^2$ b)$212{,}16cm^2$
4. $V = 2\ 370\ 334m^3$
5. a) $21{,}16cm^3$ b) $167{,}9cm^3$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 26: Área e volume do cone

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido a calcular a área e o volume dos sólidos geométricos da família dos poliedros, chegou agora a vez de aprender a calcular a área e o volume dos integrantes da outra família de sólidos, a dos não poliedros ou dos corpos redondos. O primeiro membro dessa família que irá aprender é o cone.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular áreas do cone;
- Calcular volumes do cone;

Para a melhor compreensão desta lição necessitas de estudar 60 minutos.

Caro Aluno. Nesta lição vamos dedicar a nossa atenção ao cone. Como bem sabe o cone é um solido geométrico da família dos não poliedros ou dos corpos redondos. São assim chamados porque eles são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana).

Exemplos:

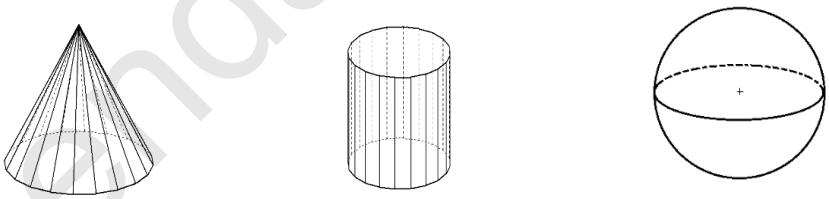


Fig. 21 – Corpos redondos

Como já foi dito nesta lição vamos nos concentrar no cone. E o cone tem alguma relação com o cilindro que já aprendeu a calcular a sua área e o seu volume. Vamos antes de prosseguir rever a área e o volume do cilindro.

Recordando.

A área do cilindro, como todo o sólido geométrico é dada pela soma da área das bases e a área lateral. As bases do cilindro são em formato de circunferência por isso para calcular a sua área é preciso ter a medida do raio da base e da altura do cilindro.

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

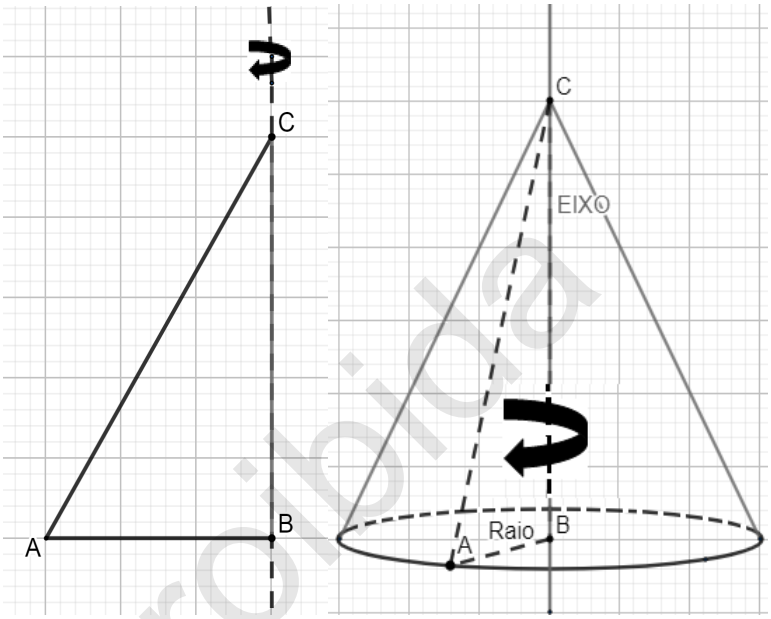
Venda proibida

Já o volume do cilindro calcula-se de forma semelhante a utilizada no cálculo do volume do prisma recto. O volume de um cilindro é o produto da medida da área da base pela medida da altura do cilindro.

$$V_c = \pi r^2 h$$

Já se recordou por isso podemos avançar. Comecemos por definir este sólido e caracterizá-lo.

Definição: Cone é um sólido geométrico classificado como corpo redondo e formado pelos segmentos de recta cujas extremidades são uma circunferência e um ponto fora do plano que a contém.



O Cone é também à semelhança do cilindro, um solido de revolução. Como foi dito na lição sobre o cilindro, sólido de revolução é um corpo geométrico que pode ser formado girando uma superfície plana em torno de uma linha chamada eixo. Veja ao lado como podemos ter o cone girando uma superfície triangular ABC em torno de um eixo BC.

Elementos do Cone

O cone é formado pelos seguintes elementos:

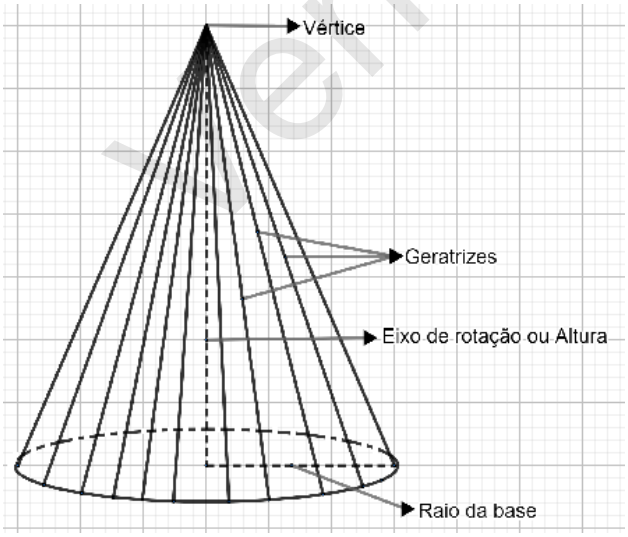


Fig. 22 – Elementos do cone

Raio da base: é o raio do círculo que forma a base;

Geratriz: são os segmentos de rectas em um ponto da circunferência até o vértice superior;

Vértice: o cone possui um vértice que fica oposto a base circular.

Eixo de rotação: é a recta que parte do centro da base até ao vértice superior; é também o tamanho da recta que define a altura do cone.

Venda proibida

Classificação

Os cones podem ser classificados em três categorias: cone recto, oblíquo e equilátero.

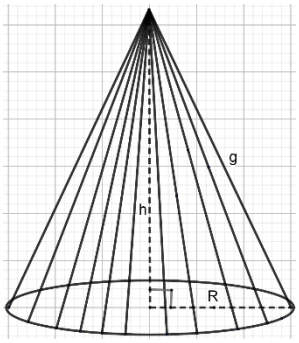


Fig. 23 – Cone recto

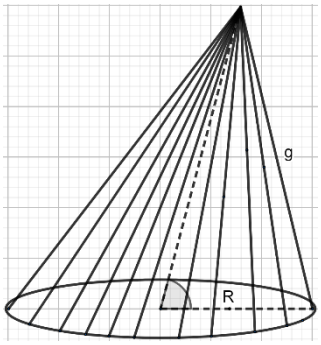


Fig. 24 – Cone oblíquo

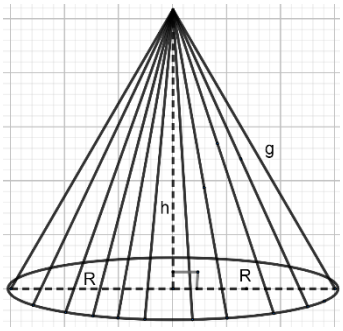


Fig. 25 – Cone equilátero

Área do cone

Vamos então aprender a calcular a área do cone. Para isso devemos primeiro calcular a área lateral e a área da base.

Área Lateral

A área lateral é formada pela geratriz sendo calculada pela seguinte fórmula:

$$A_l = \pi . r . g$$

Onde: r: é a medida do raio da circunferência da base;
g: é a medida da geratriz.

Área da Base

A área da base é equivalente à área da circunferência e é dada pela seguinte fórmula:

Onde: r: é o raio da circunferência.

$$A_b = \pi . r^2$$

Área Total

A área total é a soma da área da base e da área da lateral. Para calcular a área total, usamos a seguinte fórmula:

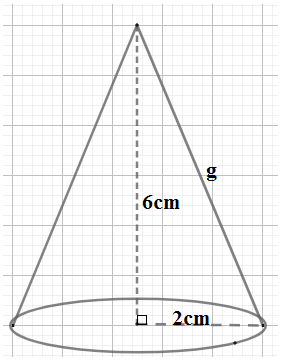
$$A_T = \pi . r . (g + r)$$

Onde: r: é a medida do raio da circunferência da base;
g: é a medida da geratriz.

Venda proibida

Exemplo:

Considere a figura a baixo. Calcule a área total .



Resolução:

Dados

$r = 2cm$

$h = 6cm$

Pedido

$A_T - ?$

Primeiro temos que calcular a geratriz com ajuda do teorema de Pitágoras

$h^2 + r^2 = g^2 \Leftrightarrow 6^2 + 2^2 = g^2$

$\Leftrightarrow 36 + 4 = g^2 \Longrightarrow g = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}cm$

$A_T = \pi . r . (g + r)$

$A_T = 3{,}14.2\left(2\sqrt{10} + 2\right)cm^2$

$A_T = 6{,}28.8{,}32 = 52{,}25cm^2$

Resposta: A área total é de aproximadamente $52{,}25cm^2$

Volume do cone

Se tivermos dois recipientes com mesma base e mesma altura, sendo que um deles é cone recto e o outro cilindro, pode-se chegar á conclusão de que para encher o recipiente no formato de cilindro seriam necessários três do outro no formato de cone.

Por isso, pode se dizer que o volume de um cone é a terça parte do volume de um cilindro com a mesma base e mesma altura.

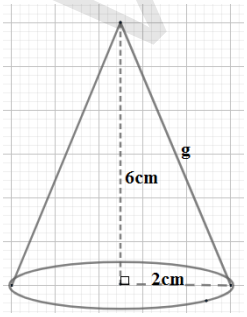
$$V = \frac{1}{3}.\pi . r^{2}.h$$

Onde: r: é a medida do raio;

h: é a medida da altura.

Exemplo:

Considere a figura a baixo. Calcule o volume .



Resolução:

Dados

$r = 2cm$

$h = 6cm$

Pedido

$V - ?$

$V = \frac{1}{3}.\pi . r^{2}.h$

$V = \frac{1}{3}.3{,}14 . 2^{2}.6cm^3$

$V = \frac{1}{3}.75{,}36 = 25{,}12cm^3$

Resposta: O volume do cone é de aproximadamente $25{,}12cm^3$

Resolva a seguir os exercícios propostos**.**

Venda proibida

Exercícios

1. Considere um cone com raio e altura igual a 3 cm e 5 cm, respectivamente. Determine a área lateral deste cone.

   a) a área lateral deste cone; b) a área da base; c) a área total; d) o volume.

2. Considere um cone com raio e altura igual a 3 cm e 8 cm, respectivamente. Determine:

   a) a área lateral deste cone; b) a área da base; c) a área total; d) o volume.

3. Uma embalagem possui o formato de um cone. Sabendo que o raio da base desse cone é de 12cm e sua altura é de 16 cm, então a área total dessa embalagem, considerando o valor de $\pi = 3$ é de:

   a) $1152\ cm^2$ b) $1232\ cm^2$ c) $1315\ cm^2$ d) $1408\ cm^2$ e) $1500\ cm^2$

4. Existem dois reservatórios de mesma altura e mesma base, mas o primeiro possui formato cilíndrico, com volume igual a V, então, o volume do segundo será igual a:

   a) $3V$ b) $2V$ c) V d) $\frac{V}{2}$ e) $\frac{V}{3}$

5. Um recipiente no formato de um cone possui altura igual a 12 cm e o comprimento da circunferência da base igual a 52,7 cm. Utilizando $\pi = 3{,}1$, calcule o volume desse recipiente.

6. Numa fábrica foi construído um reservatório no formato de um cone recto, com raio de 3 m e altura de 4 m. Para a conservação do reservatório, foi contratado um pintor, que cobra 60MT por m^2, para pintar a área externa e inclusive a base desse reservatório. Então. qual o valor gasto para pintar o reservatório todo? (Use $\pi = 3$.)

Passe este resumo para o seu caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área e o volume do cone. Mas antes disso você recordou o conceito do cone, os elementos do cone e a sua classificação. No que diz respeito a classificação você aprendeu que os cones podem ser rectos, oblíquos e equiláteros.

Para avançar ao novo conhecimento que é cálculo da área e do volume do cone, precisou de rever também, como se calcula a área e o volume do cilindro, uma vez que o cone tem uma relação com o cilindro, que não é só de serem ambos corpos redondos. O volume do cone equivale a terça parte do volume do cilindro se os dois tiverem o mesmo raio da base e a mesma altura.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção

Chave de Correcção

1. a) $54{,}95\ cm^2$ b) $28{,}3\ cm^2$ c) $83{,}22\ cm^2$ d)

2. a) $80{,}11\ cm^2$ b) $28{,}27\ cm^2$ c) $108{,}4\ cm^2$ d)

3. a) $1152\ cm^2$ 4. e) 5 $896\ cm^3$ 6. $4\,320MT$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 27: Área e volume da esfera

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido a calcular a área e o volume do cone, um dos integrantes da família dos corpos redondos, chegou a hora de mais um, a esfera.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular áreas da esfera;
- Calcular volumes da esfera.

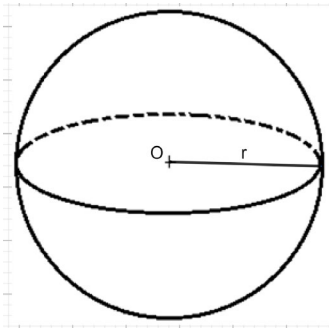
Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos

Caro Aluno, nesta lição vamos dedicar a nossa atenção à esfera. Como bem sabe, a esfera é um sólido geométrico da família dos não poliedros ou dos corpos redondos. São assim chamados porque eles são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). No caso da esfera toda a sua superfície é redonda e nos lembra o globo terrestre ao lado. Pode se definir a esfera como um conjunto de pontos que distam do centro a uma mesma medida. Mas dito desta forma pode-se confundir com a circunferência. Vamos melhorar esta definição:

Fig. 26 – Globo terrestre

Consideremos um ponto **O** e um segmento de medida r. Denomina-se esfera de centro **O** e raio **r** o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a **r.**

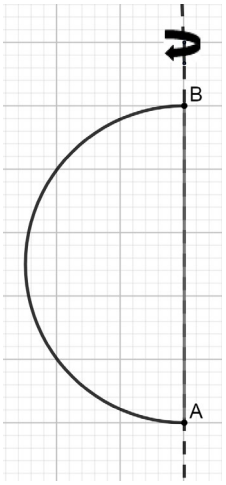
Caro aluno, faltava dizer que os pontos em referência são do espaço e que também fazem parte aqueles que estiverem a menos da distância **r**. Pode parecer pouco importante referenciar isto mas corre se o risco de confundir primeiro esfera e circunferência e segundo esfera e superfície esférica.

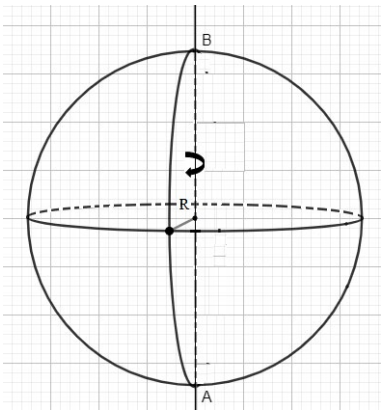


Venda proibida

A superfície esférica de centro **O** e raio **r** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é igual a **r**.

A esfera é também à semelhança do cilindro e do cone, um solido de revolução. Veja ao lado como podemos ter a esfera girando uma superfície cujo formato é de um semicírculo em torno de um eixo AB.

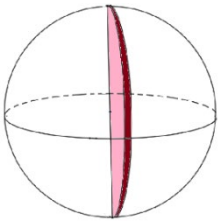


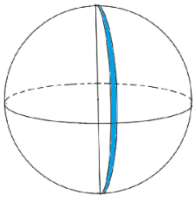


Elementos da esfera

Superfície Esférica: a superfície é formada pelos pontos que estão distantes do centro na mesma medida do raio (r);

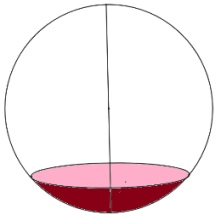
Cunha Esférica: a cunha esférica é a região que está entre dois semicírculos ligados ao eixo de rotação. Pode ser comparado a um gomo de uma laranja;

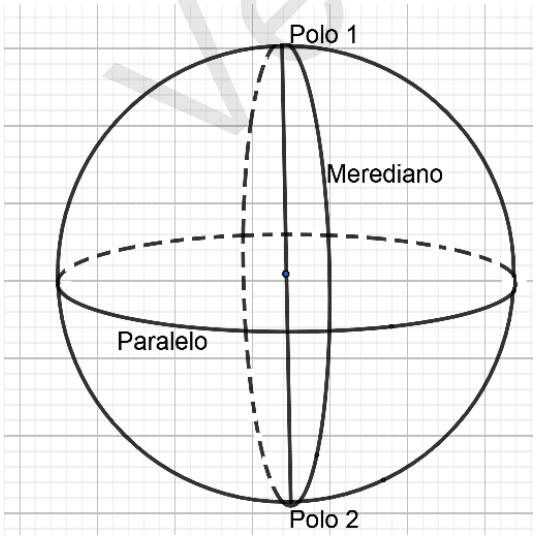




Fuso Esférico: o fuso é uma parte da superfície da esfera que é obtida através do giro de uma semicircunferência de um ângulo entre 0 e 2π. Podemos comparar o fuso esférico como uma parte da casca de uma laranja;

Calota Esférica: a calota é a parte da esfera cortada por um plano. Como se pegássemos uma laranja e cortássemos a sua parte de cima;





Polos: os polos são os pontos que a superfície esférica se encontra com o eixo de rotação. Analogamente, é como os polos sul e norte da Terra;

Paralelo: paralelo é uma circunferência na superfície esférica formada por planos perpendiculares ao eixo de rotação. O maior paralelo é chamado de Equador;

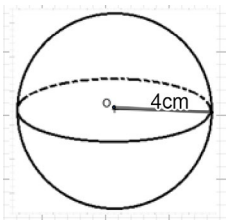
Meridiano: é uma circunferência na superfície esférica formada por uma intersecção de um plano que tem o eixo de rotação.

Venda proibida

Volume da esfera

Para calcular o volume da esfera usa-se a seguinte fórmula: $V = \frac{4}{3} . \pi . r^3$. Onde **r** é a medida do raio.

Exemplo

Considere a imagem da esfera a baixo e calcule o seu volume. 	**Resolução:** Dados $V = \frac{4}{3} . \pi . r^3$. $r = 4cm$ $V = \frac{4}{3} . \pi . 4^3 cm^3$ Pedido $V = \frac{256\pi}{3} cm^3 = 267{,}95cm^3$ $V-?$

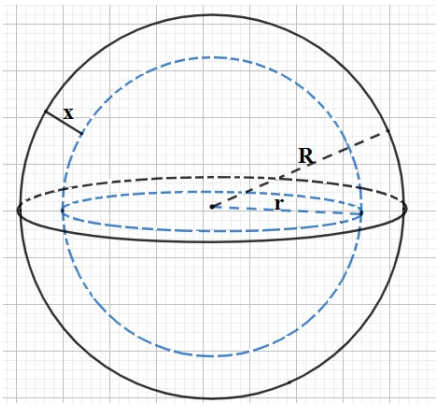
Área da esfera

Para calcular a área da esfera usa-se a seguinte fórmula: $A = 4 . \pi . r^2$. Onde **r** é a medida do raio.

Curiosidade

Porque é que a área da esfera é dada pela fórmula $A = 4 . \pi . r^2$.? Vamos justificar esta igualdade.

Diferentemente do cilindro e do cone, a esfera é um corpo redondo cuja superfície não pode ser planificada, isto é, não é possível "colocar" a superfície de uma esfera em um plano sem dobrá-la nem esticá-la. Por isso precisamos encontrar uma outra forma de mostrar a validade desta fórmula.



Ao lado temos duas esferas concêntricas, cujos raios são **r** e **R.** A diferença dos dois raios é de **x.**

$$\boldsymbol{R = r + x}$$

Se diminuirmos o valor de **x** os dois raios se tornarão mais próximos até serem iguais quando **x** for igual a zero**.**

O sólido limitado por essas duas esferas é uma espécie de "casca" formada por segmentos de recta cujo comprimento é **x**. Se considerarmos que a esfera menor tem área igual a **A**, podemos de forma intuitiva afirmar que o volume desse solido é dado por $\boldsymbol{A.x}$**.**

Mas como este sólido é formado pelas duas esferas pode se dizer que:

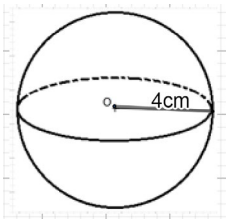
$A.x = V_{esfera\ maio} - V_{esfera\ menor}$ $A.x = \frac{4}{3} . \pi . (r + x)^3 . - \frac{4}{3} . \pi . r^3$	$A.x = \frac{4}{3} . \pi\ (3r^2x + 3rx^2 + x^3)$ $A.x = \frac{4}{3} . \pi . x\ (3r^2 + 3rx + x^2)$

Venda proibida

$A.x = \frac{4}{3}.\pi\,[(r+x)^3 - r^3]$ $A.x = \frac{4}{3}.\pi\,(r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3 - r^3)$	$A = \frac{4}{3}.\pi\,(3r^2 + 3rx + x^2)$ quando $\boldsymbol{x}$ for igual a zero teremos apenas uma esfera, e: $A = \frac{4}{3}.\pi.3r^2 = 4.\pi.r^2$

Exemplo:

Considere a imagem da esfera a baixo e calcule a área da sua superfície



Resolução:

Dados

$r = 4\ cm$

Pedido

A -?

$A = 4\pi r^2$

$A = 4.3{,}14.4^2\ cm^2$

$A = 200{,}96\ cm^2$

Resolva a seguir os exercícios propostos.

Exercícios

1. Calcule a área e o volume da esfera, sabendo que o seu raio mede 6cm.

2. Se uma esfera possui uma área de 2034 cm². Qual é a medida do seu raio?

3. Calcule o volume de uma esfera, sabendo que a área de sua superfície é igual a $576\pi\ cm^2$.

4. Uma esfera de raio r tem volume V e a área de sua superfície é A. Expresse, em função de V e de A, o volume e a área da superfície da esfera obtida em cada um dos seguintes casos:
   a) r é dobrado;
   b) r é reduzido à sua terça parte.

5. Uma esfera oca tem 1 dm de raio exterior e 1 cm de espessura. Qual é o volume da parte oca da esfera?

Passe este resumo para o seu caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a calcular a área e o volume da esfera. Mas antes de propriamente realizar esses cálculos, dedicou algum tempo para definir a esfera como um corpo redondo e como sólido de revolução, e à semelhança dos outros sólidos que aprendeu que este sólido tem como elementos os seguintes: superfície esférica, cunha esférica, fuso esférico, calota esférica, polos, paralelos e meridianos

No que diz respeito ao sólido de revolução aprendeu que a esfera resulta da rotação de um semicírculo em torno de um determinado eixo.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. $288\pi cm$ 2. 12,7cm 3. $2\,304\pi\ cm^3$ 4 a) 8V e 4A 5 $972\pi\ cm^3$

b) b) $\frac{V}{27}$ e $\frac{A}{9}$

Venda proibida

Teste de Preparação

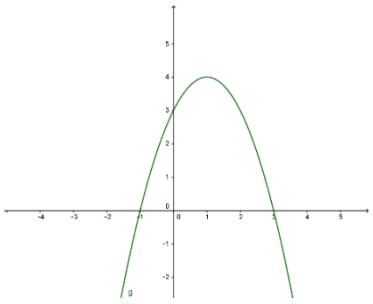
1. Na Cidade da Maxixe, fez-se um levantamento do número de pessoas de cada agregado familiar. Num dos bairros obteve-se os seguintes resultados:

   1 5 2 4 4 3 5 1 5 6 3 3 4 4 5 6 6 4 2 3

   a) Construa uma tabela de frequências de acordo com os dados.
   b) Determine a média das pessoas de cada agregado familiar.
   c) Determine a mediana.
   d) Determine a moda.

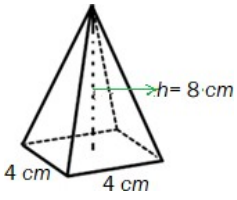
2. Dada a equação $x^2 - 3x + m = 0$, de parâmetro m:
   a) Resolva-a para $m = 0$;
   b) Determine m de modo que a equação admita duas raízes reais iguais;
   c) Determine m de modo que o produto das raízes seja positivo.

3. Dada a função f.

a) Indique o domínio. b) Indique o contradominio c) Os zeros da função d) Ordenada na origem. e) As coordenadas de vértice f) Estude a monotonia g) Estude a variação do sinal h) Equação do eixo de simetria	

4. Resolva a inequações: $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

5. Calcula a área e o volume da figura.



Venda proibida

Chave de Correcção

1.a)

X	fi	fr	$fr\%$	FRc
1	2	0,1	10%	2
2	2	0,1	10%	4
3	4	0,2	20%	8
4	5	0,25	25%	13
5	4	0,2	20%	17
6	3	0,15	15%	20
	$n = 20$	1	100%	

b) A média é de 3,8. c) A mediana é 4 d) A moda é 4.

2. a) $S = \{0; 3\}$ b) $S: m = -\frac{9}{4}$ c) $S: m \in]0; +\infty[$

3. Dada a função f.
   a) $Df = R$
   b) $D'f: y \in]-\infty; 4]$
   c) $x_1 = -1 \wedge x_2 = 3$
   d) $y = 3$
   e) $V(1; 4)$
   f)

x	$]-\infty; 1[$	1	$]1; +\infty[$
y	crescente	4	decrescente

   g)

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 3[$	3	$]3; +\infty[$
y	$-$	0	$+$	0	$-$

   h) $x = 1$

4. $S: x\epsilon[1; 4]$

5. R:Área total $= \mathbf{80}\boldsymbol{cm^2}$**;** Volume da pirâmide $= \mathbf{42,7}\boldsymbol{cm^3}$

Venda proibida

Bibliografia do módulo

Amaral, a. J., & Nhalungo, C. (2004). *As maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Chuquela, N. J., & Langa, N. (2008). *Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Gelson Iezzi & Samuel Hazzan, (2004). Fundamentos de Matemática Elementar – Conjuntos e funções – Vol.1 8ª edição SP Atual editora.

Giovane José Rui & Bonjorno José Roberto (1992). Matemática 1º e 2º grau, S. Paula, Editora FTD S.A.

Guibundana, D., & Sapatinha, J. C. (2009). *Saber Matemática.* Maputo: Logman Moçambique Lda.

Langa, H., & Chuquela, N. J. (2010). *Matemática.* Maputo: Plural editora.

Nhezi Ismael *Cassano (*2005). M10 Matemática 10ª classe*,* Lda, Moç.Texto Editores,

Sapantinha, J. C., & Guibundana, D. H. (2010). *saber Matemática.* Maputo: Longman Mocambique.

Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números.* Maputo: Texto Editores.

Venda proibida

IEDA