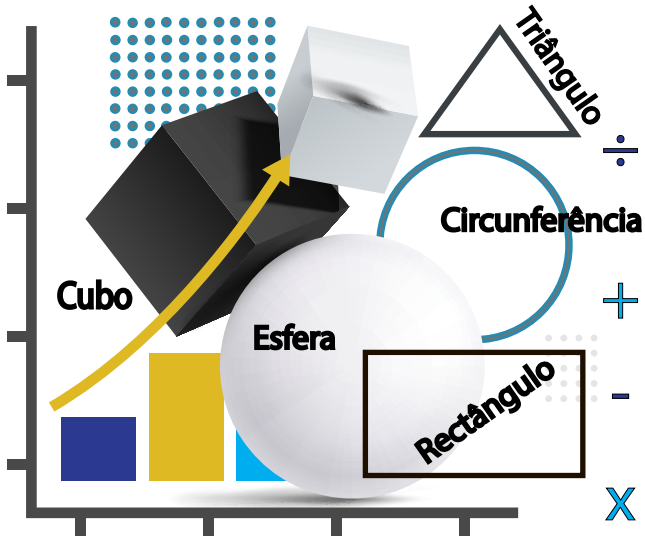
República de Moçambique
Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto de Educação Aberta e à Distância

MATEMÁTICA



MÓDULO 4

Venda proibida

Programa do Ensino Secundário à Distância - 1º Ciclo

PESD I

Módulo 4 de Matemática

Venda proibida

Moçambique – 2023

Ficha Técnica

© Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Título:

Módulo 4 de Matemática

Direcção Geral:

- Manuel José Simbine (Director Geral)
- Luís do Nascimento Paulo (Director Geral Adjunto)

Coordenação:

- Castiano Pússua Gimo (Chefe do Departamento Pedagógico)

Elaboração:

- Abel Ernesto Uqueio Mondlane
- Luís do Nascimento Paulo
- Adélia Machaieie
- Gina Guibunda
- Anselmo Chuquela
- Helena Simone
- Onélio da Mena

Revisão Instrucional:

- Simão Arão Sibinde

Revisão Científica:

- Argentino Gonçalves Nunes
- Benedito Tomás

Revisão Linguística:

- Luís Uamusse

Ilustração:

- Dionísio Manjate
- Félix Mindú
- Hermínia Langa

Maquetização:

- Flávio Joaquim Cordeiro
- Hermínio Andrade Banze
- João António Siquisse
- Júlio Ernesto Melo Ngomane

Impressão:

Venda proibida

Caro(a) aluno(a),

Seja bem-vindo/a ao Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD) do primeiro ciclo, abreviadamente designado PESD1.

É com muito prazer que o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano (MINEDH) coloca em suas mãos os materiais de aprendizagem, especialmente concebidos e elaborados para que você, independentemente do seu género, idade, condição social, ocupação profissional ou local de residência, possa prosseguir com os estudos do Ensino Secundário, através do Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD), desde que tenha concluído o Ensino Primário.

Este programa resulta da decisão do Governo de Moçambique de oferecer no Sistema Nacional de Educação (SNE) o Ensino Secundário, no país, em duas modalidades: Ensino Presencial e Ensino à Distância, expandindo, assim, o acesso à educação a um número cada vez maior de crianças, jovens e adultos moçambicanos, como você.

Ao optar por se matricular no PESD1, você vai desenvolver conhecimentos, habilidades, atitudes e valores definidos para o graduado do 1 º ciclo do Ensino Secundário, que vão contribuir para a melhoria da sua vida, da sua família, da sua comunidade e do País.

Para a implementação deste programa, o MINEDH criou Centros de Apoio à Aprendizagem (CAA), em locais estrategicamente escolhidos, onde você e os seus colegas dever-se-ão encontrar periodicamente com os tutores, que são professores capacitados para apoiar a sua aprendizagem, esclarecendo as dúvidas, orientando e aconselhando-o na adopção de melhores práticas de estudo.

Estudar à Distância exige o desenvolvimento de uma atitude mais activa no processo de aprendizagem, estimulando em si a necessidade de muita dedicação, boa organização, muita disciplina, criatividade e, sobretudo, determinação nos estudos. Por isso, fazemos votos de que se empenhe com afinco e responsabilidade para que possa, efectivamente, aprender e poder contribuir para um Moçambique sempre melhor.

Bons Estudos!

Maputo, aos 18 de Janeiro de 2024

CARMELITA RITA NAMASHULUA

MINISTRA DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 6

I. SOBRE O PESD 1 6
II. SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA 6
III. PROCESSO DE ESTUDO 6
IV. AVALIAÇÃO 7
V. ÍCONES 8

INTRODUÇÃO AO MÓDULO 9

LIÇÃO Nº 1: CONGRUÊNCIA DE FIGURAS 11

LIÇÃO Nº 2: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS 14

LIÇÃO Nº 3: TEOREMA DE TALES 17

LIÇÃO Nº 4: POLÍGONOS SEMELHANTES 20

LIÇÃO Nº 5: TEOREMA DE PITÁGORAS 23

LIÇÃO Nº 6: QUADRILÁTERO 26

LIÇÃO Nº 7: TRAPÉZIO 31

LIÇÃO Nº 8: ISOMETRIAS: ROTAÇÃO, REFLEXÃO E TRANSLAÇÃO 39

LIÇÃO Nº 9: SIMETRIA 45

LIÇÃO Nº 10: ROTAÇÃO 53

LIÇÃO Nº 11: CUBOS E RAÍZES 58

LIÇÃO Nº 12: POTÊNCIA DE EXPOENTE FRACCIONÁRIO 61

LIÇÃO Nº 14: QUADRADO DE UMA RAIZ QUADRADA 67

LIÇÃO Nº 15: RADICAIS 71

LIÇÃO Nº 16: OPERAÇÕES COM RADICAIS 77

LIÇÃO Nº 17: RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES 80

LIÇÃO Nº 18: SISTEMA DE INEQUAÇÕES 82

LIÇÃO Nº 19: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO INEQUAÇÕES LINEARES 86

LIÇÃO Nº 20: HOMOTETIAS 88

LIÇÃO Nº 21: SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 95

LIÇÃO Nº 22: CASOS DE SEMELHANÇA: DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS PELA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 101

LIÇÃO Nº 23: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS APLICANDO A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E OS TEOREMAS DE THALES E DE PITÁGORAS 104

LIÇÃO Nº 24: POLINÓMIOS 108

LIÇÃO Nº 25: MULTIPLICAÇÃO DE POLINÓMIOS 112

LIÇÃO Nº 26: DECOMPOSIÇÃO DE UM POLINÓMIO 116

Venda proibida

TESTE DE PREPARAÇÃO 120
CHAVE DE CORRECÇÃO.....122
BIBLIOGRAFIA.....123

Venda proibida

INTRODUÇÃO

Caro (a) aluno (a), seja bem-vindo ao Programa do Ensino Secundário à Distância - PESD, uma opção de aprendizagem que lhe permite prosseguir com seus estudos pós-primários, para concluir o nível secundário.

A seguir apresentamos algumas informações que você deve conhecer antes de iniciar o seu estudo.

I. Sobre o PESD 1

Neste programa, você tem a oportunidade de estudar o primeiro ciclo do Ensino Secundário, mediante a leitura dos módulos auto-instrucionais, de forma individual, respeitando o seu ritmo próprio, para que depois de completar a aprendizagem dos conteúdos programados, seja submetido aos exames nacionais, cujos resultados positivos permitirão que você receba um certificado de conclusão do ciclo.

Neste programa, a sua aprendizagem será feita por ciclo, sendo que irá receber um conjunto de módulos de todas as disciplinas que compõem o primeiro ciclo do ensino secundário (7ª, 8ª ou 9ª classes), não se distinguindo cada uma destas três classes. Por essa razão, ao concluir o estudo deste conjunto de módulos, terá concluído o estudo do ciclo todo, estando habilitado a realizar os exames da 9ª classe.

II. Sobre a disciplina de Matemática

Neste ciclo, os conteúdos de **Matemática** estão estruturados em **5** (cinco**)** módulos. Cada módulo é constituído por um conjunto de lições.

Cada lição tem a seguinte estrutura: o título da lição, os objectivos, o tempo de estudo, o desenvolvimento (no qual encontramos a explicação dos conceitos, a demonstração de experiências e actividades), os exercícios, o resumo e a chave de correcção. Poderá encontrar o glossário, isto é, o significado de algumas palavras, no fim da lição.

III. Processo de estudo

O processo de estudo no PESD inicia depois de você receber um conjunto de orientações sobre o funcionamento da aprendizagem no ensino à distância, que são dadas no Centro de Apoio à Aprendizagem (CAA) pelo respectivo Gestor. Assim, você receberá, no máximo, dois módulos, dando início ao seu estudo. O estudo é de caracter individual e consiste na leitura dos conteúdos existentes nos módulos.

Venda proibida

Para efeitos de registo de notas pessoais (sistematização de informação, resumo das lições, resolução de actividades e exercícios, testes de preparação, incluindo anotação de dúvidas), você deverá usar um caderno. O caderno o ajudará a ser planificado e organizado no seu estudo.

A actividade de leitura faz parte do processo de estudo. Ela prepara a você a ganhar habilidade de leitura observando as regras de entoação, pausa e ritmo adequado.

Sendo assim, a actividade de leitura expressiva nas diferentes tipologias textuais previstas, nesta disciplina, deve ser feita e caberá ao seu tutor, ao longo do processo de seu estudo, a responsabilidade de programar, acompanhar e aferir o nível de atingimento dos objectivos programáticos traçados para este nível.

IV. Avaliação

No Ensino à Distância a avaliação faz parte do processo de aprendizagem. Sabe por quê? Ela estimula o seu interesse pela matéria e ajuda-lhe a medir em que medida está ou não a progredir na aprendizagem.

Por esta razão, ao longo e no final dos módulos aparecem actividades avaliativas, em diferentes formatos ou com diferentes nomes: *exercícios*, *actividades*, *experiências*, *resumos* e *testes de preparação*. Você deve resolver cada uma delas.

Depois de resolver um determinado tipo de actividade avaliativa, para você certificar-se se resolveu bem ou não, deverá consultar a Chave de correcção disponível logo após a actividade ou no fim do módulo.

Nas últimas páginas do módulo, vai encontrar um conjunto de questões denominadas “Teste de Preparação”, que serve para verificar o seu nível de assimilação dos conteúdos aprendidos no módulo e ao mesmo tempo que lhe prepara para a realização do Teste de Fim de Módulo (TFM).

O TFM é o teste ou prova que você irá realizar no fim de cada módulo no CAA, vigiado pelo gestor ou tutor. A nota obtida no TFM serve de base para efeito de admissão ao exame.

No fim do ciclo, realizará um Exame Nacional, com base no qual, tendo aproveitamento positivo, ser-lhe-á emitido um certificado de conclusão do 1º ciclo do Ensino Secundário.

Venda proibida

V. Ícones

Ao longo do módulo, você irá encontrar alguns símbolos gráficos com os quais se deve familiarizar antecipadamente, para a facilitação do seu estudo. Sempre que vir determinado ícone terá conhecimento prévio do que deve acontecer.

Glossário	**Desenvolvimento**	**Exercícios**	**Reflexão**
Tempo	**Resumo**	**Chave de correcção**	**Actividade de grupo**
Objectivos	**Discussão**	**Estudo de caso**	**Teste de preparação**
Note	**Dica**	**Ajuda**	**Experiências**
Vídeo	**Áudio**		

Venda proibida

INTRODUÇÃO AO MÓDULO

Seja bem-vindo, caro (a) aluno (a), ao estudo do módulo **4** da disciplina de **Matemática** do Programa do Ensino Secundário à Distância para o primeiro ciclo, PESD1.

Este módulo é constituído por **5 (cinco)** unidades temáticas, subdivididas em lições, respectivamente:

Unidade Temática 1: GEOMETRIA (4)
Unidade Temática 2 : NÚMEROS E OPERACOES (6)
Unidade Temática 3: ALGEBRA (4)
Unidade Temática 4: GEOMETRIA (5)
Unidade Temática 5: ÁLGEBRA (5)

Objectivos do módulo

Quando terminar o estudo do módulo 3 deste ciclo, você será capaz de:

- Aplicar conhecimentos da geometria na resolução de problemas de congruência e semelhança;
- Resolver problemas, envolvendo o teorema de Pitágoras;
- Resolver problemas, envolvendo trapézios;
- Aplicar conhecimentos da reflexão, rotação e simetria na resolução de problemas;
- Resolver operações com radicais, com potências;
- Efectuar as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão com monómios;
- Resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas

Recomendações para o estudo

Estimado estudante, para ter sucesso no estudo deste módulo, é necessária muita dedicação, portanto aconselhamos o seguinte:

- Reserve pelo menos 3horas por dia para o estudo de cada lição e resolução dos exercícios propostos;
- Procure um lugar tranquilo que disponha de espaço e iluminação apropriada, pode ser em casa, no Centro de Apoio à Aprendizagem (CAA) ou noutro lugar perto da sua casa;
- Durante a leitura, faça anotações no seu caderno sobre conceitos, fórmulas e outros aspectos importantes sobre o tema em estudo;
- Aponte também as dúvidas a serem apresentadas aos seus colegas, professor ou tutor de forma a serem esclarecidas;
- Faca o resumo das matérias estudadas, anotando as propriedades a serem aplicadas;
- Resolva os exercícios e só consulte a chave-de-Correcção para confirmar as respostas. Caso tenha respostas erradas volte a estudar a lição e resolve novamente os exercícios por forma a

Venda proibida

aperfeiçoar o seu conhecimento. Só depois de resolver com sucesso os exercícios poderá passar para o estudo da lição seguinte. Repita esse exercício em todas as lições.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 1: Congruência de figuras

Introdução

Caro Aluno, nesta 1ª lição do Modulo 4, vai estudar a congruência de figuras, começando por definir o conceito de congruência, a congruência de segmentos, de ângulos e de polígonos. Esta é a ferramenta básica que será usada nas lições seguintes, especificamente, quando formos aprender sobre congruência de triângulos.

Chamamos desde já a sua atenção para esta lição.

Objectivos da lição

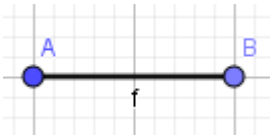
Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Definir o conceito de congruência;
- Definir o conceito de congruência de figuras geométricas.
- Identificar a congruência de segmentos de recta;
- Identificar a congruência de ângulos;
- Identificar a congruência de figuras planas.

Para uma melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos.

Congruência de figuras

Antes de falarmos de congruência de figuras, vamos falar de congruência de segmentos. O que lhe passa pela cabeça quando se fala de segmentos congruentes? Pois é , referimo-nos a segmento de recta! Já sabe o que é! Então vamos representá-lo.



Nestas condições, podemos afirmar que segmento de recta é uma parte da recta limitada por dois pontos. Para o caso do nosso exemplo os pontos A e B. Geralmente o segmento de recta é representado pelas letras que o limitam com um traço por cima.

Exemplo: Segmento de recta $\overline{AB}$.

Vamos considerar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Agora pegue numa régua, tire a medida de cada um deles. O que reparou? As medidas são iguais, não é? Sim, são iguais. Agora é simples, pois neste caso, porque as medidas são iguais dizemos que os

Venda proibida

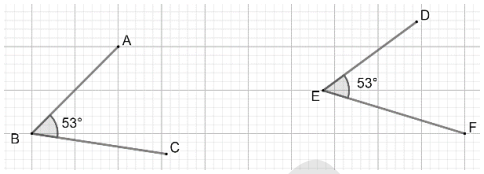
segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são iguais (congruentes) e representámo-los da seguinte forma $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ onde " $\cong$ " é o símbolo da congruência. Por outras palavras podemos dizer que dois segmentos de recta são iguais se eles tiverem comprimentos iguais.

No caso de Ângulos

Dois ângulos são chamados congruentes, quando possuem a mesma medida (mesma amplitude).

Vamos fazer a representação.

O $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ pois têm a mesma amplitude.

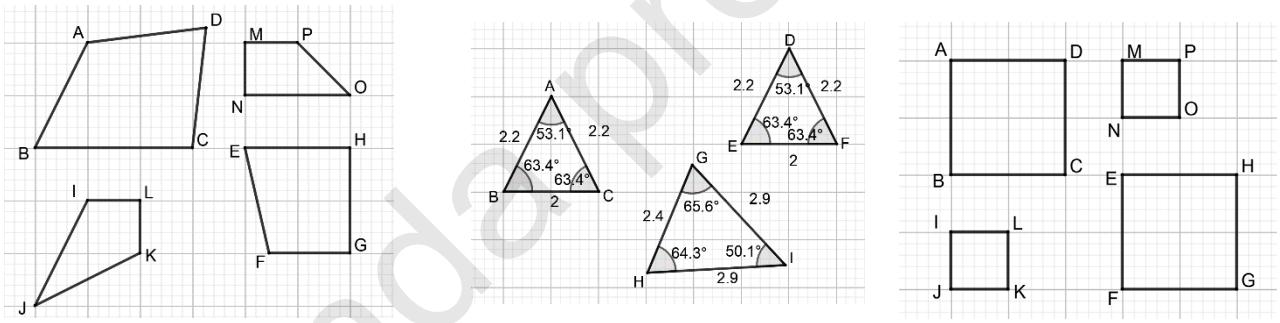


Figuras planas

O que você acha que podem ser? Sim é isso mesmo. O quadrado, o rectângulo e outros que deve estar a pensar neles são figuras planas.

Lembre-se que quando tratamos de segmentos de rectas congruentes e de ângulos congruentes, demos esse nome de congruentes, porque tinham a mesma medida. Agora vamos ver se consegue chegar ao conceito de figuras planas congruentes.

Agora observe as figuras abaixo:



Seleccione as figuras que têm mesmas medidas dos ângulos e dos lados.

De certeza que descobriu que têm as mesmas medidas as seguintes: o quadrado MNOP é igual ao quadrado IJKL, o triângulo ABC e igual ao triângulo DEF, o quadrado ABCD é igual ao quadrado EFGH.

Pois, elas apresentam comprimentos de lados iguais e amplitudes dos ângulos internos iguais. Note que foi preciso comparar lados e ângulos correspondentes.

Então o que serão figuras planas congruentes?

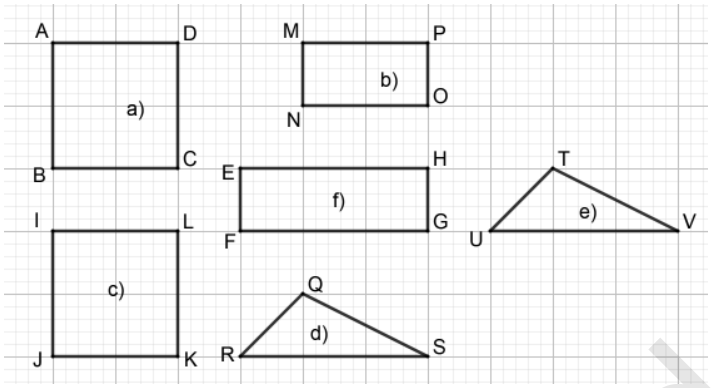
Figuras planas congruentes são aquelas que possuem mesmo formato e mesmo tamanho. Em outras palavras, são congruentes as figuras planas, cujos lados correspondentes têm medidas iguais e os seus ângulos correspondentes também.

Agora resolva os exercícios que seguem.

Venda proibida

Exercícios

1. Dadas as figuras, no seu caderno, responda quais, as que são congruentes.



Como vê, a lição vai ao fim. Então, resuma-a no seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição aprendeu sobre congruência de segmentos, de ângulos e de figuras planas. e chegou à conclusão de que dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida; duas figuras planas são congruentes, quando têm o mesmo formato e mesmo tamanho e, finalmente dois segmentos de recta são quando têm comprimentos iguais.

Agora, compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) e c) d) e e) b) e f)

Venda proibida

LIÇÃO Nº 2: Congruência de triângulos

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido a congruência de segmentos, ângulos e figuras, chegou, agora a vez de aprender a congruência de triângulos, o que vai ajudar a distinguir triângulos congruentes com base em critérios já estabelecidos.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar triângulos congruentes;
- Aplicar os critérios de congruência de triângulos na resolução de problemas geométricos;
- Aplicar os critérios de congruência de triângulos na resolução de problemas do quotidiano.

Para uma melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos.

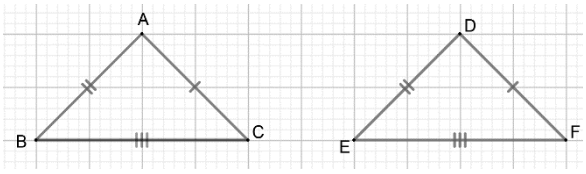
Congruência de triângulos.

Você já sabe quando é que se fala da congruência entre 2 coisas. Então, o que são triângulos congruentes? Diz-se que dois triângulos são congruentes, quando há igualdade entre as medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos. Vale dizer, que dois triângulos são congruentes quando os lados e ângulos correspondentes possuem as mesmas medidas.

Para chegarmos à conclusão de que os triângulos são congruentes, existem critérios (procedimentos) que devem ser usados para esse fim nomeadamente:

Critério: LLL (lado, lado, lado)

Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes. Vamos prestar atenção no exemplo abaixo.

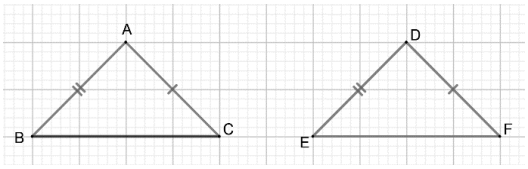


Como podemos observar, os três lados do triângulo ABC são respectivamente congruentes aos lados do triângulo DEF.

Venda proibida

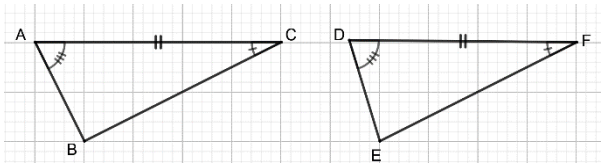
Critério: LAL (lado, angulo, lado)

Dois triângulos são congruentes (iguais) quando possuem dois lados e o ângulo entre eles formado, respectivamente congruentes.



Critério: ALA (lado, angulo, lado)

Dois triângulos são congruentes (iguais) se tiverem dois ângulos e um lado correspondentes em cada triângulo congruente.



Agora, resolva esta actividade.

Actividade

1. Com base no que aprendeu sobre a congruência de triângulos, analise as afirmações a baixo, e assinale com V, as verdadeiras e com F, as falsas:

I – Ao comparar dois triângulos, se a medida dos ângulos for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Ângulo, Ângulo e Ângulo.

II – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

III – Ao comparar dois triângulos, se as medidas dos lados forem congruentes um a um, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.

2. Assinale com x a alternativa correcta:

A) ( ) Somente a I é verdadeira.

B) ( )Somente a II é verdadeira.

C) ( )Somente a III é verdadeira.

D) ( )Somente a II é falsa.

Compare as suas respostas com as da chave.

Resolução

I – (**Falsa**) Nos triângulos, o facto de ter os ângulos correspondentes congruentes não é o suficiente para que esses triângulos sejam congruentes.

II – (**Verdadeira**) Ao comparar dois triângulos equiláteros, não é suficiente que estes tenham todos os seus ângulos iguais, para que sejam congruentes.

III – (**Verdadeira**) Ao comparar dois triângulos equiláteros, é suficiente que estes tenham todos os seus lados correspondentes iguais, para que sejam congruentes.

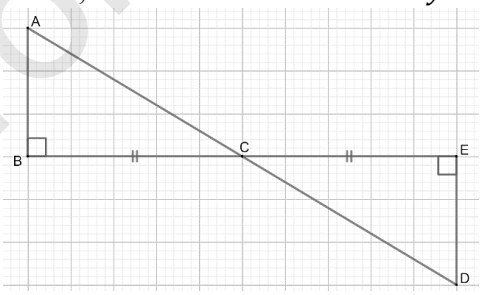
Faça uma pequena pausa, reflicta sobre os exemplos dados anteriormente e depois resolva os exercícios que lhe propomos. Em caso de dificuldades consulte os seus colegas ou o seu tutor.

Venda proibida

Exercícios

1. Assinale V para verdadeiro ou F para falso nas afirmações abaixo:
   a) ( ) Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.
   b) ( ) Se dois triângulos têm dois lados e um ângulo respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.
   c) ( ) Se dois triângulos têm um lado e dois ângulos a ele adjacentes respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.
   d) ( ) Se dois triângulos têm três ângulos respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.
   e) ( ) Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.
2. Na imagem a seguir, sabemos que $\overline{AB} = 15, \overline{DC} = 10, \overline{AC} = 3x - 2$ e $\overline{DE} = 4y + 3$, então, o valor de $x + y$ é igual a:

   a) 4 c) 6 e) 8
   b) 5 d) 7



Apresente, no seu caderno, o Resumo da Lição.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta lição aprendemos sobre congruência de triângulos, onde para além da sua definição, analisamos os diferentes casos de congruência .

Assim, diz–se que dois triângulos são congruentes, no caso de possuírem os três lados respectivamente congruentes, se possuírem dois lados e o ângulo entre eles, respectivamente congruentes, ou ainda se tiverem dois ângulos e um lado correspondentes em cada triângulo congruente.

Agora, compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) V b) F c) V d) V e) F 2. d)

Venda proibida

LIÇÃO Nº 3: Teorema de Tales

Introdução

Caro aluno, depois de você ter aprendido os critérios de congruências, nesta lição vai ver a Isometria. Chamamos desde já a sua atenção.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar o teorema de Thales na resolução de exercícios.

Para uma melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos.

Paralelismo e proporcionalidade: Teorema de Tales

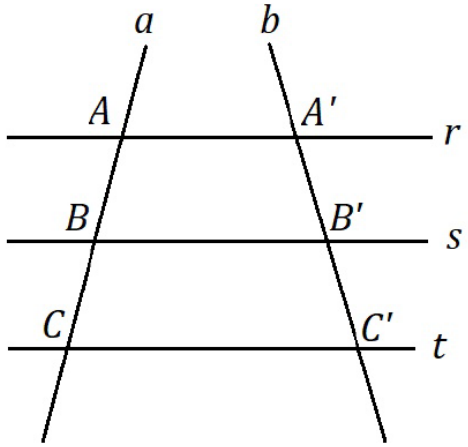
O teorema de Thales permite-nos relacionar os seguimentos de rectas definidas por rectas paralelas intersectadas por duas rectas transversais e definirem segmentos de rectas proporcionais.

Consideremos três rectas paralelas (rectas que prolongando nunca se cruzam) r, s e t:

Fig.1

Em seguida vamos cortar as rectas **r, s** e **t** por duas rectas **a** e **b** transversais, assim:

Fig.2



O teorema de Thales diz o seguinte:

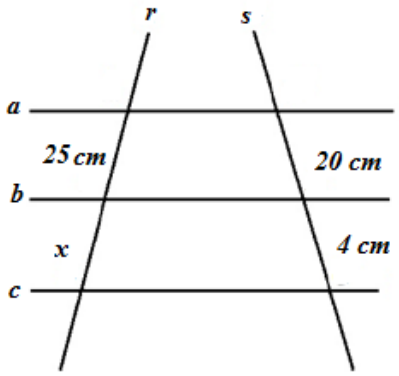
A intersecção de um feixe de rectas paralelas por duas rectas transversais forma segmentos de medidas proporcionais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Venda proibida

Exemplo:

Consideremos a figura ao lado, vamos determinar a medida x:



Olhando para a figura, de acordo com o teorema de Thales podemos encontrar os seguintes seguimentos proporcionais:

$$\frac{25\ cm}{x} = \frac{20\ cm}{4\ cm}$$

Resolvendo esta igualdade, teremos:

$x \times 20\ cm = 25\ cm \times 4\ cm$

$$x = \frac{25cm \times 4\ cm}{20\ cm} = \frac{100\ cm^2}{20\ cm} = 5\ cm$$

Faça uma pequena pausa, reflicta sobre o exemplo resolvido anteriormente e em seguida resolva os exercícios que lhe propomos.

Exercícios

1. Das afirmações a baixo, assinale com **X** aquela que define correctamente o teorema de Thales:

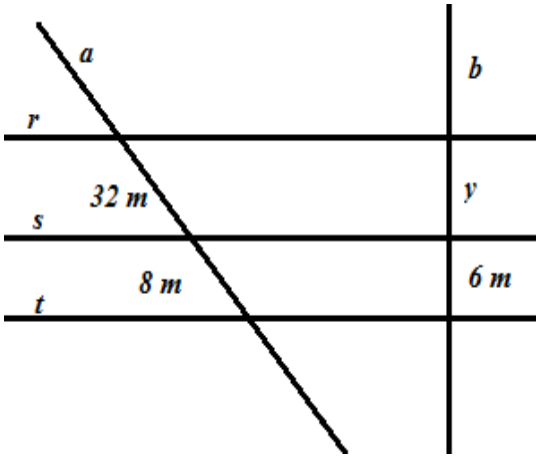
a) Dado um triângulo rectângulo, a soma do quadrado dos catetos é sempre igual ao quadrado da hipotenusa.

b) Num triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é sempre igual a 180º .

c) Um feixe de rectas paralelas determina sobre duas rectas transversais segmentos proporcionais.

d) Um feixe de rectas paralelas atravessadas por duas rectas transversais nem sempre determina segmentos proporcionais.

2. Sabendo que as rectas ***r***, ***s***, ***t*** são paralelas, determine o valor de ***y*.**



3. Considere 2 terrenos (I e II) que estão entre duas ruas A e B. Sabendo que as medidas de cada terreno de frente a rua A são 24m e 15 m. Determine a medida do comprimento do terreno I em frente da rua B, sabendo que o comprimento do terreno II em frente da rua B é de 20 m.

Venda proibida

Resuma a lição, no seu caderno. Ela já está no fim.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta lição aprendemos sobre teorema de Thales, que diz: *A intersecção de um feixe de rectas paralelas por duas rectas transversais forma segmentos de medidas proporcionais.*
Este enunciado, resume a relação existente entre os seguimentos de rectas definidas num feixe de rectas paralelas sobre duas transversais.

Agora, compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. Um feixe de rectas paralelas determina sobre duas rectas transversais segmentos proporcionais
   _X___
2. $y = 24\,m$
3. $32\,m$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 4: Polígonos semelhantes

Introdução

Caro estudante, depois de você ter aprendido o Teorema de Tales vamos nesta lição, falar de Polígonos semelhantes.

Faça uma óptima aprendizagem!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar polígonos semelhantes.

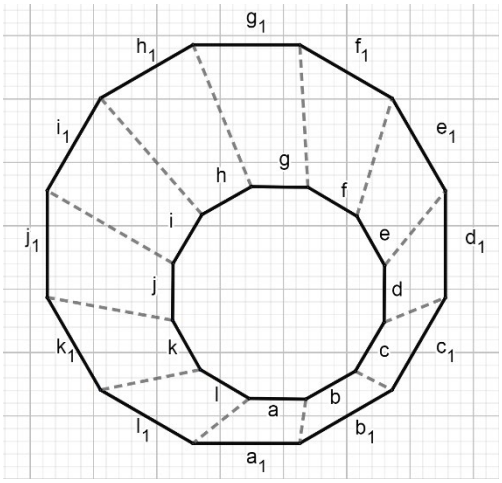
Para uma melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos.

Polígonos semelhantes

Caro aluno, antes de falarmos de polígonos semelhantes, vamos começar por recordar o que são polígonos.

Aprendeu em aulas passadas que *Polígonos* são figuras planas e fechadas, ou seja, limitadas por segmentos de rectas e que têm como elementos: lados, vértices, ângulos e diagonais.

Dizemos que dois polígonos são semelhantes quando apresentam o mesmo número de lados, possuem ângulos internos correspondentes congruentes e, além disso, têm lados correspondentes proporcionais.



Exemplo de polígonos semelhantes.

Portanto, para que dois polígonos sejam semelhantes, eles devem cumprir os três requisitos seguintes:

1. Possuir o mesmo número de lados;
2. Possuir ângulos internos respectivos congruentes;
3. Possuir lados correspondentes proporcionais.

Propriedades

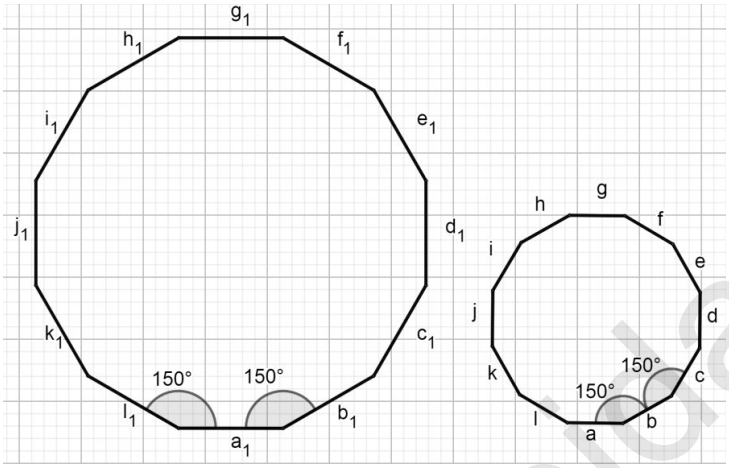
A respeito dos polígonos que se enquadram nesses requisitos, existem duas propriedades básicas:

Propriedade 1 - Dois polígonos congruentes são também semelhantes. Se dois polígonos são congruentes, eles já possuem o mesmo número de lados, além de possuírem ângulos internos respectivos congruentes e lados correspondentes congruentes. Como os lados são correspondentes, a

Venda proibida

divisão entre eles sempre dará 1, independentemente do tamanho dos lados. Portanto, esses lados são proporcionais, o que classifica os polígonos como semelhantes.

Propriedade 2 – Dois polígonos semelhantes possuem perímetros e diagonais proporcionais às medidas de dois lados correspondentes. Observe essa propriedade no exemplo seguinte:



Esses polígonos são regulares (foram construídos assim) e, por isso, possuem todos os ângulos iguais e lados correspondentes proporcionais. Comparando os dois, teremos o mesmo número de lados, ângulos respectivos congruentes e lados correspondentes proporcionais. Dessa forma, eles são semelhantes. A propriedade 2 garante que os perímetros desses polígonos são proporcionais a dois lados quaisquer.

Para verificar essa propriedade, observe que a base do primeiro polígono é 2 e a base do segundo é 1. Os perímetros desses polígonos, respectivamente, são: 24 e 12. Agora escreva as razões respeitando a ordem do primeiro polígono para o segundo:

$$\frac{2}{1} = \frac{24}{12} = 2$$

Resolva os exercícios que seguem, no seu caderno.

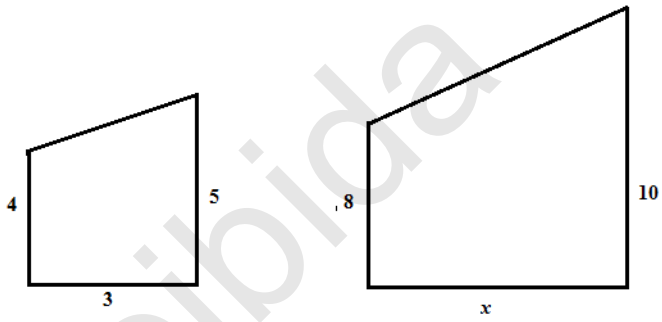
Exercícios

1. Considerando a definição de polígonos semelhantes, assinale com **V** a alternativa verdadeira e com **F,** a falsa.
   a) Dois polígonos que possuem lados com medidas iguais são semelhantes ___
   b) Dois polígonos que possuem ângulos congruentes são semelhantes ___
   c) Um polígono é convexo e o outro não. Esses dois polígonos são semelhantes ___
   d) Dois polígonos que possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são semelhantes ___
   e) Apenas triângulos podem ser considerados semelhantes ___

Venda proibida

2. Considerando as propriedades dos polígonos, assinale com **V** a alternativa verdadeira **F** a alternativa falsa.
   a) As diagonais de polígonos semelhantes são proporcionais, na mesma razão estabelecida entre os polígonos.___
   b) As diagonais de polígonos semelhantes não são proporcionais.___
   c) Os ângulos internos de dois polígonos congruentes são respectivamente congruentes e lados correspondentes também congruentes. _____
   d) Os perímetros de polígonos semelhantes não são proporcionais. ___

3. Dados os polígonos a baixo, determine a medida "x", sabendo que os dois são semelhantes.



A lição está prestes a terminar. Então, apresente o resumo da mesma.

Resumo da Lição

Aprendeu sobre polígonos e viu que são semelhantes quando apresentam o mesmo número de lados, possuem ângulos internos correspondentes congruentes e, além disso, têm lados correspondentes proporcionais.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) F b) F c) F d) V e) F
2. a) V b) F c) V d) F
3. $x = 6$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 5: Teorema de Pitágoras

Introdução

Caro estudante, depois de você ter aprendido polígonos semelhantes, nesta vai tratar o teorema de Pitágoras.

Chamamos desde já a sua atenção.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de exercícios.

Para uma melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos.

Teorema de Pitágoras

Caro aluno! Você, já ouviu falar deste teorema? Sabe por que este teorema tem este nome? Tem este nome em homenagem a Pitágoras.

Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego jónico creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo.

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, na costa jónica, em 570 a.C. Estudou matemática, astronomia, música, literatura e filosofia na sua cidade natal.

O **Teorema de Pitágoras** é considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente nos lados de um triângulo rectângulo.

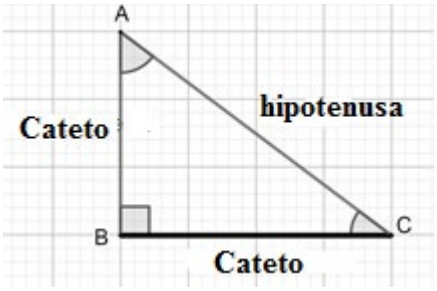
Considere uma escada encostada à parede e assente no chão. Eles formam um triângulo rectângulo e, por conseguinte, podemos usar o teorema de Pitágoras para calcularmos o comprimento da escada.

Para interpretar esta situação, primeiro, vamos perceber o enunciado do teorema que relacione os lados de um triângulo rectângulo.

Venda proibida

Considerando um triângulo rectângulo qualquer, podemos encontrar os seguintes elementos do triângulo:

- Lados que formam o ângulo recto: lado $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são chamados **catetos**
- Lado maior do triângulo rectângulo: $\overline{AC}$ é chamado **hipotenusa**.



Por definição a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo recto e os catetos são os dois lados que o formam, ou seja, A **hipotenusa** é o lado do triângulo que tem a maior medida e fica oposta ao ângulo recto, enquanto os catetos são dois: o **cateto adjacente** e o **cateto oposto**. O cateto adjacente é aquele que fica ao lado de um ângulo e o cateto oposto fica em frente a um determinado ângulo agudo no triângulo rectângulo.

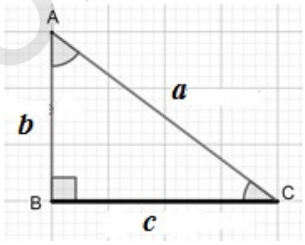
Assim, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são catetos adjacentes ao angulo $< ABC$ e o lado $\overline{AB}$é catecto oposto ao ângulo $< BCA$ e o lado $\overline{BC}$ cateto oposto ao angulo $< BAC$.

Considerando ainda o triângulo ABC, com os lados:

$\overline{AC} = a$

$\overline{AB} = b$

$\overline{BC} = c$



O teorema de Pitágoras diz:

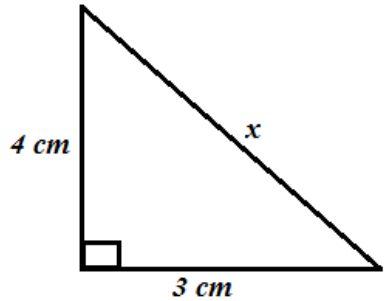
Em qualquer triângulo rectângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual á soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Isso pode ser traduzido em uma fórmula:

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ Onde:

- **a** representa a hipotenusa;
- **b** e **c**: representam os catetos oposto e adjacente.

Exemplo:

Considere o triângulo a baixo:



Vamos determinar o comprimento da hipotenusa $\boldsymbol{x}$.

Considerando cateto $b = 4cm$, $c = 3cm$ e hipotenusa $\boldsymbol{x}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$ teremos:

Venda proibida

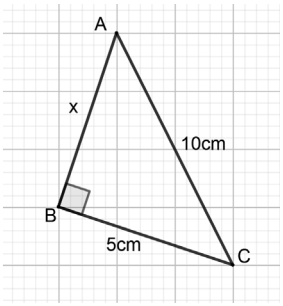
$$x^2 = (4cm)^2 + (3cm)^2$$
$$x^2 = 16\,cm^2 + 9\,cm^2$$
$$x^2 = 25\,cm^2$$
$$x = \sqrt{25\,cm^2}$$
$$x = 5\,cm$$

Amigo, este é momento de você fazer exercícios, testando a sua aprendizagem.

Exercícios

1. Calcule a medida da hipotenusa para o triângulo rectângulo **ABC**, com ângulo recto em **B**, sendo que os catetos **AB** e **BC**, têm medidas de **6 cm** e **8 cm**, respectivamente.

2. Observe o triângulo ao lado. Calcule a medida do cateto **AB** do triângulo rectângulo **ABC**, com ângulo recto em **B**, sabendo que a hipotenusa **AC** tem medida igual a **10 cm**, e o cateto **BC** mede **5 cm**.



Agora, a lição está a terminar. Apresente o seu resumo.

Resumo da Lição

O Teorema de Pitágoras relaciona os lados de um triângulo rectângulo e diz que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.
Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. $\overline{AC} = 10\,cm$
2. $x = 5\sqrt{3}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 6: Quadrilátero

Introdução

Caro aluno, depois de termos estudado, na lição anterior, as aplicações do Teorema de Pitágoras na resolução de certos problemas do dia-a-dia, nesta vamos aprender o quadrilátero.

Muita atenção à aprendizagem!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar um quadrilátero
- Classificar os quadriláteros;
- Aplicar o teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero na resolução de problemas da vida real;

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

Quadriláteros

Caro aluno, no seu dia-a-dia já viu objectos, figuras com formato de quatro lados, como por exemplo: um campo de futebol, sala de aulas, mesa com quatro lados entre outras. Esses objectos, figuras têm uma característica comum que é de ter quatro lados. A essas figuras que apresentam quatro lados são denominadas quadriláteros.

Definição

Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados. As suas características e propriedades específicas dizem respeito aos lados, ângulos e diagonais.

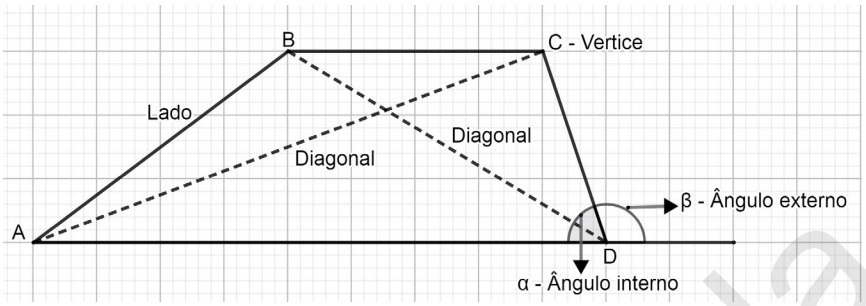
Quais são os elementos que compõem essas figuras?

Constituem elementos dos quadriláteros os seguintes:

- Lados: São os segmentos de recta que contornam o quadrilátero;
- Vértices: São os pontos de encontro entre dois lados;
- Ângulos internos: São os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um quadrilátero;

Venda proibida

- Ângulos externos: são ângulos formados pelo prolongamento de um lado do quadrilátero. Um ângulo externo sempre é suplementar ao ângulo interno adjacente a ele;
- Diagonais: Segmentos de recta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do quadrilátero. Dessa maneira, são os segmentos de recta que ligam dois vértices e que, ao mesmo tempo, não são lados.

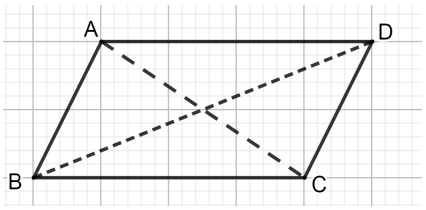


Classificação de quadriláteros

Caro aluno, olhando para as figuras, podemos notar que apresentam algumas características que diferenciam uma da outra, permitindo desta forma classificar em:

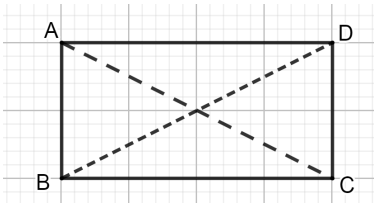
Paralelogramos

Os paralelogramos possuem lados opostos paralelos. As suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.



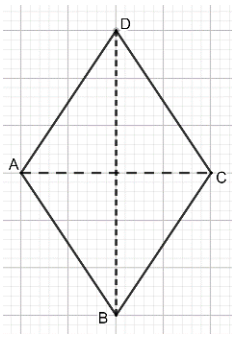
Rectângulo

Os rectângulos são paralelogramos cujos ângulos internos são rectos (daí o (nome rectângulo). Eles possuem todas as características dos paralelogramos. As suas diagonais são congruentes.



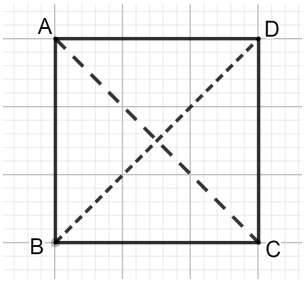
Losango

Os losangos são paralelogramos que possuem todos os lados congruentes, isto é, são paralelogramos equiláteros. A sua propriedade específica é a seguinte: As diagonais de um losango são perpendiculares.



Quadrado

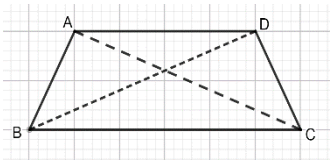
Os quadrados são losangos e rectângulos simultaneamente e, por isso, possuem todos os ângulos rectos e todos os lados congruentes. A sua propriedade específica é a seguinte: As diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes.



Venda proibida

Trapézios

Diferentemente dos paralelogramos, os trapézios possuem apenas um par de lados paralelos. Esses lados são chamados de bases. Os trapézios que possuem os outros dois lados que não são bases congruentes são chamados de isósceles.



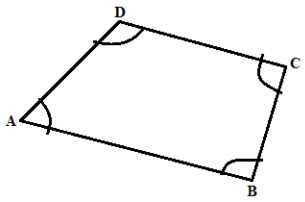
Caro aluno, existe uma relação entre os ângulos internos de um quadrilátero, que é definido pelo teorema sobre os ângulos internos de um quadrilátero.

Uma diagonal de um quadrilátero pode cortar a outra ao meio. Quando isso acontece diz-se que as diagonais bissectam-se.

Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero

O Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero diz o seguinte: a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual à 360º (trezentos e sessenta graus)

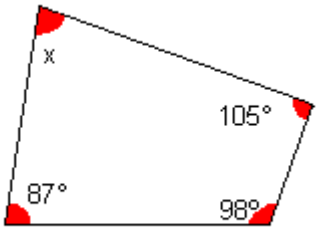
Consideremos o quadrilátero ao lado:



$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360^{O}$$

Exemplos:

Dada as figuras abaixo, determine os valores dos ângulos x e y em cada figura:



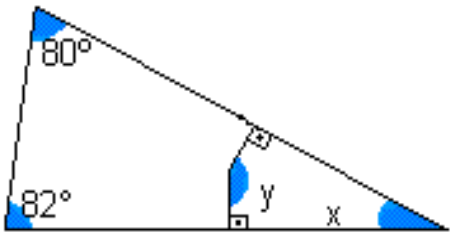
$x + 105° + 98° + 87° = 360°$

$x + 290° = 360°$

$x = 360° - 290°$

$x = 70°$

1º : Calculemos o valor do x.



$x + 80° + 82° = 180°$

$x + 162° = 180°$

$x = 180° - 162°$

$x = 18°$

2º :Calculemos o valor do y, teremos que: $18 + 90 + y + 90º = 360°$

$y + 198° = 360° \quad \leftrightarrow \quad y = 360 - 198°$

$y = 162º$

Realize o exercício que segue.

Venda proibida

Exercícios

1. Assinale com V na afirmação verdadeira e com F na afirmação falsa:
   a) O trapézio é um rectângulo. _____
   b) O quadrado é um paralelogramo. _____
   c) Um trapézio com dois ângulos restos é rectângulo. _____
   d) Trapézio escaleno é aquele que tem todos lados iguais. _____
   e) Trapézio isósceles é aquele que tem todos os lados iguais. _____
   f) Trapézio propriamente dito é aquele que só tem dois lados paralelos. _____
   g) Num paralelogramo a soma dos ângulos adjacentes é igual a 360̊. _____
   h) Quadrado é um quadrilátero com todos os lados iguais. _____

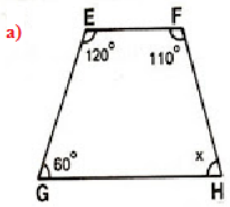
2. Sobre as propriedades dos quadriláteros, assinale com V a afirmação verdadeira e com F a afirmação falsa:
   a) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 180°. ____
   b) Num paralelogramo, as diagonais são congruentes. _____
   c) Num paralelogramo, lados opostos são paralelos e congruentes. ____
   d) Num quadrado, as diagonais são perpendiculares e não congruentes. ____
   e) Num quadrado, todos os lados são iguais e seus ângulos podem ser rectos ou não. ____

3. Qual é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois, não tem ângulos rectos e cujas diagonais bissectam-se?

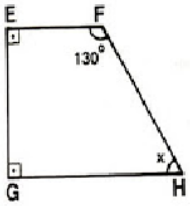
4. Qual é o quadrilátero que tem um par de lados paralelos e cujas diagonais não se cortam ao meio?

5. Calcule os valores das incógnitas $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ nos quadriláteros:

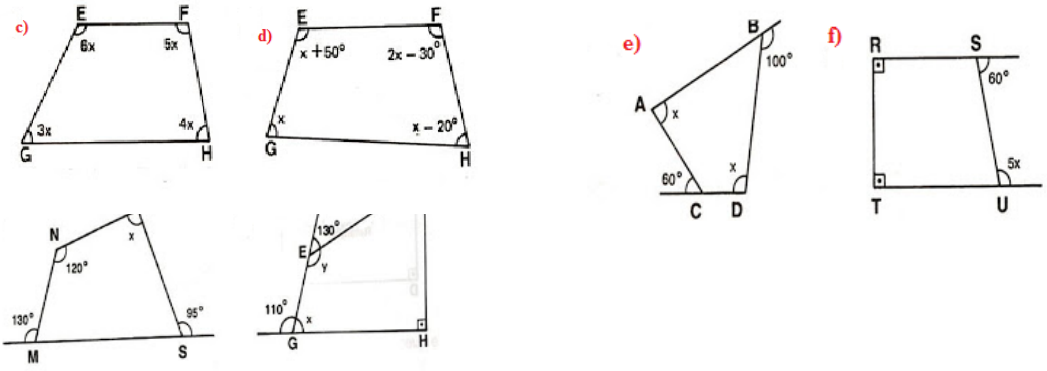
a)



b)



Venda proibida



Anote no seu caderno o resumo como forma de fixação do que aprendeu.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu sobre quadriláteros, definiu quadriláteros como sendo polígonos que possuem quatro lados. Igualmente falou da classificação dos quadriláteros, onde na classificação, baseamo-nos nas características de cada figura, para além da classificação, abordamos o teorema sobre os ângulos interno de um quadrilátero.

Agora, compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) F b) V c) V d) F e) F f) V g) F h) V
2. a) F b) V c) V d) F e) F
3. Losango
4. Trapézio
5. a) $x = 70°$ b) $x = 50°$ c) $x = 20°$ d) $x = 72°$ e) $x = 80°$ f) $x = 24°$ g) $x = 105°$ h) $x = 70°$; $x = 50°$ e $x = 150°$
6. a) $y = 130°; z = y = 130°$ e $x = 50°$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 7: Trapézio

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender a construir esses quadriláteros a partir das suas propriedades, assim como resolver problemas que envolvem os mesmos quadriláteros.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Construir Trapézio, com base nas suas propriedades;
- Construir paralelogramo, com base nas suas propriedades;
- Construir rectângulo, com base nas suas propriedades;
- Construir losango e com base nas suas propriedades;
- Construir quadrado, com nas suas propriedades;

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Conceitos e propriedades de quadriláteros

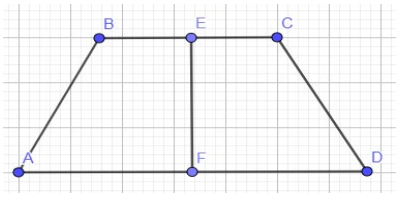
Você aprendeu que um quadrilátero é uma figura geométrica constituída por quatro segmentos de rectas consecutivas. Viu, também, que existem quadriláteros côncavos e convexos. Destes (quadriláteros convexos) salienta-se o trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado.

Mas, o que diferencia um quadrilátero do outro?

Para responder a esta questão vamos ver os conceitos dos referidos quadriláteros.

Trapézio

Trapézios são quadriláteros que possuem um par de lados opostos paralelos.

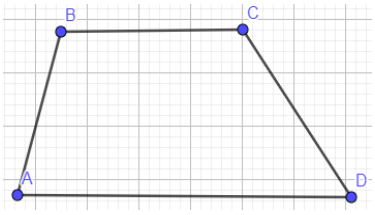
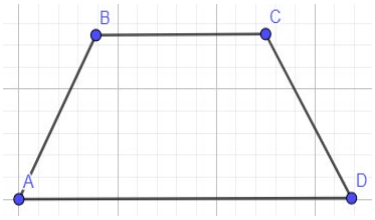
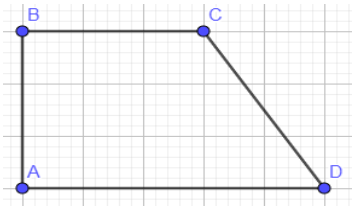


Note que os lados paralelos são designados de **bases**, sendo uma a base maior ($\overline{AD}$) e outra a base menor ($\overline{BC}$).

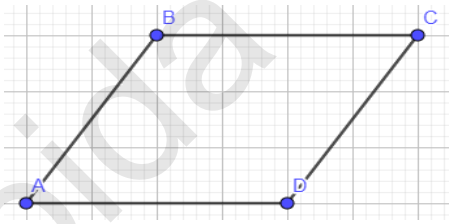
O segmento de recta perpendicular às bases ($\overline{EF}$) é designado de **altura**.

Venda proibida

Um trapézio pode ser **escaleno**, **isósceles** ou **rectângulo**.

Trapézio escaleno	**Trapézio isósceles**	**Trapézio rectângulo**
		
Os lados opostos oblíquos são diferentes.	Os lados opostos oblíquos são iguais.	Um dos lados opostos oblíquos é perpendicular às bases.

Paralelogramo

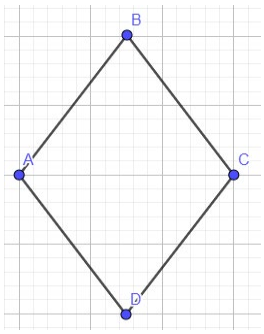


Paralelogramo é o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Note que os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são designados de **base**, e o segmento de recta perpendicular à base compreendido entre ela e o outro lado paralelo é designado de **altura**.

Ao conjunto das medidas da base e da altura chama-se **dimensões** do paralelogramo.

Losango



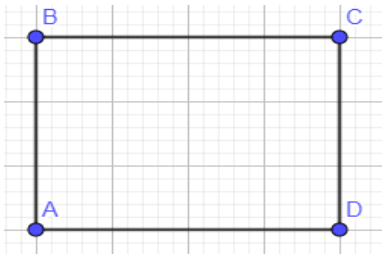
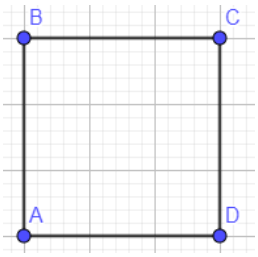
Losango é o quadrilátero cujos lados são todos iguais, mas os lados consecutivos não são perpendiculares ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$).

Rectângulo

Rectângulo é o quadrilátero cujos lados consecutivos são perpendiculares.

Quadrado

Quadrado é o rectângulo cujos lados são todos iguais.

Rectângulo	**Quadrado**
	
Os lados opostos são iguais ($\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$), e os lados consecutivos são perpendiculares.	Os lados são todos iguais ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$) e os lados consecutivos são perpendiculares.

Venda proibida

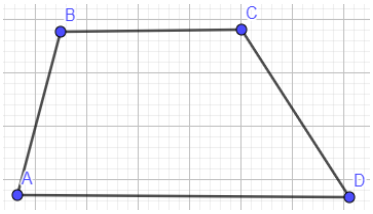
Que tal, deu para perceber os conceitos dos diferentes quadriláteros, acima referidos? Certamente que sim!

Percebeu que **cada quadrilátero tem suas características específicas.**

Agora que percebeu os diferentes conceitos dos quadriláteros, vai aprender, a seguir as propriedades desses quadriláteros.

Propriedade do trapézio

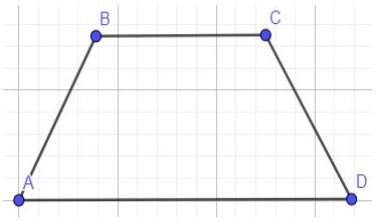
Num trapézio, os ângulos adjacentes a um dos lados opostos são suplementares.



Dado o trapézio $ABCD$, os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$ são adjacentes, assim como os ângulos $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle D$ são adjacentes, isto é a soma dos ângulos é igual a 180°. Logo:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° \text{ e } \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$$

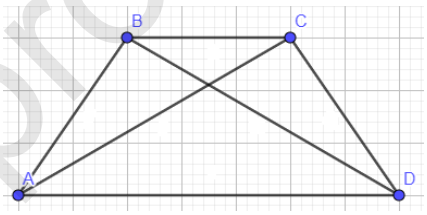
Teorema: *Num trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são iguais.*



Dado o trapézio isósceles $ABCD$ de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, temos:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D \text{ e } \sphericalangle B = \sphericalangle C$$

Teorema: *As diagonais de um trapézio isósceles são iguais.*



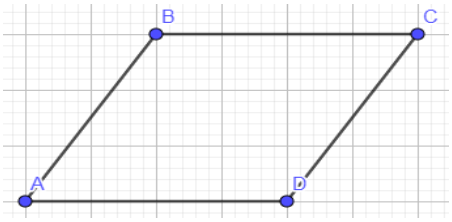
Dado o trapézio isósceles $ABCD$ de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos:

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

Propriedades do paralelogramo

1ª – *Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.*

2ª – *Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, isto é a soma dos ângulos é igual a* 180°.



Dado o paralelogramo $ABCD$, os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle C$ são opostos, assim como os ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle D$ são opostos. Logo:

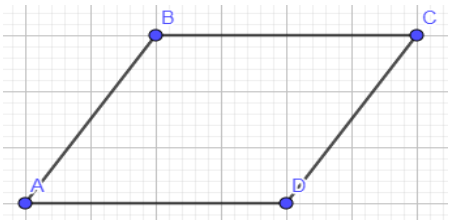
$$\sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ e } \sphericalangle B = \sphericalangle D$$

No paralelogramo $ABCD$, são consecutivos os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle D$, $\sphericalangle D$ e $\sphericalangle A$. Logo:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°, \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°, \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180° \text{ e } \sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$$

Venda proibida

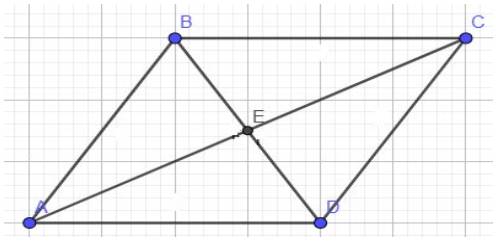
Teorema: *Os lados opostos de um paralelogramo são paralelos e iguais.*



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ *– os lados opostos são paralelos.*

$\overline{AB} = \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} = \overline{AD}$ *– os lados opostos são iguais.*

Teorema: *As diagonais de um paralelogramo dividem-se em duas partes iguais uma à outra.*

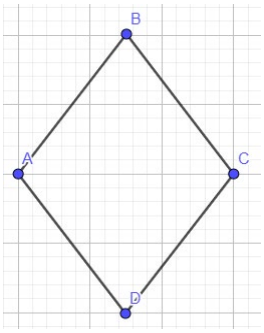


$\overline{AE} = \overline{EC}$ *e* $\overline{BE} = \overline{ED}$

Propriedades do losango

1ª – *Os ângulos opostos de um losango são iguais.*

2ª – *Os ângulos consecutivos de um losango são suplementares, isto é a soma dos ângulos é igual a* 180°.



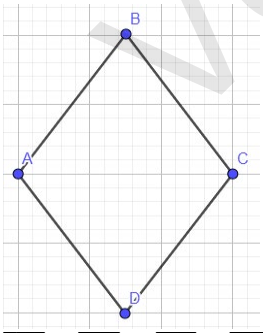
Dado o losango $ABCD$, os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle C$ são opostos, assim como os ângulos $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle D$ são opostos. Logo:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ e } \sphericalangle B = \sphericalangle D$$

No losango $ABCD$, são consecutivos os ângulos $\sphericalangle A$ e $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle D$, $\sphericalangle D$ e $\sphericalangle A$. Logo:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$ e $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$

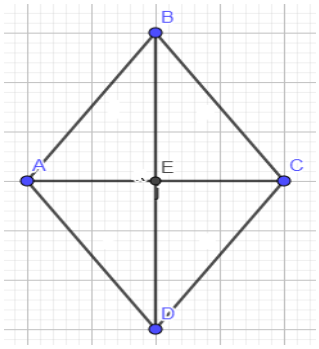
Teorema: *Os lados são todos iguais e os opostos são paralelos.*



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ – os lados opostos são paralelos.

$\overline{AB} = \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} = \overline{AD}$ – os lados opostos são iguais.

Teorema: *As diagonais de um losango* ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$) *são perpendiculares e dividem-se em duas partes iguais uma à outra.*



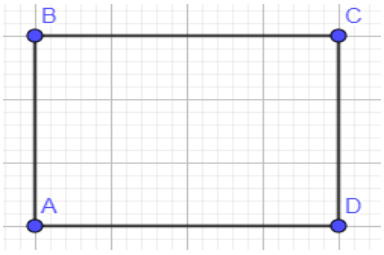
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ – as diagonais são perpendiculares.

$\overline{AE} = \overline{EC}$ *e* $\overline{BE} = \overline{ED}$

Venda proibida

Propriedades de um rectângulo

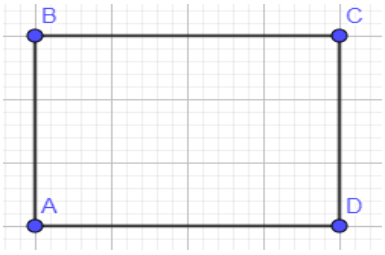
Os ângulos internos de um rectângulo são todos iguais a 90º.



Dado o rectângulo $ABCD$, temos:

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$

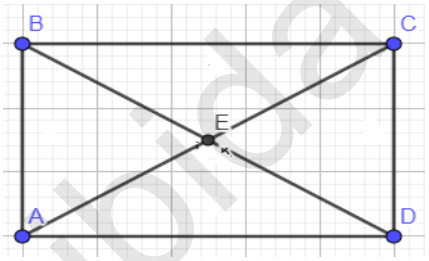
Teorema: *Os lados opostos de um rectângulo são paralelos e iguais.*



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ – os lados opostos são paralelos.

$\overline{AB} = \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} = \overline{AD}$ – os lados opostos são iguais.

Teorema: *As diagonais de um rectângulo são iguais e dividem-se em duas partes iguais uma à outra.*



$\overline{AC} = \overline{BD}$ – as diagonais são iguais.

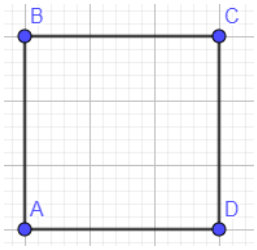
$\overline{AE} = \overline{EC}$ *e* $\overline{BE} = \overline{ED}$

Propriedades de um quadrado

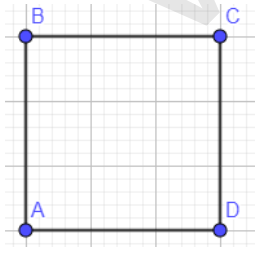
Os ângulos internos de um quadrado são todos iguais a 90º.

Dado o quadrado $ABCD$, temos:

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$



Teorema: *Os lados de um quadrado são todos iguais, os opostos são paralelos e os consecutivos perpendiculares*



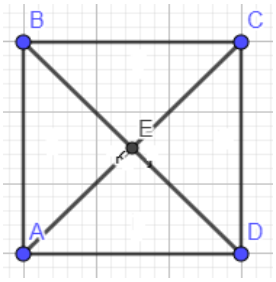
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ – todos os lados são iguais.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *e* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ – os lados opostos são paralelos.

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$

$\overline{DA} \perp \overline{AB}$- os lados consecutivos são perpendiculares

Teorema: *As diagonais de um quadrado são iguais, perpendiculares e dividem-se em duas partes iguais uma à outra.*



$\overline{AC} = \overline{BD}$ – as diagonais são iguais.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ – as diagonais são perpendiculares.

$\overline{AE} = \overline{EC}$ *e* $\overline{BE} = \overline{ED}$

Venda proibida

Tem alguma dúvida? Não guarde dúvidas consigo. Se tiver, contacte imediatamente o seu tutor.
A seguir resolva as actividades, como forma de consolidar a matéria em estudo.

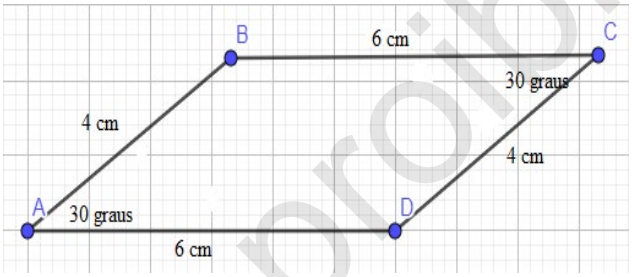
Actividades

1. Construa um paralelogramo em que dois lados consecutivos sejam iguais a $6\,cm$ e $4\,cm$, respectivamente, e o ângulo por eles formado seja igual a 30°.

Para construir o paralelogramo é preciso recorrer às suas características essenciais que são:

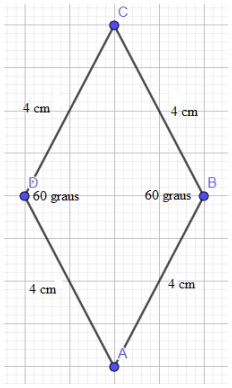
- Lados opostos paralelos e iguais;
- Ângulos opostos iguais;
- Ângulos consecutivos suplementares.

Assim, o paralelogramo fica determinado da seguinte maneira:



2. Construa um losango em que um dos lados e um dos ângulos sejam, respectivamente, iguais a $4\,cm$ e 60°.

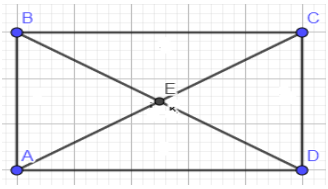
Para construir o losango é preciso recorrer às suas características essenciais que são:



- lados todos iguais, e os opostos são paralelos;
- ângulos opostos iguais;
- ângulos consecutivos suplementares.

Assim, o losango fica construído da seguinte maneira:

3. No rectângulo $ABCD$, $\measuredangle BAC = 53°$. Determine a medida do $\measuredangle CBD$.



Reparando o rectângulo, é possível notar que $\measuredangle BAC + \measuredangle CAD = 90°$.

Assim, $\measuredangle CAD = 90° - \measuredangle BAC \Leftrightarrow \measuredangle CAD = 90° - 53° \Leftrightarrow \measuredangle CAD = 37°$.

Sendo $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$, então $\measuredangle CBD = 37°$.

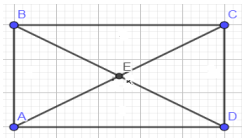
Tem alguma dúvida? Acredito que não!
Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Venda proibida

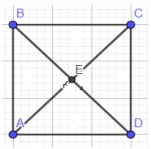
Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios propostos a seguir. Bom trabalho!!

Exercícios

1. Construa um losango cujas diagonais medem 3 cm e 5 cm.
2. Sendo E o ponto de encontro das diagonais do rectângulo $ABCD$ e $\measuredangle BEC = 109°$, determine a medida do $\measuredangle CBD$.



3. Num trapézio escaleno, dois ângulos consecutivos medem 70° e 110°. Quanto mede cada um dos outros ângulos?
4. Num trapézio isósceles os ângulos adjacentes a um dos lados opostos são representados por $2x + 15°$ e $3x - 35°$. Determine a medida desses ângulos.
5. Determine as medidas dos ângulos $\measuredangle CAD$ e $\measuredangle AEo$ no quadrado da figura ao lado.



6. Construir um paralelogramo em que as medidas dos lados são 5 cm e 7 cm e um dos ângulos é 120°.

A lição termina aqui. Apresente o respectivo resumo, no caderno.

Resumo da Lição

Dos diferentes quadriláteros convexos salienta-se trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado.

Trapézio é o quadrilátero em que apenas dois lados são paralelos.

Um trapézio pode ser **escaleno**, **isósceles** ou **rectângulo**.

Paralelogramo é o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Losango é o quadrilátero cujos lados são todos iguais, mas os lados consecutivos não são perpendiculares.

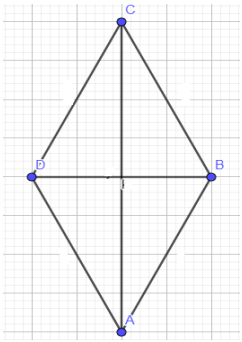
Rectângulo é o quadrilátero cujos lados consecutivos são perpendiculares.

Quadrado é o rectângulo cujos lados são todos iguais.

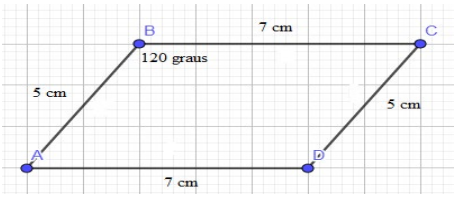
Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na Chave de Correcção.

Venda proibida

Chave de Correcção

1. 

2. $\sphericalangle CBD = 35{,}5°$
3. Os ângulos medem 70° e 110°.
4. A medida dos ângulos é 55° e 95°.
5. $\sphericalangle CAD = 45°$ e $\sphericalangle AED = 90°$.



Venda proibida

LIÇÃO Nº 8: Isometrias: Rotação, Reflexão e translação

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender o movimento de figuras geométricas no plano. Vai aprender a realizar movimentos de reflexão, de rotação e de translação de figuras geométricas dentro de determinadas condições.

Bom estudo!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar figuras transladadas;
- Distinguir as transformações isométricas das não isométricas;
- Realizar movimentos dentro de determinadas condições.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar durante 90 minutos.

Movimento no plano

Toda a figura geométrica pode sofrer uma transformação geométrica. Isto é, a partir de uma figura geométrica original pode se formar outra geometricamente igual ou semelhante.

Há dois tipos de transformações geométricas. As transformações isométricas e as Transformações não isométricas.

A transformação isométrica é aquela em que a figura inicial e o seu transformado são congruentes, isto é, as duas figuras têm as mesmas dimensões. ISO – significa Igual e METRIA – significa medida.

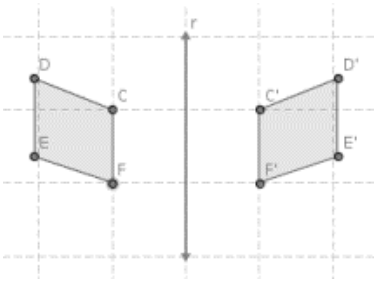
A transformação não isométrica é aquela em que a figura transformada e a inicial não são congruentes, isto é, as duas figuras são apenas semelhantes, mas não têm as mesmas dimensões.

Percebeu a diferença entre os dois tipos de transformações geométricas? Acredito que sim.

Mas, se ainda não percebeu não se preocupe. Pois há muita coisa por aprender nesta lição que vai facilitar a sua compreensão.

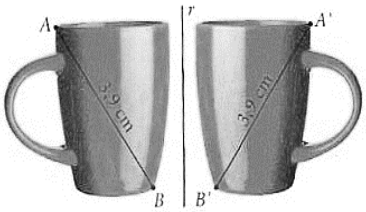
Reflexão

No plano, uma reflexão em relação a um eixo de reflexão r é uma transformação geométrica onde os pontos de uma figura são transformados noutros à mesma distância dessa recta, ficando esta perpendicular ao segmento de recta por eles formado.



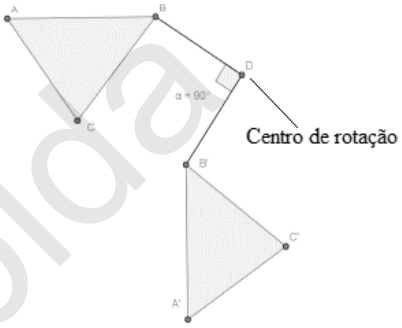
Venda proibida

Propriedades da reflexão:



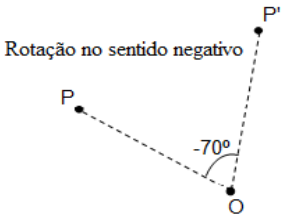
- A figura original e o seu transformado são geometricamente iguais;
- Se dobrarmos a folha pelo eixo de reflexão r, a figura original e a sua imagem sobrepõem-se ponto por ponto;
- Um ponto e o seu transformado estão à mesma distância do eixo de reflexão;
- A reflexão muda o sentido dos ângulos, mas mantém a sua amplitude.

Rotação



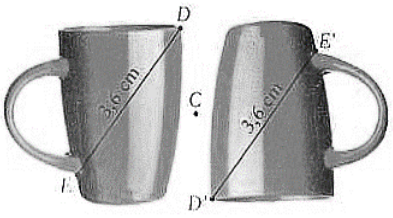
Como deve recordar rotação é o movimento que uma figura realiza, de tal forma que sem sair da origem, vai rodando em diferentes graus definindo a sua posição final. Numa rotação todos pontos de uma figura rodam à volta de um ponto (centro de rotação), num determinado sentido (positivo ou negativo) e segundo um determinado ângulo de rotação.

O **sentido positivo** é ao contrário do sentido do movimento dos ponteiros de um relógio, enquanto que o **sentido negativo** é igual ao sentido do movimento dos ponteiros de um relógio.

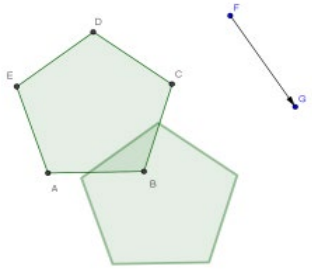


Propriedades da rotação:

- A figura original e o seu transformado são geometricamente iguais;
- Um ponto e o seu transformado estão à mesma distância do centro de rotação;
- Um ponto da figura pertencente ao centro de rotação é transformado em si próprio.

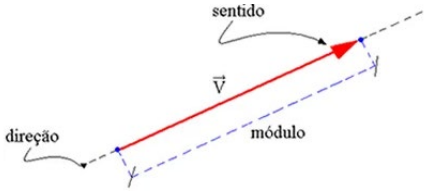


Translação



Numa translação todos os pontos de uma figura sofrem o mesmo deslocamento, segundo um vector com um determinado comprimento, direcção e sentido.

Um **vector,** no plano, é uma classe de objectos matemáticos (segmentos) com a mesma

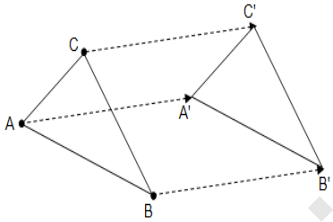


Venda proibida

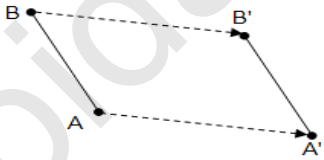
direcção, mesmo sentido e mesmo módulo (intensidade).

Propriedades da translação:

- A figura original e o seu transformado são geometricamente iguais.
- Todos os pontos sofrem o mesmo deslocamento.



- Um segmento de recta é transformado num segmento de recta paralelo.

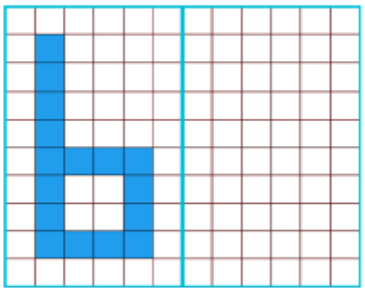


Tem alguma dúvida? Se tiver, registe-a para depois apresenta-la ao seu tutor.

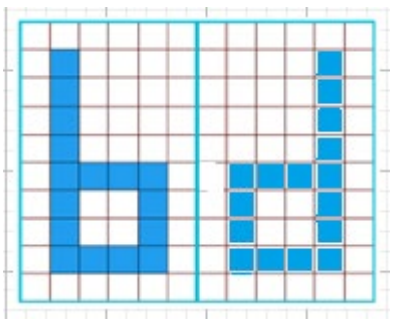
Acompanhe, a seguir, a resolução de actividades, como forma de se dissipar qualquer dúvida em relação a matéria em estudo.

Actividades

1. Desenhe a reflexão da figura dada, atendendo o eixo de simetria.

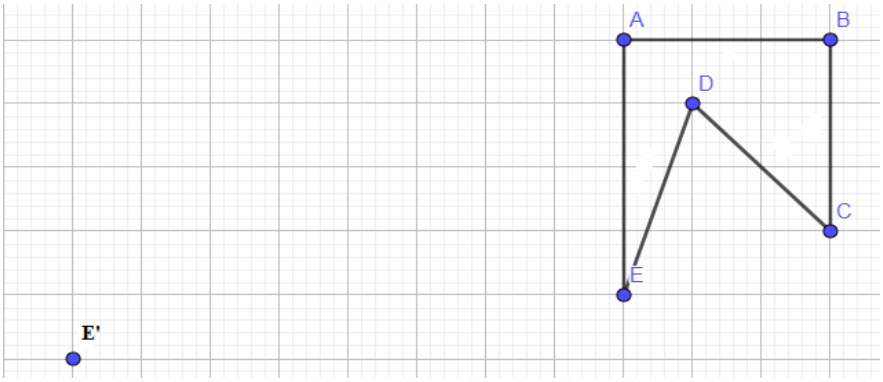


Para desenhar a reflexão da figura, é preciso lembrar que a figura original e o seu transformado são geometricamente iguais, que um ponto e o seu transformado estão à mesma distância do eixo de reflexão e que a reflexão muda o sentido dos ângulos, mas mantém a sua amplitude. Portanto, a reflexão da figura fica da seguinte maneira:



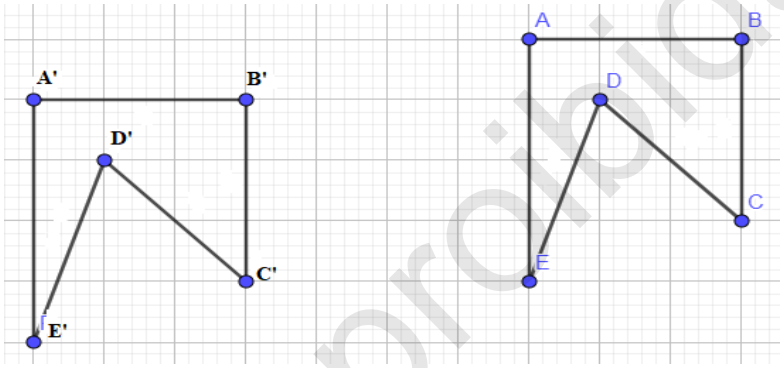
Venda proibida

2. Considere a figura:



Pela translação que transforma o ponto E no ponto E', obtenha a imagem do polígono $[ABCDE]$.

Para obter a imagem do polígono $[ABCDE]$ é preciso deslocar cada ponto do polígono obedecendo a lógica de translação do ponto E.



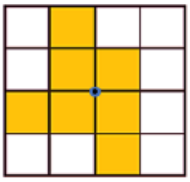
Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

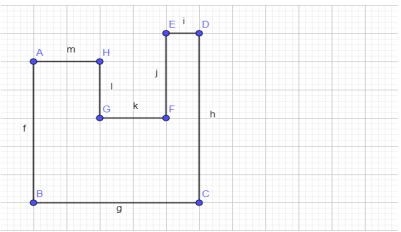
Agora chegou a momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios propostos, no caderno. Bom trabalho!

Exercícios

1. Pinte mais um quadrado de modo a obter uma figura que possua simetria de rotação.

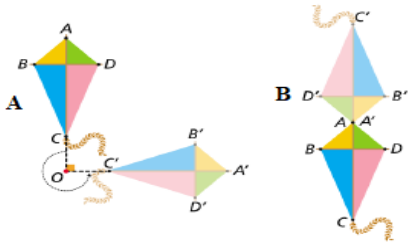


2. Desenhe a imagem da figura seguinte pela reflexão central do eixo CD.

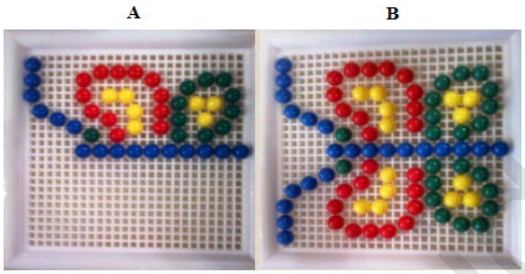


Venda proibida

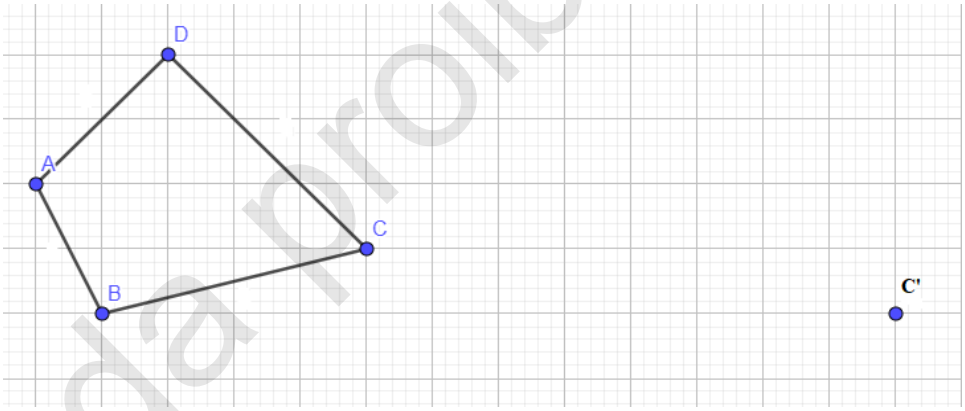
3. Observe as figuras e indique, para cada uma, o centro, o sentido e a amplitude de cada rotação.



4. Que tipo de transformação geométrica ocorreu na figura A para se obter a figura B?



5. Considere a figura:



Pela translação que transforma o ponto C no ponto C', obtenha a imagem do polígono $ABCD$.

A lição termina aqui. Apresente o respectivo resumo, no caderno.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição aprendeu que toda a figura geométrica pode sofrer uma transformação geométrica. Aprendeu também que há dois tipos de transformações geométricas, as isométricas e as não isométricas.

A transformação isométrica é aquela em que a figura inicial e o seu transformado são congruentes, isto é, as duas figuras têm as mesmas dimensões, enquanto a transformação não isométrica é aquela em que a figura transformada e a inicial não são congruentes, isto é, as duas figuras são semelhantes, mas não têm as mesmas dimensões.

A **reflexão**, a **rotação** e a **translação** são isometrias.

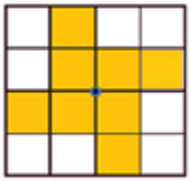
No plano, uma reflexão em relação a um eixo de reflexão r é uma transformação geométrica onde os pontos de uma figura são transformados noutros à mesma distância dessa recta, ficando esta perpendicular ao segmento de recta por eles formado.

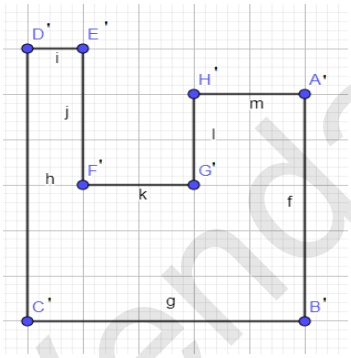
Numa rotação todos pontos de uma figura rodam à volta de um ponto (centro de rotação), num determinado sentido (positivo ou negativo) e segundo um determinado ângulo de rotação.

Numa translação todos os pontos de uma figura sofrem o mesmo deslocamento, segundo um vector com um determinado comprimento, direcção e sentido.

Compare os seus resultados com os que estão na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

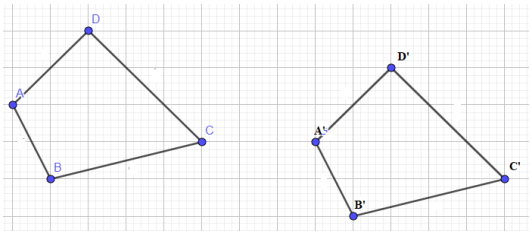
1. 

2. 

3. A – centro: O, sentido: positivo, amplitude: 270º

   B – centro: A, sentido: positivo, amplitude: 180º

4. A transformação geométrica que ocorreu na figura A para se obter a figura B é a reflexão.

5. 

Venda proibida

LIÇÃO Nº 9: Simetria

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender a simetria. Vai aprender a identificar a simetria em corpos e figuras geométricas.

Bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar a simetria em corpos e.
- Identificar a simetria em figuras geométricas.

Para a melhor compreensão desta lição precisa de estudar durante 90 minutos.

Simetria

O que é simetria? Para que serve a simetria?

Certamente que se faz estas e outras perguntas. O que é normal.

Simetria é a propriedade geométrica de transformar ou mover uma figura sem alterar sua forma original. Portanto, na matemática, diz-se que uma figura é simétrica, quando ela pode ser dividida em duas partes exactamente iguais, girada ou deslocada em relação a um ponto e continuar com sua forma original.

O termo simetria vem do grego *syn* (junto) + *metron* (medida). Sendo assim, se um elemento é separado em duas partes iguais, e, ambas, quando sobrepostas, têm o mesmo tamanho, ele é considerado simétrico.

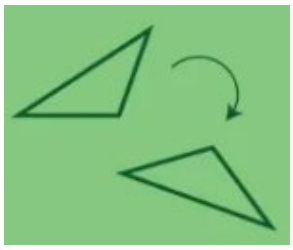
Na geometria, um objecto apresenta simetria quando parece o mesmo depois de uma transformação, como reflexão ou rotação.

Deu para perceber o conceito de simetria? Acredito que sim. Caso ainda não tenha percebido, volte a fazer, cuidadosamente, uma nova leitura, para continuar a estudar a lição.

Tipos de simetria

Na geometria, dentre os principais tipos de simetria, destacam-se três: **a simetria de reflexão, de rotação e de translação**.

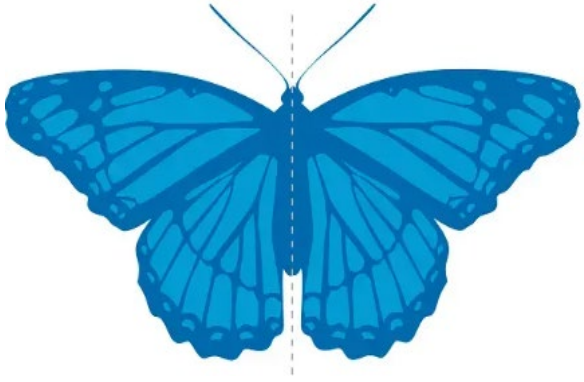
Venda proibida

Simetria de reflexão	Simetria de rotação	Simetria de translação
É caracterizada pela capacidade de uma figura ser dividida em duas partes exactamente iguais.	É caracterizada pela rotação que uma figura faz em relação a um determinado ponto.	É caracterizada pelo deslocamento da figura original para qualquer direcção, sem modificação de sua forma e proporção originais.
		

Figuras com eixo de simetria

Quando uma imagem pode ser dividida em duas partes exactamente iguais por meio de uma recta, dizemos que essa figura possui simetria de reflexão em relação a essa recta. Nesse caso, a recta ou o eixo operam como se fossem um espelho que "reflecte" uma das partes da imagem em torno dele. Essa recta recebe o nome de **eixo de simetria**.

A seguir apresentamos algumas imagens e figuras simétricas com respectivos eixos de simetria.

Simetria na natureza (cisne)	Simetria na natureza (coruja)
Figura simétrica (borboleta)	**Figura simétrica (elefante)**
	

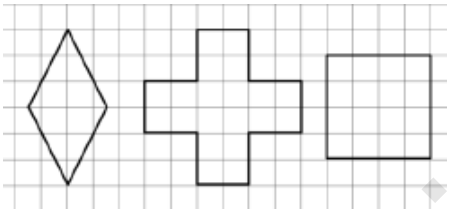
versão proibida

Percebeu o que são figuras com eixo de simetria? Acredito que sim. Percebeu que uma figura com eixo de simetria pode ser dividida em duas partes exactamente iguais por meio de uma recta.

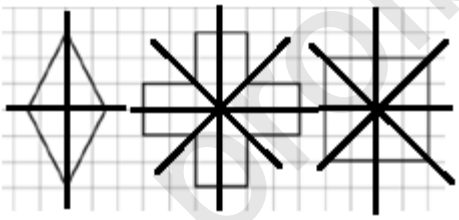
Acompanhe, a seguir, a resolução de actividade, como forma de se dissipar qualquer dúvida em relação a matéria em estudo.

Actividade

Trace todos os eixos de simetria de cada uma das figuras seguintes.



As figuras acima apresentadas são regulares, e os seus eixos de simetrias são rectas que as dividem ao meio. Portanto, uma figura pode ter dois ou mais eixos de simetria, conforme a figura abaixo:



Mas, como se constrói uma figura simétrica?

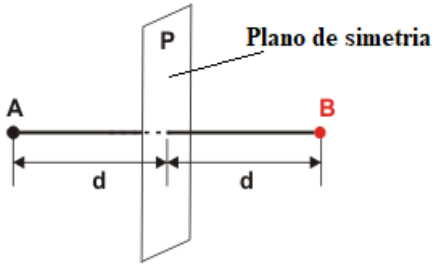
Continue a estudar a lição e vai aprender a construção de pontos simétricos, segmentos simétricos e figuras simétricas.

Venda proibida

Construção de ponto simétrico, segmentos simétricos e figuras simétricas

Ponto simétrico

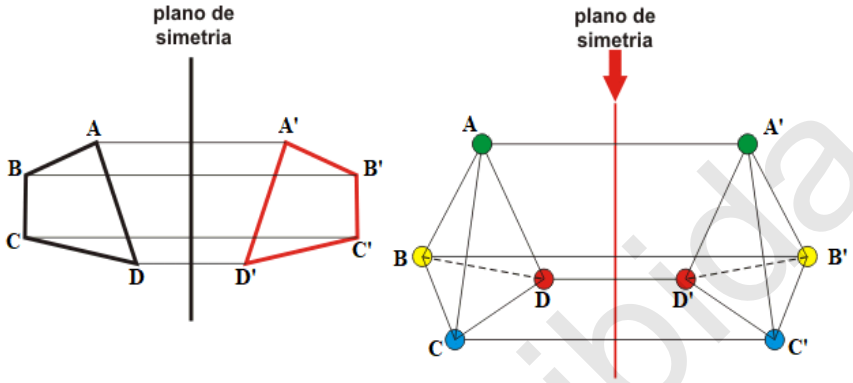
Para construirmos um ponto simétrico do ponto *A*, basta termos um plano de simetria e projectarmos o ponto *B* do lado oposto ao de A, à uma distância igual do ponto A ao plano P. Isto é, dois pontos *A* e *B* são simétricos em relação a um plano *P*, quando são equidistantes de *P* e estão situados sobre a mesma perpendicular à *P*.



Plano de simetria é um plano em relação ao qual dois pontos simétricos, A e B, são equidistantes.

Segmentos simétricos e figuras simétricas

Para construir um segmento simétrico ou uma figura simétrica, basta projectarmos os pontos essenciais que compõem o segmento ou a figura. Lembre-se que cada ponto e o seu simétrico devem ser equidistantes em relação ao plano de simetria.

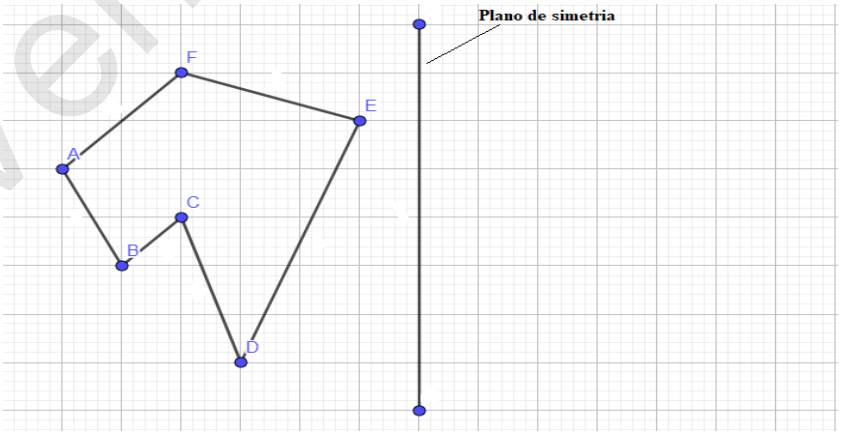


Percebeu como se constrói um ponto simétrico, um segmento simétrico ou uma figura simétrica? Acreditamos que sim.

A seguir, resolva a actividade como forma de verificar o nível de compreensão da matéria.

Actividades

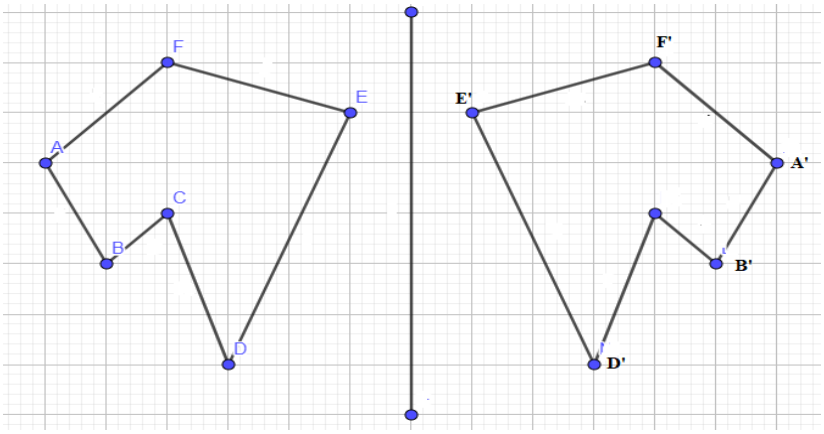
Construa a figura simétrica de $ABCDEF$ em relação ao plano de simetria.



Fácil! Não é?

Pois é. Descobriu que para construir a figura, basta projectar os pontos essenciais que compõem a figura, e cada ponto e o seu simétrico devem ser equidistantes em relação ao plano de simetria.

Venda proibida

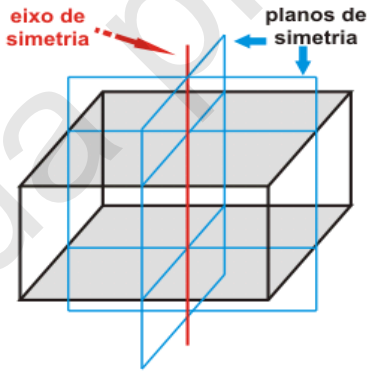


Um outro conceito que vale a pena estudar nesta lição é o eixo de simetria. A seguir, vamos estudar os eixos de simetrias em polígonos regulares.

Eixos de simetria em polígonos regulares

Um eixo de simetria em polígono regular é a recta resultante da intersecção de dois planos de simetria do polígono.

Por exemplo, o paralelepípedo da figura de bases cinzas possui um eixo de simetria resultante da intersecção de dois planos de simetria.



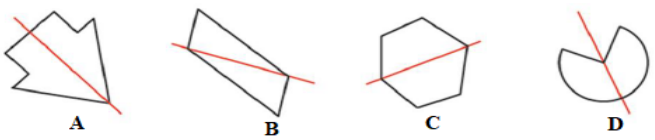
Tem alguma dúvida? Acreditamos que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas, e até mesmo contactar o seu tutor.

Resolva os exercícios propostos, no caderno, e caso tenha alguma dificuldade recorra aos apontamentos e à actividade resolvida. Bom trabalho!

Exercícios

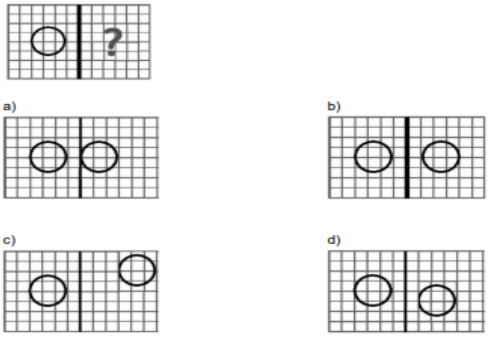
1. Indique a figura cujo o eixo traçado não é um eixo de simetria de reflexão.



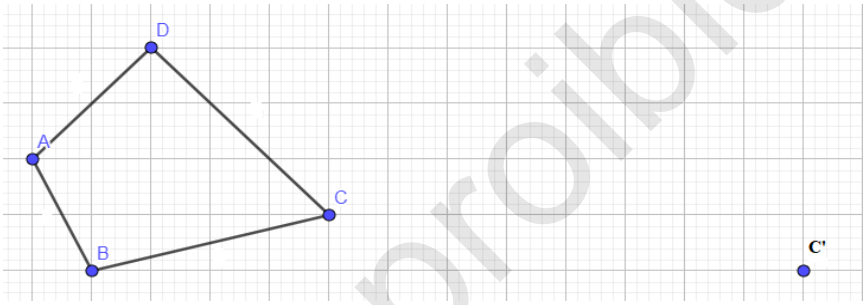
Venda proibida

2. Quantos eixos de simetria existem na flor abaixo?

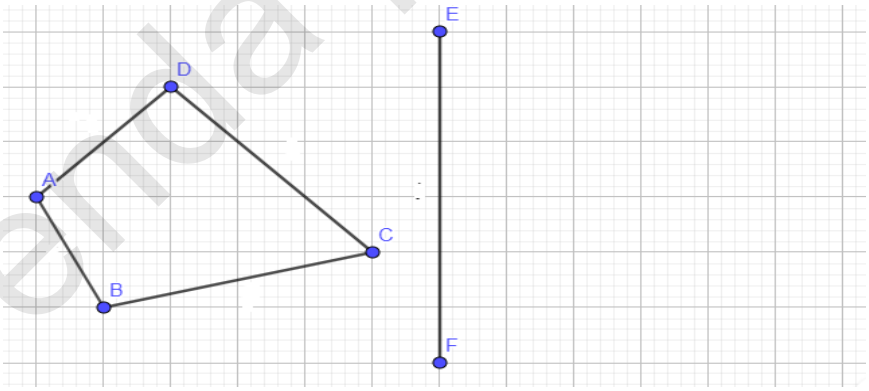
3. Qual das figuras abaixo representa o eixo de simetria da circunferência em relação ao eixo?



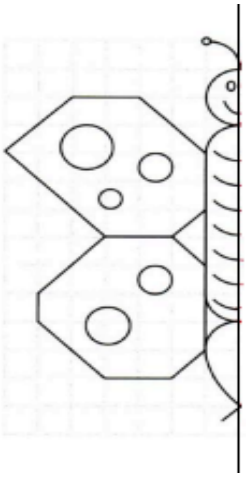
4. Pela translação, obtenha a figura simétrica do polígono $ABCD$.



5. Obtenha a figura simétrica do polígono $ABCD$, em relação ao eixo EF.



6. Complete o desenho de acordo com o eixo de simetria:



Venda proibida

Confira o resumo a seguir e anote no seu caderno para a sua recapitulação.

Resumo da Lição

Simetria é a propriedade geométrica de transformar ou mover uma figura sem alterar sua forma original. O termo simetria vem do grego *syn* (junto) + *metron* (medida).

Na geometria, um objecto apresenta simetria quando parece o mesmo depois de uma transformação, como reflexão ou rotação.

Na geometria, existem 3 principais tipos de simetria, nomeadamente: **a simetria de reflexão, de rotação e de translação**.

Uma figura com eixo de simetria pode ser dividida em duas partes exactamente iguais por meio de uma recta.

Para construirmos um ponto simétrico do ponto *A*, basta termos um plano de simetria e projectarmos o ponto *B* do lado oposto ao de A, à uma distância igual do ponto A ao plano P.

Para construir um segmento simétrico ou uma figura simétrica, basta projectarmos os pontos essenciais que compõem o segmento ou a figura.

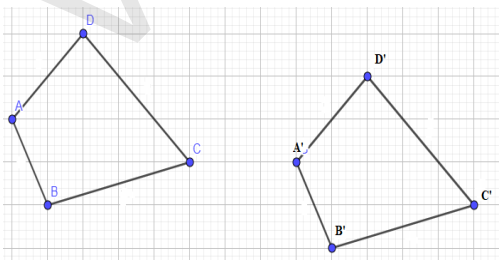
Um eixo de simetria em polígono regular é a recta resultante da intersecção de dois planos de simetria do polígono.

Agora compare os seus resultados com a Chave de Correcção.

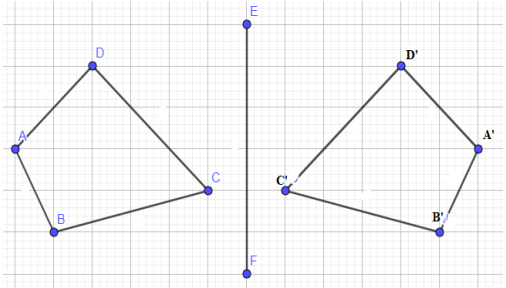
Chave de Correcção

1. B 2. Existem 5 eixos de simetria 3. b)

4.

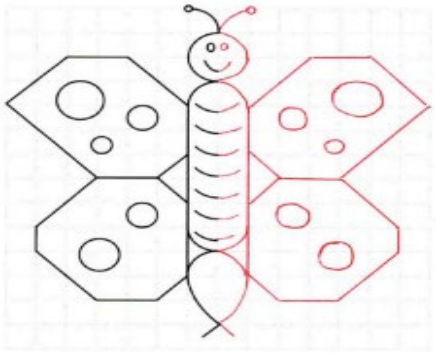


5.



Venda proibida

6.



Venda proibida

LIÇÃO Nº 10: Rotação

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido a simetria como um dos movimentos no plano, nesta lição vai aprender a rotação.

Bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar os elementos principais que determinam a rotação;
- Analisar diferentes elementos da vida, identificando rotações.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Rotação: elementos e propriedade

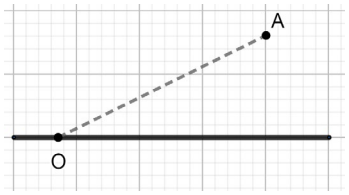
Caro aluno, para abordar este tema, vamos primeiro falar um pouco do movimento dos ponteiros de um relógio. Observe a imagem a seguir:

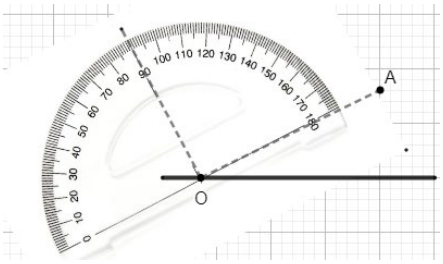
As setas indicam dois sentidos que os ponteiros do relógio podem tomar.

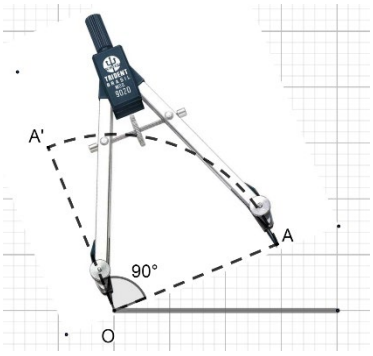
Os objectos que fazem uma rotação, podem girar no sentido dos ponteiros de um relógio ou no sentido contrário ao movimento desses ponteiros.

De certeza que já viu muitos objectos a girarem nos dois sentidos. Por exemplo o abrir e fechar de uma torneira, o movimento das rodas de um carro. Pense noutros exemplos.

Observe o movimento do ponto A.







Diz-se que:

Venda proibida

O ponto **A′** é a imagem do ponto **A**, na rotação de centro **O** e o ângulo 90°, no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

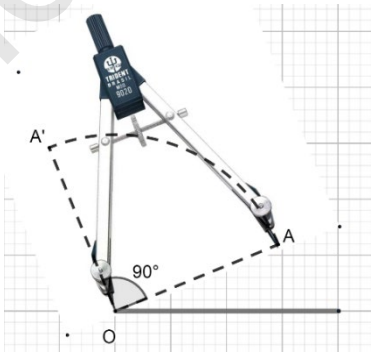
A imagem do ponto O é o próprio ponto O, centro de rotação. Uma rotação fica definida se conhecermos o seu centro, a amplitude e o sentido.

Definição1: Uma rotação é o movimento de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto.

Definição2: Rotação de centro em **O** e amplitude α (Ro, α), é a transformação geométrica que ao ponto **O** faz corresponder o próprio ponto **O** e a cada ponto **P**, diferente de **O**, faz corresponder um ponto ***P'***, a que se chama transformado de **P**, tal que:

A quantidade de rotação é descrita em termos de graus. Se os graus forem positivos, a rotação é realizada no sentido anti-horário, e se forem negativos, a rotação é realizada no sentido horário.

A notação matemática para a rotação é geralmente escrita assim: R (centro, rotação) , onde o centro é o ponto de rotação e a rotação é dada em graus.



Exemplo1: (Ro, 90°)

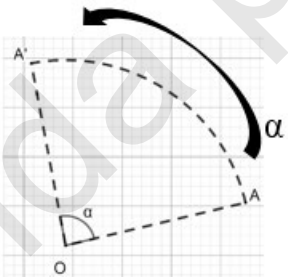
Neste exemplo temos:

A imagem do ponto **A** da rotação de centro **O** ou seja (Ro, 90°) é o ponto A', tal que $AO = AO'$ e $A\widehat{O}A' = 90°$.

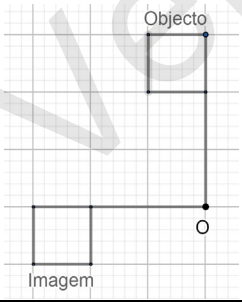
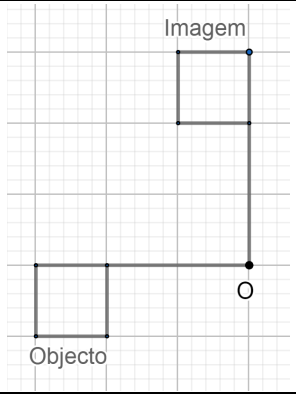
A imagem de **O** é **O.**

Em geral teríamos:

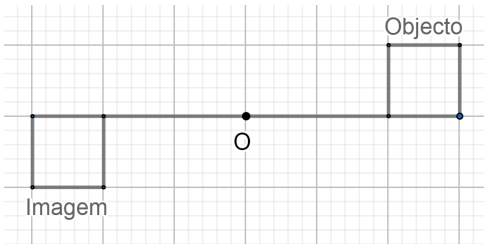
(Ro, α)



Exemplo 2:

	Rotação de 90° no sentido anti-horário (Ro, +90°)
	Rotação de 90° no sentido horário (Ro, −90°)

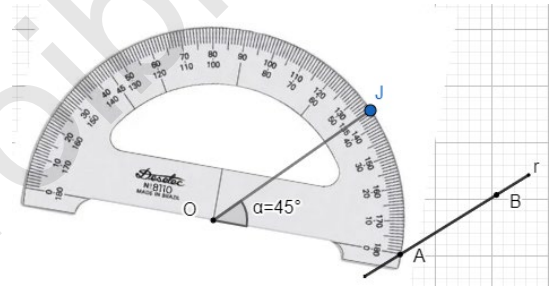
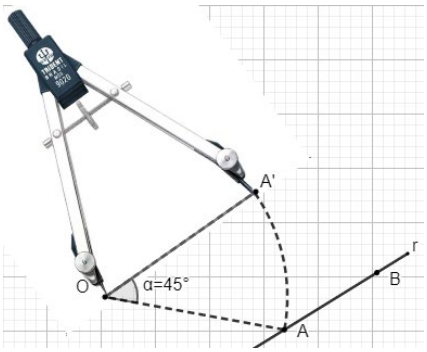
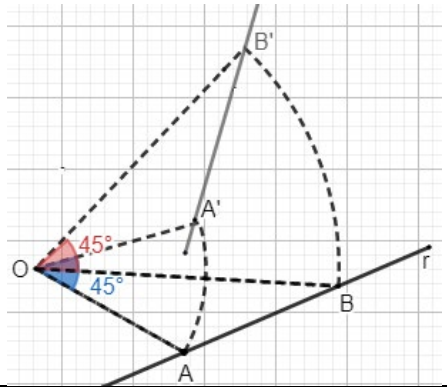
Venda proibida

	Rotação de 180° no sentido anti-horário (Ro, +180°)

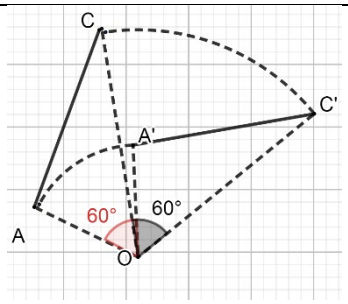
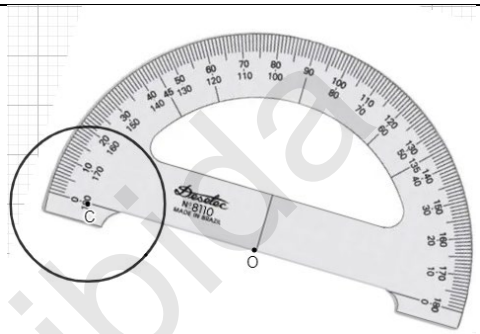
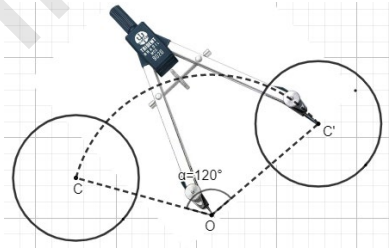
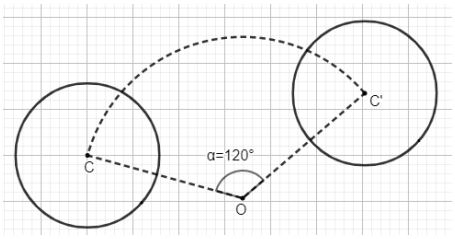
Preste atenção na seguinte actividade:

Actividade

Com a rotação de centro O e angulo α , construa:

Instruções	Resultado
1. As imagens de dois pontos da recta r, A e B, sabendo que $\alpha = 45°$ no sentido anti-horário. Imagem de **A**: **Primeiro passo:** Coloque o transferidor com o centro em **O** e o zero alinhado com o ponto **A** e marque o ângulo $\alpha = 45°$; **Segundo passo**: Com o compasso com centro em O e raio [**AO**], desenhe o arco $\widehat{\mathbf{AA}'}$ Proceda do mesmo modo para o ponto **B**.	  

Venda proibida

2. As imagens dos extremos do segmento AC através da $(Ro, 60°)$ no sentido horário. Para esta alínea proceda do mesmo modo com a alínea anterior, mas tenha em conta o sentido, pois diferentemente da alínea a) que tinha o sentido anti-horário nesta alínea o sentido é horário.	
3. A imagem do centro do círculo cujo raio é o mesmo, considerando uma rotação de raio $120°$ no sentido horário, com centro em O exterior as duas circunferências. **Primeiro passo:** Coloque o transferidor com o centro em **O** e o zero alinhado com o ponto **C** para encontrar o ângulo de $120°$. **Segundo passo**: Com o compasso com centro em O e raio [**OC**], desenhe o arco $\widehat{\mathbf{OC}'}$ Por fim a circunferência de centro C'	  

Como pode ver, numa rotação:

- A imagem de uma recta é uma recta
- A imagem de um segmento de recta é um segmento de recta;
- A imagem de um círculo é um círculo;
- A imagem de um ângulo é um ângulo com a mesma amplitude;
- A imagem de uma figura é uma figura com a mesma área.

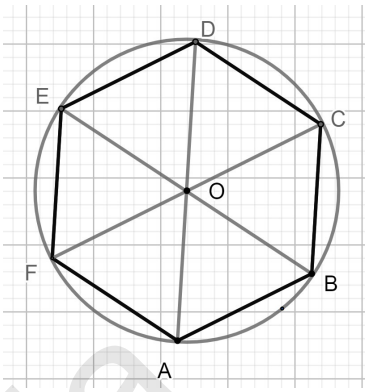
A imagem de uma figura, por rotação, é uma outra geometricamente igual à figura inicial. Numa rotação mantêm-se os comprimentos e as amplitudes dos ângulos.

Caro aluno, chegamos ao fim da nossa lição, por isso, dedique um tempo para verificar o seu nível de compreensão da matéria, resolvendo os exercícios que se seguem.

Venda proibida

Exercícios

Copie para o seu caderno de exercícios e responda às questões colocadas.



1. Na figura está representado um hexágono regular e as suas diagonais. Os triângulos definidos por essas diagonais, são triângulos equiláteros.

a) Qual a amplitude do ângulo AOB?

b) Qual é a imagem do ponto A na rotação de centro O e amplitude:

b1) + 60º b2) −120º b3) + 240º

c) Qual é a amplitude da rotação em torno do ponto O e sentido positivo que transforma:

c1) O ponto D no ponto B? c2) O ponto E no ponto F?

d) Qual é a imagem do triângulo [CDO] na rotação de centro O e amplitude 120º?

2. [ABCD] é um quadrado. Usando o ponto **P** (ponto de intersecção das suas diagonais) como centro de rotação, quantos graus deve girar o quadrado para que a imagem do ponto **A** ocupe a mesma posição do ponto **B**.

Registe no seu caderno o resumo a seguir.

Resumo da Lição

Nesta lição aprendeu que a rotação é uma transformação geométrica que envolve o movimento de uma figura em um certo número de graus em torno de um ponto fixo, chamado centro de rotação. Aprendeu também que se os graus forem positivos, a rotação é realizada no sentido anti-horário, e se forem negativos, a rotação é realizada no sentido horário.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1.	a) 60º	b)	b1) B b2) E b3) E	c)	c1) + 240º b2) + 60º
d)	$\Delta[EFO]$	2.	(Ro, +90°) *ou* (Ro, −270°)		

Venda proibida

LIÇÃO Nº 11: Cubos e raízes

Introdução

Caro aluno, depois de termos aprendido na aula anterior sobre a rotação, seus elementos e propriedades, nesta lição iremos aprender o cálculo de cubos e de raízes cúbicas de números perfeitos. Tenha um óptimo trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular cubos de números perfeitos;
- Calcular raízes cúbicas de números perfeitos

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Radiciação

Cálculo de cubos e raízes cúbicas de cubos perfeitos

Caro aluno, recorda-se que nas lições anteriores definimos o conceito de potência de expoente natural como sendo uma multiplicação sucessiva de factores iguais. Se o expoente de potência for 3, logo, a base da potência repete-se três vezes:

Exemplo:

a) Consideremos o cubo com aresta de 2cm, qual será o seu volume?
   Observando os dados apresentados, o volume será de:
   Fórmula do cálculo do volume do cubo: $\boldsymbol{V = a^3}$ onde $\boldsymbol{a}$ é aresta.

   Substituindo os dados na fórmula, teremos: V= $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8cm^3$

b) $6^3 = 6 \times 6 \times 6$

c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

Assim sendo: Podemos dizer que o cubo de um número **a** é o produto de três factores iguais a **a**

$\boldsymbol{a^3 = a \times a \times a, \forall a \in \mathbb{R}}$

Com esta definição, podemos verificar que:

- Em caso de a base for positiva, o seu cubo é positivo, como por exemplo:

Venda proibida

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125}$

- Em casos de base for negativa, o seu cubo é negativo como por exemplo:

$\left(-\frac{2}{6}\right)^3 = \left(-\frac{2}{6}\right) \times \left(-\frac{2}{6}\right) \times \left(-\frac{2}{6}\right) = -\frac{8}{216}$

- Se a base for nula, o seu cubo também será nulo como por exemplo:

$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$

Posto isto, vamos resolver o problema seguinte:

Qual é o cumprimento dum cubo cuja a aresta tem $216cm^3$ de volume?

Como Resolver este problema? Muito fácil! Muita atenção para o efeito.

Resolução: Sabemos que o volume do cubo é dado pela seguinte fórmula: V= a^3, Onde V é o volume e **a** é a medida da aresta. Para se saber o comprimento da aresta, precisamos de encontrar um número que elevado a 3 dê 216, ou por outra, calcular a **raiz cúbica** de 216.

Veja que foi fácil descobrir que o número procurado é o 6, pois 6^3= 216. Simbolicamente teremos, $\sqrt[3]{216}$ =6, porque $6 \times 6 \times 6 = 6^3$= 216. Desta forma podemos afirmar que a aresta do cubo tem 6cm.

Vejamos os seguintes exemplo:

- $\sqrt[3]{8}$ = 2, Porque 2^3= 8
- $\sqrt[3]{-8} = -2\ porque\ (-2)^3$= -8

  Assim sendo, $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3$= a; $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Desta maneira, podemos dizer que:

- A raiz cúbica de um número positivo é positiva;
- A raiz cúbica de um número negativo é negativa;
- A raiz cúbica de zero é zero.

Assim, fica claro que a partir da definição da raiz cúbica podemos concluir que:

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3$= **a**

- $\sqrt[3]{216^3} = 216$
- $\left(\sqrt[3]{-512}\right)^3 = \sqrt[3]{(-512)^3} = -512$

É chegado o momento de testar os conhecimentos adquiridos. Resolva os exercícios a seguir:

Venda proibida

Exercícios

1. Calcule:

$a)\ 6^3$; b) -6^3 ; c)10^3 ; d) 100^3; e) $\left(\frac{4}{9}\right)^3$; $f)\ \left(-\frac{2}{6}\right)^3$

2. Calcule o comprimento da aresta de um cubo cujo volume é de:

a) $27cm^3$; b) $125cm^3$; c) $512cm^3$

Chegamos ao fim desta lição, faca o seu resumo no caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição sobre cubos e raízes, foi possível compreendermos que:

- O cubo de um número $\boldsymbol{a}$ é o produto de três factores iguais a $\boldsymbol{a}$**;**
- A raiz cúbica de um número positivo é sempre positivo;
- A raiz cúbica de um número negativo é sempre negativa;
- A raiz cúbica de zero é zero.

Agora, compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) $6^3 = 6\times 6 \times 6 = 216$;

   b) $-6^3 = (-6)\times(-6)\times(-6) = -216$

   c)$100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000\ 000$

   d) $\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \left(\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{64}{729}$

   e) $\left(-\frac{2}{6}\right)^3 = \left(-\frac{2}{6}\right)\times\left(-\frac{2}{6}\right)\times\left(-\frac{2}{6}\right) = -\frac{8}{216}$

2. a) $27cm^3 = 3cm \times 3cm \times 3 = 3^3$ → O comprimento da aresta de um cubo com $27cm^3$ é de 3cm;

b) $125cm^3 = 5cm \times 5cm \times 5cm = 5^3$ → O comprimento da aresta de um cubo com $125cm^3$ é de 5cm;

c) $512cm^3 = 8cm \times 8cm \times 8cm = 8^3$ → O comprimento da aresta de um cubo com $512cm^3$é de 8cm.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 12: Potência de expoente fraccionário

Introdução

Caro aluno!

Nesta lição vamos apreender o que é uma potência de expoente fraccionário, os passos necessários para transformar uma potência com expoente fraccionário em raiz, e como calculá-la, tendo em conta as propriedades da potenciação já apreendidas nas classes anteriores.

Bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular potências de expoente fraccionário.

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Potência de expoente fraccionário

Caro aluno, antes de aprofundarmos a nossa lição é fundamental definirmos potência de expoente fraccionário. Uma potência com expoente fraccionário ou potência fraccionária é aquela que possui uma fracção como expoente e um número real como base, onde o expoente é um número racional, de numerador **n** e denominador **d.**

$b^{\frac{n}{d}}$ Onde o expoente é um número racional, de numerador **n** e denominador **d e b** é um número real. Com base **b** e expoente $\frac{3}{2}$ é fracionária pois o seu expoente é uma fracção. Simbolicamente podemos representá-la da seguinte forma: $b^{\frac{3}{2}}$

Exemplo:

- $3^{\frac{1}{2}}$
- $(-2)^{\frac{3}{2}}$
- $(\sqrt{4})^{\frac{1}{2}}$

Como calcular uma potência fraccionária?

Para resolver uma potência com expoente fraccionário, utilizamos a operação inversa, a radiciação.

O que significa transformar a potência fraccionária em uma raiz?

Observe que temos a potência $b^{\frac{n}{d}}$ e de seguida vamos transformar na forma de raiz, onde teremos: $\sqrt[d]{b^n}$. Muito bem!

Venda proibida

Para transformar uma potência com expoente fraccionário em raiz, seguimos os seguintes passos:

- A base da potência transforma-se na base do radicando que é o número da raiz;
- O numerador da fracção se transforma no expoente do radicando;
- O denominador se transforma no índice da raiz.

Exemplo:

1) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$

2) $7^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^{-5}}$

Cálculo das potências com expoentes fraccionários

Uma vez transformada a potência em raiz, é fácil resolvê-la. Veja os exemplos abaixo

1) $4^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{4^4} = \sqrt[2]{256} = 16$

2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$

Caro aluno, temos de ter em mente que as propriedades da potenciação já aprendidas nas classes anteriores são válidas nas potências com expoente fraccionário. Ora vejamos:

1) $5^{\frac{3}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} = 5^{\left(\frac{3+2}{7}\right)} = \sqrt[7]{5^5} = \sqrt[7]{3125}$

2) $5^{\frac{3}{7}} \div 5^{\frac{2}{7}} = 5^{\left(\frac{3-2}{7}\right)} = \sqrt[7]{5}$

3) $2^{\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{3}{5}} = (2 \times 3)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{6^3} = \sqrt[7]{216}$

Muito bem! Depois dum estudo cuidadoso desta lição, é chegado o momento da consolidação do aprendido, resolvendo exercícios que lhe são apresentados abaixo.

Exercícios

1. Escreva na forma de radical
   a) $16^{\frac{2}{4}}$; b) $5^{\frac{1}{4}}$

2. Escreva na forma de potência com o expoente fraccionário
   a) $\sqrt[4]{7^3}$; b) $\sqrt[3]{9^4} =$

3. Resolva:
   a) $4^{\frac{5}{8}} \div 4^{\frac{3}{8}} =$
   b) $4^{\frac{3}{7}} \times 6^{\frac{3}{7}} =$

Confira a seguir o resumo desta lição.

Venda proibida

Resumo da Lição

Aprendeu potência de expoentes fraccionário, onde se definiu a potência de expoente fraccionário como sendo, aquela cujo expoente é uma fracção e cuja base é um número real, onde o expoente é um número racional, de numerador **n** e denominador **d.** Também aprendemos **que** para resolver uma potência com expoente fraccionário, utilizamos a operação inversa, a radiciação. Para transformar uma potência com expoente fraccionário em raiz, seguimos os seguintes passos:

- A base da potência se transforma na base do radicando que é o número da raiz;
- O numerador da fracção se transforma no expoente do radicando;
- O denominador se transforma no índice da raiz.

Confira a seguir a Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) $\sqrt[4]{16^2}$ b) $\sqrt[4]{5^1}$
2. a) $\sqrt[4]{343}$ b) $\sqrt[3]{6561}$
3. a) $4^{\frac{2}{8}}$ b) $24^{\frac{3}{7}}$

Parabéns! Respondeu acertadamente aos exercícios de consolidação do conteúdo que aprendeu nesta lição, em casos de dúvida volte a ler a lição com atenção até perceber ou peça ajuda aos colegas, família, tutor ou ao gestor do seu CAA para o esclarecimento da dúvida em causa.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 13: Passagem de um factor para dentro ou para fora do radical

Introdução

Caro aluno, nesta lição falaremos sobre passagem de um factor para dentro ou fora do radical, nela teremos a oportunidade de aprender, para além da passagem de um factor para dentro ou para fora do radical a simplificação de radicais.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Passar um factor para dentro do radical;
- Passar um factor para fora do radical;
- Simplificar os radicais.

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 60 minutos.

Simplificação de Radicais

Se multiplicarmos ou dividirmos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, diferente de zero, o valor do radical não se altera. O que significa que teremos um radical cujo índice e o expoente do radicando são múltiplos do índice e expoente do radical dado.

$\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[k.n]{b^{k.m}}\,; k \in \mathbb{N} / \{0\}$

Exemplos:

- $\sqrt[3]{4^7} = \sqrt[2.3]{4^{2.7}} = \sqrt[6]{4^{14}}$
- $\sqrt[16]{5^6} = \sqrt[16\div 2]{5^{6\div 2}} = \sqrt[8]{6^3}$

Passagem de um factor para dentro ou para fora do radical

Quando o expoente do radicando é maior ou igual ao índice, podemos passar o radicando para fora do radical, elevando-o ao quociente da divisão inteira do expoente do radicado pelo índice deixando dentro do radical o mesmo factor do radicando elevado ao resto da divisão, ou por outra

Se K $> n$ e q. n + r = K, assim, $\sqrt[n]{a^k} = a^q.\ \sqrt[n]{a^r}$

Exemplos:

$\sqrt[7]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{7}} = 3^{\frac{7+5}{7}} = 3^{1+\frac{5}{7}} = 3.3^{\frac{5}{7}} = 3.\ \sqrt[7]{3^5} = 3\sqrt[7]{3^5}$, visto que 12 >7 e 1.7 + 5 = 12

$\sqrt[3]{7^{14}} = 7^4\sqrt[3]{7^2}$, uma vez que 14>3 e 4. 3 +2 = 14

Venda proibida

Consequentemente, passamos um factor de fora para dentro do radical, elevando-o a um expoente igual ao índice, isto é:

$$\boxed{a.\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^r.a^n}}$$

$7\sqrt[3]{2} = 7^{\frac{3}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = (7^3)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = (7^3.\ 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^3 . 2} = \sqrt[3]{686}$

$2^3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{(2^3)^5.\ 2}. = \sqrt[5]{2^{15}.\ 2} = \sqrt[5]{2^{16}}$

É chegado o momento de certificar se conseguiu reter os conteúdos da lição resolvendo os exercícios abaixo.

Exercícios

1. Simplifique os seguintes radicais:

   a) $\sqrt[3]{320}$; b) $\sqrt{25x^2}$; c) $\sqrt[5]{243}$ d) $\sqrt[4]{4096}$ e) $\sqrt[6]{6^{10}}$ f) $\sqrt[10]{3^4}$

2. Passe para dentro do radical os factores nos seguintes radicais

   a) $2\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{5}$ c) $3\sqrt[3]{2}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\sqrt{\frac{9}{4}}$

3. Passe para fora do radical os factores nos seguintes radicais

   a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt{108}$

Chegamos ao fim desta lição, confira a seguir o resumo.

Resumo da Lição

Caro aluno, esta fase, é de capital importância para nós, pois é no resumo onde apresentamos tudo o que deve reter, sobre operações com radicais, conforme a enumeração que se segue:

Ao multiplicarmos ou dividirmos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, diferente de zero, o valor do radical não se altera;

Quando o expoente do radicando é maior ou igual ao índice, podemos passar o radicando para fora do radical, elevando-o ao quociente da divisão inteira do expoente do radicado pelo índice deixando dentro do radical o mesmo factor do radicando elevado ao resto da divisão;

Para comparar radicais com o mesmo índice, basta comparar os seus radicandos e

Se os radicais tiverem índices diferentes, primeiro reduzem-se os radicais ao mesmo índice e depois comparam-se os radicandos.

Venda proibida

Confira a seguir os resultados dos exercícios que resolveu.

Chave de Correcção

1. a) $\sqrt[3]{320} = 4\sqrt[3]{5}$ b) $5x$ c) 3 d) 8 e) $\sqrt[3]{6^5}$ f) $\sqrt[5]{3^2}$

2. a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{125}$ c) $\sqrt[3]{54}$ d) $\sqrt{\frac{36}{27}}$

3. a) $3\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt[3]{2}$ d) $6\sqrt{3}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 14: Quadrado de uma raiz quadrada

Introdução

Caro estudante!

Nesta lição vamos estudar os quadrados de uma raiz quadrada e o cálculo do quadrado de uma raiz quadrada e a potência de um radical.

Vamos ao trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar as propriedades de radicais;
- Comparar radicais.

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Quadrado de uma raiz quadrada

Cálculo da raiz quadrada

A raiz quadrada ($\sqrt{\ }$) de um número é determinada por um **número real não negativo elevado ao quadrado** (χ^2) . Ao passo que a raiz cúbica é determinada por um **número real** elevado ao cubo (γ^3).

Portanto, temos a raiz quadrada e a raiz cúbica. E quando a raiz é elevada a 4 (Z^4), como se chama? Claro é chamada raiz à quarta, e se for elevada à quinta potência (κ^5) é raiz à quinta ou k elevado a cinco.

Muito bem, posto isto agora temos que aprender como calcular a raiz quadrada de um número.

Vamos a isso!

Caro aluno, para calcular a raiz quadrada de um número, pode pensar que um número elevado ao quadrado será o resultado. Portanto, o conhecimento da tabuada e de potenciação são extremamente importantes e necessários.

Não obstante, alguns números por serem grandes, são difíceis de calcular. Nesse caso, recorremos ao processo de decomposição factorial, através dos números primos. Ora vejamos:

Como calcular a raiz quadrada de 2704? Vamos a isso!

Venda proibida

2704	2
1352	2
676	2
338	2
169	13
13	13
1	

$$2704 = 2^4 \times 13^2$$

Note que a potenciação é necessária, uma vez que depois de decompor o número, no caso da raiz quadrada, juntamos os números primos em potências de 2. O que significa dividir os números em **quadrados perfeitos.**

Usando o mesmo exemplo teremos $\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 13^2} = 2 \times 2 \times 13 = 52$

Assim, a $\sqrt{2704}$ = **52**

Caro aluno, deve reter que quando decompomos um número em factores primos, podemos obter dois tipos de raiz quadrada que são:

- **Raiz quadrada exacta:** cujo seu resultado pertence ao conjunto dos números racionais, ou por outra, podem ser números inteiros, decimais exactos e dízimas periódicos. Por exemplo: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{81} = 9$ e $\sqrt{75,69} = 8,7$.
- **Raiz quadrada não exacta:** O seu resultado que pertence ao conjunto dos números irracionais, ou por outra, podem ser números decimais, infinitas e não periódicos. Por exemplo: $\sqrt{3}$ = 1, 732 0508….; $\sqrt{7}$ = 2, 645751311; $\sqrt{11}$ = 3, 3166247904

Portanto, podemos dizer que um número é um quadrado perfeito quando ele é resultado da multiplicação de dois factores iguais. Assim, a raiz quadrada de um quadrado perfeito é uma raiz exacta e resulta em um número natural.

Exemplo:

- 25 é o quadrado perfeito de 5, pois $\sqrt{25} = 5 \Rightarrow 5^2 = 25$
- 144 é o quadrado perfeito de 12, pois $\sqrt{144} = 12 \Rightarrow 12^2 = 144$
- 400 é o quadrado perfeito de 20, pois $\sqrt{400} = 20 \Rightarrow 20^2 = 400$

Potência de um radical

Para elevar um radical a uma determinada potência, devemos conservar o índice e elevar o radicando à potência indicada.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Venda proibida

Amigo, veja que para justificar esta propriedade, usaremos o seguinte exemplo:

$\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3}$, pela regra da multiplicação de radicais com o mesmo índice, teremos: $\sqrt[5]{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt[5]{3^4}$

É fácil! Assim vamos prosseguir com a nossa lição!

Depois dum estudo minucioso, é chegada a hora de testar os seus conhecimentos resolvendo alguns exercícios a seguir. Mãos a obra!

Exercícios

1. Calcule as raízes quadradas de 2 e 196 e indique as perfeitas e as não perfeitas.
2. Calcule e simplifique a expressão $\frac{5\sqrt[12]{64} - \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt[4]{324}}$.
3. Calcule e simplifique a potência com radical: $\left(4\sqrt[3]{5}\right)^2$.

Chegamos ao fim desta lição confira o resumo que é a seguir apresentado.

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu como calcular a a raiz quadrada e a raiz cúbica. Aprendeu também que:

- **Raiz quadrada exacta:** cujo seu resultado pertence ao conjunto dos números racionais, ou por outra, podem ser números inteiros, decimais exactos e dízimas periódicos.
- **Raiz quadrada não exacta:** O seu resultado que pertence ao conjunto dos números irracionais, ou por outra, podem ser números decimais, infinitas e não periódicos
- Para elevar um radical a uma determinada potência, devemos conservar o índice e elevar o radicando à potência indicada.

Confira a seguir os resultados dos exercícios que resolveu.

Chave de Correcção

1. a) $\sqrt{2} = 1{,}41421356237 \longrightarrow$ Raiz quadrada não perfeita. b) $\sqrt{196} = 14$, pois 14^2 é igual a $169 \longrightarrow$ Raiz perfeito
2. a) $\frac{5\sqrt[12]{64} - \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt[4]{324}}$

Venda proibida

Primeiro passo, vamos decompor os radicandos 324, 64, 50 e 18 em factores primos e transformá-los em potências.

- $324 = 2^2 \times 3^4$
- $64 = 2^6$
- $50 = 2 \times 5^2$
- $18 = 2 \times 3^2$

Segundo passo podemos substituir os valores calculados pelas respectivas expressões $\frac{5\sqrt[12]{64}-\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}} = \frac{5\sqrt[12]{2^6}-\sqrt{2\times3^2}}{\sqrt{2\times5^2}-\sqrt[4]{2^2\times3^4}}$, simplificando a expressão passando os factores possíveis (aqueles que têm expoente maior ou igual ao índice do radical) para fora do radical teremos: $\frac{5\sqrt[12]{2^6}-\sqrt{2\times3^2}}{\sqrt{2\times5^2}-\sqrt[4]{2^2\times3^4}} = \frac{5\sqrt[12]{2^6}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2^2}}$, veja que $\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12\div6]{2^{6\div6}} = \sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4\div2]{2^{2\div2}} = \sqrt{2}$ voltando substituir na expressão anterior $\frac{5\sqrt[12]{2^6}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2^2}}$ teremos: $\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}} = 1$

3. $\left(4\sqrt[3]{5}\right)^2 = 4^2 \times \sqrt[3]{5^2} = 16\sqrt[3]{25}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 15: Radicais

Introdução

Caro aluno, nesta lição terá a oportunidade de aprender como calcular o radical, em que o radicando é um radical, comparar radicais e resolver operações com radicais. Para isso é necessário ter o domínio das propriedades de radicais, porque elas vão facilitar-lhe nos cálculos e na simplificação de radicais. Vamos a isso!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar as propriedades de radicais;
- Comparar radicais.

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Propriedades dos Radicais

Caro aluno!

Ao longo das nossas lições estudámos radicais e até resolvemos vários exercícios relacionados com o assunto. Nesta, falaremos das propriedades dos radicais. Para tal, temos que saber para que servem e até que ponto estas propriedades são importantes.

Vamos a isso!

As propriedades dos radicais facilitam-nos a simplificar e resolver raízes de qualquer índice.

Exemplo: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times b}$

A **radiciação** é uma operação matemática que envolve um produto (multiplicação) cujos factores são iguais. Isto é, uma "potência".

Nas potências, é atribuído um número denominado **base**, esta, que é multiplicado por si mesmo tendo em conta o número de vezes (***n*** denominado expoente). Na radiciação, é feito o inverso: é dada a potência a fim de encontrar a base. Como todas as operações matemáticas, obedece a algumas propriedades, conhecidas por propriedade dos radicais ou por propriedade das raízes.

As propriedades são usadas para simplificar, não só, mas também para resolver exercícios que envolvem raízes de índices elevados ou que tenham um resultado não exacto. Todavia, antes

Venda proibida

apresentarmos as propriedades, devemos recordar-nos sobre o que é um radical e como encontrar os seus resultados.

Então, o que será um radical?

$$\sqrt[n]{x} = \text{L}$$

Definição da "raiz enésima de X"

Caro aluno, na imagem acima, **n** representa o índice, **x** é o radicando e o **L** é a raiz enésima. O símbolo "$\sqrt{\ }$ " é chamado por radical e é usado para representar a operação matemática radiciação.

Nessa operação, o número $\boldsymbol{L}$ é obtido de acordo com o seguinte princípio: $\boldsymbol{L}$ é um número que, multiplicado por si mesmo **n** vezes, tem $\boldsymbol{x}$ como resultado, ou por outra, $\boldsymbol{L^n = x}$. Assim, a radiciação é o inverso da potenciação.

Propriedades dos radicais ou propriedades das raízes

1ª- Propriedade

A raiz enésima de um número elevado a enésima potência é o próprio número, pois essa propriedade trata das raízes em que o índice do radical é igual ao expoente do radicando.

Observe:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

A raiz enésima de um número elevado a enésima potência.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\mathbf{2^3}} = \mathbf{2}$
- $\sqrt[5]{(-\mathbf{7})^5} = -\mathbf{7}$

2ª- Propriedade

O índice de uma raiz pode ser multiplicado ou dividido por um número real qualquer, desde que o expoente do radicando também seja multiplicado ou dividido pelo mesmo número. Matematicamente ficará:

$$\sqrt[n]{\chi^m} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\div p]{x^{m\div p}}$$

Multiplicação ou divisão do índice de um radical e do expoente do radicando pelo mesmo factor.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\mathbf{2^2}} = \sqrt[3\times 2]{\mathbf{2^{2\times 3}}} = \sqrt[6]{\mathbf{2^6}}$
- $\sqrt[16]{\mathbf{5^8}} = \sqrt[16\div 8]{\mathbf{5^{8\div 8}}} = \sqrt{\mathbf{5}}$

Venda proibida

3ª- Propriedade

Esta propriedade, trata das raízes em que o radicando é o produto entre dois. Ela pode ser interpretada da seguinte forma: A raiz enésima do produto é igual ao produto das raízes enésimas. O que significa que

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

A raiz do produto é igual ao produto das raízes

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\mathbf{3 \times 9}} = \sqrt[3]{\mathbf{3}} \times \sqrt[3]{\mathbf{9}}$

4ª- Propriedade

Esta propriedade é idêntica à anterior, mas aplica-se à divisão de dois números quaisquer, Nesse caso, a raiz enésima da razão é igual à razão entre as raízes enésimas. Observe:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

A raiz da razão é igual à razão das raízes

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}} = \frac{\sqrt[3]{\mathbf{12}}}{\sqrt[3]{\mathbf{5}}}$

5ª- Propriedade

Uma potência de uma raiz pode ser reescrita trazendo o expoente para o radicando. Em matemática esta propriedade é dada da seguinte maneira**:**

$$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a^k}}\right)^{\mathbf{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a^{k \times m}}}$$

Exemplo:

- $\left(\sqrt[3]{\mathbf{2^5}}\right)^{\mathbf{2}} = \sqrt[3]{\mathbf{2^{5 \times 2}}} = \sqrt[3]{\mathbf{2^{10}}}$

6ª- Propriedade

Esta propriedade diz respeito às raízes de raízes. Considerando a raiz enésima de um número, é possível obter o seu resultado usando o seguinte:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$$

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[3 \times 5]{2} = \sqrt[15]{2}$

Venda proibida

7ª- Propriedade

Todo radical pode ser escrito na forma de potência com expoente faccionário. Desta forma teremos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propriedade que relaciona raízes de potências a potências com expoentes fraccionários.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{6^5} = 6^{\frac{5}{3}}$

Comparação de radicais

Depois de falar das propriedades dos radicais, vamos aprender a compará-los.

Mãos a obra!

Afinal, como comparar radicais?

A condição fundamental para comparar radicais é verificar antes se os índices dos radicais são iguais ou não, pois existem regras para compará-los. Eis as regras:

1ª Regra- Se os índices forem iguais e radicandos diferentes, será maior o radical que tiver maior radicando.

Observe o exemplo:

$\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$. Assim sendo: $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ porque os índices são iguais e 3 é maior que 2

$\sqrt{12} < \sqrt{45}$ porque os ;índices são iguais e 12 é menor que 45

2ª- Regra- Se os índices forem diferentes e radicando iguais, será maior o radical que tiver menor índice**.**

Observe o exemplo:

$\sqrt[4]{8} > \sqrt[5]{8}$, Assim parece que o maior é $\sqrt[5]{8}$, às vezes fazemos uma análise superficial, 4 é menor que 5.

3ª- Regra- Se os índices forem diferentes e radicandos também diferentes, deve-se calcular o menor múltiplo comum (m.m.c) dos índices.

Exemplo:

Vamos comparar os radicais $\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[4]{5}$

Para compararmos estes radicais, devemos calcular antes o m.m.c dos índices 3 e 4, neste caso que é 12, Assim, vamos ao passo seguinte:

$\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[4]{5}$

Multiplicamos os factores 3 e 4 com os índices respectivamente, elevamos os radicandos pelos factores 3 e 4 Assim ficará:

$\sqrt[3\times4]{7^4}$ e $\sqrt[4\times3]{5^3}$, daí teremos ; $\sqrt[12]{2401}$ e $\sqrt[12]{125}$

Venda proibida

desta maneira, já temos índices iguais, logo, podemos comparar os radicandos com a ajuda da segunda regra que diz que , se os índices são iguais, é maior aquele que tiver maior radicando.

Assim sendo, $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

É fácil! Assim vamos prosseguir com a nossa lição!

Resolva os exercícios a seguir como forma de consolidar o que aprendeu.

Exercícios

1. Usando a decomposição em factores, calcule e simplifique a raíz quadrada de 360.
2. Compare os radicais abaixo apresentados:

b) $\sqrt[8]{35}$ e $\sqrt[8]{95}$; b) $\sqrt[25]{\frac{1}{120}}$ e $\sqrt[25]{\frac{1}{500}}$; c) $\sqrt[10]{\frac{20}{167}}$ e $\sqrt[10]{\frac{20}{167}}$; d) $\sqrt[15]{100}$ e $\sqrt[15]{99}$

3. Efectue as seguintes operações:

b) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} =$

c) $\sqrt[3]{8} \div \sqrt[3]{4} =$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^3 =$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$

Confira a seguir o resumo desta lição.

Resumo da Lição

Terminado o estudo da lição você aprendeu o seguinte:

- As propriedades dos radicais são usadas para simplifica, o cálculo de radicais, a comparação de radicais e também para resolver raízes de índice elevados ou que tenham um resultado não exacto;
- Existe um total de sete propriedades, e que é importante dominar cada uma delas, pois são meios que facilitam o cálculo de problemas que envolvem várias operações, que são:
  - $\sqrt[n]{x^n} = \chi$
  - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - $\sqrt[n]{\chi^m} = \sqrt[n\times p]{\chi^{m\times p}}$
  - $\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^{\mathrm{m}} = \sqrt[n]{a^{k\times m}}$
  - $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\div p]{x^{m\div p}}$
  - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$
  - $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
  - $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- Existem regras que nos orientam para a comparação dos radicais, que devem ser respeitadas.

Venda proibida

Confira a seguir os resultados dos exercícios que resolveu.

Chave de Correcção

1. a) $6\sqrt{10}$

2. a) $\sqrt[8]{35} > \sqrt[8]{95}$; b) $\sqrt[25]{\frac{1}{120}} > \sqrt[25]{\frac{1}{500}}$; c) $\sqrt[10]{\frac{20}{167}} = \sqrt[10]{\frac{20}{167}}$; d) $\sqrt[15]{100} < \sqrt[15]{99}$

3.
   a) $\sqrt{15}$
   b) $\sqrt[3]{2}$
   c) $\sqrt{2^8}$
   d) $\sqrt[6]{2}$

Parabéns amigo! Resolveu os exercícios com sucesso.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 16: Operações com radicais

Introdução

Caro aluno, depois da lição anterior ter abordado as propriedades dos radicais, comparação de radicais, nesta lição vai falar de operações com radicais. Terá a oportunidade de aprender como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com radicais. Chamamos desde já a sua atenção.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver operações de adição envolvendo radicais;
- Resolver operações de subtracção envolvendo radicais;
- Resolver operações de multiplicação com radicais;
- Resolver operações de divisão com radicais.

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Operações com radicais

Adição e subtracção com radicais

A adição e subtracção de radicais, consiste em reduzir a radicais semelhantes e em seguida fazer a adição algébrica.

Exemplos:

- $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (5 + 3 - 4)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = \sqrt{3} + \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2.3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (1 + 3 - 5)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
- $\sqrt{50}+\sqrt{98} - \sqrt{18} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{3^2 \times 2} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (5+7-3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
- $\sqrt[6]{8} - 6\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (1 - 6)\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$

Multiplicação e Divisão com radicais

Muito bem! Terminada a adição e subtracção, em seguida vamos ver as operações de multiplicação e divisão com radicais.

Consideremos o seguinte produto: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

Transformando cada radical na forma de potência de expoentes fraccionário, teremos:

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$

Venda proibida

Aplicando as propriedades das operações entre potências. Voltando a escrever na forma de radical o resultando:

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (a \times b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \times b}$

Desta forma,

O produto de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o produto dos radicandos dos factores, isto é, $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

Exemplos:

- $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$
- $\sqrt[9]{7} \times \sqrt[9]{-3} = \sqrt[9]{7 \times (-3)} = \sqrt[9]{-21}$

Bravo! Estamos a caminhar muito bem, como vê, estamos a entrar na última, das quatro operações programadas para esta lição. **A divisão com radicais**.

Agora consideremos o seguinte quociente: $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$

Transformando cada radical em potência e aplicando a regra do quociente, resulta que:

$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \div b^{\frac{1}{n}} = (a \div b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \div b}$

Portanto,

O quociente de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o quociente dos radicandos, isto é,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \textbf{ com b} \neq \textbf{0}$$

Exemplos:

- $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{6 \div 3} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[16]{18 \div 2} = \sqrt[16]{18 \div 2} = \sqrt[16]{9} = \sqrt[16]{3^2} = \sqrt[8]{3}$

A multiplicação e a divisão de radicais com índices diferentes efectuam-se do seguinte modo: primeiro reduzem-se os radicais a índices iguais e, em seguida, efectuam-se as operações de multiplicação, ou a divisão, do índice comum.

Exemplos:

- $\sqrt{3}\, x \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \times 2^2} = \sqrt[6]{27 \times 4} = \sqrt[6]{108}$
- $\sqrt{2}\, x \sqrt[3]{3} x \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{2^6} \times \sqrt[12]{3^4} \div \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{\frac{2^6 \times 3^4}{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^6 \times 3^4}{2^6}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

Resolva os exercícios a seguir

Venda proibida

Exercícios

Terminado o estudo desta magna lição, é chegado o momento de testar os conhecimentos adquiridos, resolvendo os seguintes exercícios de consolidação:

1- Efectue e simplifique as operações apresentadas.

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$

b) $6\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} =$

c) $\sqrt{8} + 10\sqrt{2} - \sqrt{50} =$

d) $\sqrt[5]{7} \div \sqrt{3} =$

e) $\frac{\sqrt[5]{15} \times \sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{5}} =$

Passe o resumo para o seu caderno

Resumo da Lição

Caro aluno, é sempre aconselhável que depois duma jornada desta natureza, façamos um resumo do que se aprendeu. Para este caso foi o seguinte:

- Resolver operações de $(+; -; \times$ e $\div)$ com radicais;
- O produto de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o produto dos radicandos dos factores.
- O quociente de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o quociente dos radicandos**.**

Compare os seus resultados com estes que são apresentados a seguir.

Chave de Correcção

a) $8\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[3]{5}$

c) $7\sqrt{2}$

d) $\sqrt[10]{\frac{49}{243}}$

e) $\sqrt[5]{30}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 17: Racionalização de Denominadores

Introdução

Caro aluno, nesta lição terá a oportunidade de aprender como é feita a racionalização de denominadores numa operação.

Mãos à obra!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver operações de racionalização de denominadores

A aprendizagem terá uma duração de 60 minutos.

Racionalização de denominadores

Caro aluno**.** Racionalização de denominadores é a técnica utilizada quando uma fracção tem uma raiz no denominador e se deseja encontrar uma segunda fracção equivalente à primeira fracção, mas que não tenha essa raiz em seu denominador.

Para fazer isso, é necessário realizar operações matemáticas para reescrever a fracção de forma que ela não tenha em seu denominador uma raiz não exacta.

Observe as seguintes fracções:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{10}{\sqrt[5]{3}}$.

De certeza conseguiu compreender que para cada uma delas é possível encontrar uma fracção equivalente que não tenha uma raiz no denominador. Para isso utiliza-se um processo chamado racionalização de denominadores. Então, o que será racionalizar o denominador? Racionalizar o denominador de uma fracção significa transformar a fracção noutra equivalente com denominador sem radicais.

Exemplos:

- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Se multiplicarmos o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$ (chamado conjugado), teremos uma fracção equivalente à primeira mas com denominador racional:

  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Venda proibida

- $\frac{10}{\sqrt[5]{3}}$ Se multiplicarmos o numerador e o denominador por $\sqrt[5]{3^4}$ (chamado conjugado), teremos uma fração equivalente à primeira mas com denominador racional:

  $\frac{10}{\sqrt[5]{3}} = \frac{10 \times \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3^4}} = \frac{10 \times \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{10\sqrt[5]{3^4}}{3}$, Desta forma podemos dizer que:

- Se o denominador é da forma $\sqrt{a}$ logo, o conjugado é $\sqrt{a}$;
- Se o denominador é de forma $\sqrt[n]{a^p}$, logo, o conjugado é $\sqrt[n]{a^{p-n}}$.

Certo! Terminado o estudo desta lição, é chegado o momento de resolver os exercícios de consolidação.

Exercícios

1- Racionalize o denominador das fracções:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{4}{2\sqrt{2}}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

2. Racionalize o denominador da fracção: $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Passe o resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta lição, abordamos sobre racionalização de denominadores de uma fracção. Dissemos que racionalizar denominador de uma fracção, e transformar o denominador de uma fracção que é um número irracional para denominador racional (neste caso número inteiro).

Confira a seguir os resultados dos exercícios que resolveu.

Chave de Correcção

1a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2-\sqrt{2}$

2. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 18: Sistema de inequações

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender definir os sistemas de inequações, a resolvê-los, bem como a representar a solução do sistema.

Bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar sistemas de inequações lineares;
- Resolver analiticamente sistemas de inequações lineares.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

Noção de sistema de inequações lineares com uma variável

O que é sistema de inequações lineares?

Sistema de inequações a uma variável – é uma expressão que é formada por duas inequações.

No geral representa-se da seguinte maneira: $\begin{cases} ax + b < c \\ a'x + b' \geq c' \end{cases}$;

onde: $(a \neq 0; a' \neq 0; b\ , b', c\ e\ c')\epsilon IR$.

Exemplo:

a) $\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x + 2 < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 7 \geq -3 \end{cases}$

Caro aluno, sistemas de inequações lineares é um sistema formado por duas inequações lineares que abordamos nas aulas anterior e que já conhece.

Resolução analítica de inequações lineares

Para resolver um sistema de inequações lineares, procede-se seguindo os seguintes passos:

1º - Resolver as inequações separadamente, obedecendo as regras abordadas na lição número 20 (álgebra 2);

2º - Representar as soluções das duas inequações no mesmo eixo real;

3º - Identificar a solução do sistema de inequações, que é o intervalo comum das duas inequações.

Venda proibida

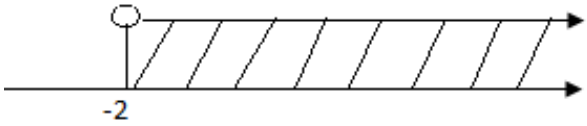
Exemplos:

Exemplo 1: Dada o sistema de inequações: $\begin{cases} 2x+4>0 \\ x+2<5 \end{cases}$, resolva o em IR.

$$\begin{cases} 2x+4>0 \\ x+2<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-4 \\ x<5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{4}{2} \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<3 \end{cases}$$

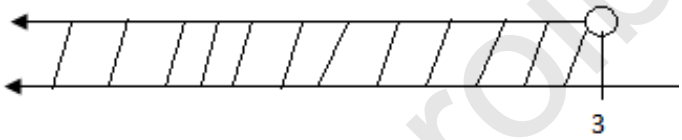
Para representar a solução deste sistema, primeiro representemos a solução da primeira inequação no eixo real, assim:

$$x \in R: x > -2$$

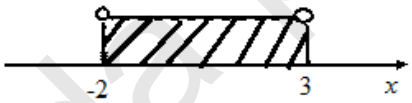


Segundo representamos a solução da segunda inequação no eixo real, assim:

$$x \in R: x < 3$$



Representados os dois intervalos no mesmo eixo real, teremos a parte comum para as duas soluções, isto é:



Então a solução do sistema será o intervalo: $x \in]-2;3[$

Exemplo 2: Dado o sistema de inequações: $\begin{cases} \frac{x-2}{4}-\frac{2x-1}{2}>\frac{x}{5} \\ \frac{3-5x}{2}\geq 5-\frac{2x+3}{9} \end{cases}$, resolva-o em IR.

Para este sistema de inequações, devemos calcular o m.m.c, dos denominadores das duas inequações, assim: $\begin{cases} \underset{(5)}{\frac{x-2}{4}}-\underset{(10)}{\frac{2x-1}{2}}>\underset{(4)}{\frac{x}{5}} \\ \underset{(3)}{\frac{3-5x}{2}}\geq \underset{(6)}{\frac{5}{1}}-\underset{(2)}{\frac{2x+3}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5(x-2)}{20}-\frac{10(2x-1)}{20}>\frac{4x}{20} \\ \frac{3(3-5x)}{6}\geq \frac{6\times 5}{6}-\frac{2(2x+3)}{5} \end{cases}$

Como, já calculamos o m.m.c em ambos os membros, então, podemos eliminar os denominadores e teremos:

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-2)-10(2x-1)>4x \\ 3(3-5x)\geq 6\times 5-2(2x+3) \end{cases}$; aplicando a propriedade distributiva teremos:

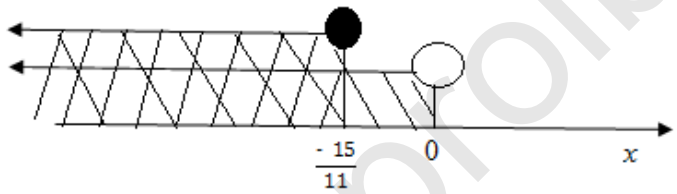
Venda proibida

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 10 - 20x + 10 > 4x \\ 9 - 15x \geq 30 - 4x - 6 \end{cases}$; agora podemos agrupar os termos dependentes no primeiro membro e os independentes no segundo membro: assim:

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 20x - 4x + > 10 - 10 \\ -15x + 4x \geq 30 - 6 - 9 \end{cases}$; adicionamos os termos semelhantes e teremos:

$\Leftrightarrow \begin{cases} -19x > 0 \\ -11x \geq 15 \end{cases}$; multiplicamos ambos os membros por (-1) para torna-los positivos os coeficientes -19 e -11, os sinais de desigualdades vão mudar de posição segundo o princípio de equivalência já abordado na lição 20. Então, teremos:

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1) - 19x > 0(-1) \\ (-1) - 11x \geq 15(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x < 0 \\ 11x \leq -15 \end{cases}$; passamos os coeficientes 19 e 11 a dividir no segundo membro, assim: $\Leftrightarrow \begin{cases} 19x < 0 \\ 11x \leq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{0}{19} \\ x \leq \frac{-15}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq \frac{-15}{11} \end{cases}$; vamos representar as soluções no eixo real.



A solução será o intervalo: $x \in \left]-\infty; -\frac{15}{11}\right]$

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre resolução de sistemas de inequações lineares a uma incógnita, você deve estar em condições de resolver os exercícios a baixo:

Exercícios

1. Resolva cada um dos seguintes sistemas de inequações lineares com uma variável

a) $\begin{cases} 2 - 3x < 30 - 10x \\ 3x - 1 < 4 - 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{x}{3} > x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 - x \geq 5 - 4x \\ 2x - 1 \leq x + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5(x + 3) - 9x < \frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} - 2 < 7x + \frac{1+x}{4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3-x}{2} < 1 + \frac{5-2x}{3} \\ \frac{2x-3}{4} < \frac{x+5}{6} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{4x-5}{3} - \frac{3x+1}{5} < -x \\ \frac{2+7x}{5} - \frac{3x}{2} > 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x-2}{3} - \frac{2-x}{5} > 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2-3x}{4} - \frac{x-1}{2} < 0 \end{cases}$

Venda proibida

e) $\begin{cases} \frac{2x-1}{5} - x > \frac{3x-4}{2} \\ \frac{5x+3}{4} - \frac{3x}{5} > 0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} \frac{3x-2}{2} - 5 < 0 \\ \frac{1-x}{5} - \frac{x-1}{4} < 0 \end{cases}$

2. Dado o sistema $\begin{cases} 9 - 3(x+1) < 2 \\ -\frac{7}{5}x \leq 0 \end{cases}$, indique:

a) O menor número inteiro que verifica o sistema;

b) O menor número inteiro que verifica apenas uma das inequações;

c) O maior número inteiro que não verifica qualquer das inequações;

d) O maior número inteiro que não é solução do sistema.

Confira a seguir o resumo desta lição.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu resolver sistemas de inequações lineares, a uma incógnita, e a respectivas representação das soluções tanto no eixo real assim como sob forma de intervalos numéricos.

Compare os seus resultados com os que são apresentados a seguir.

Chave de Correcção

1. a) $x < 1$ b) $\begin{cases} x > -2 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$ d) $x > \frac{11}{3}$ e) $\begin{cases} x > -\frac{15}{13} \\ x < \frac{6}{7} \end{cases}$

f) $x < \frac{19}{4}$ g) $x < \frac{14}{13}$ h) $\emptyset$ i) $\begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$

2. a) 2 b) 0 c) -1 d) 1

Venda proibida

LIÇÃO Nº 19: Resolução de problemas envolvendo inequações lineares

Introdução

Caro aluno, depois de resolver os sistemas que envolvem inequações lineares, vai nesta lição, abordar as resoluções de problemas conducentes à obtenção das inequações lineares. Sendo assim, chamamos desde já a sua atenção para estes conteúdos.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver problemas conducentes a uma inequação linear.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 60 minutos no mínimo.

Resolução de problemas envolvendo inequações lineares

Caro aluno, as inequações lineares têm uma das suas aplicações na resolução de certos tipos de problemas tais como:

Exemplo:

A soma de um número com 10 é superior que a diferença entre o seu dobro com 3.

Para resolver este problema, primeiro temos que traduzir o problema na linguagem matemática.

Traduzindo na linguagem matemática, teremos:

1º Designemos o número pretendido por x,

2º A soma do número pretendido com 10: $x + 10$,

3º A diferença entre o seu dobro com três: $2x - 3$

Então a tradução do problema na linguagem matemática é: $x + 10 > 2x - 3$. Esta é uma inequação do primeiro grau.

Resolvendo esta inequação, teremos:

$$x + 10 > 2x - 3$$

$x - 2x > -3 - 10$ Agrupando os termos semelhantes: -3 e 10, x e $-2x$

$-x > -13$

$x < 13$ O sentido da desigualdade mudou, pois, o coeficiente (-1) é negativo.

Solução: $x \in]-\infty; 13[$. Neste caso é uma infinidade de números que satisfazem o problema.

Por exemplo: Para $x = 10$ que faz parte do conjunto, substituindo na inequação e teremos:

Venda proibida

$10 + 10 > 2 \times 10 - 3$

$20 > 20 - 3$

$20 > 17$ Verdadeiro

Resolva os exercícios a seguir:

Exercícios

1. A diferença entre a terça parte do número 5 é inferior ao seu dobro. Equacione o problema e resolva.
2. Determine o menor múltiplo de 2 que verifica a condição seguinte: "$\frac{2}{3}$ da sua diferença com 1 é maior que 5".
3. Determine o menor múltiplo de 3 que verifica a condição seguinte:" $\frac{3}{4}$ da sua soma com 2 é maior que 11".
4. Qual é o menor número inteiro que pode se atribuir a n para que a expressão $\frac{1-3n}{5}$ tome um valor inferior a 6, mas não negativo.

Confira a seguir o Resumo da Lição.
Passe o resumo para o seu caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição, aprendeu resolver alguns problemas relacionados com o nosso cotidiano que envolvem inequações lineares. No âmbito da resolução de problemas, é importante primeiro ler e perceber o problema, compor a inequação correspondente, resolver a inequação e no fim dar a resposta.

Confronte os seus resultados com os que são apresentados na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. $x > -3$ 2. 10 3. 15 4. 0

Venda proibida

LIÇÃO Nº 20: Homotetias

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender mais uma forma de transformação geométrica, a homotetia. Vai também aprender a aplicar esta transformação geométrica na ampliação e na redução de figuras planas simples como o triângulo, o rectângulo e o quadrado.

A homotetia é uma forte aliada para a ampliação ou redução de figuras geométricas, por isso ter conhecimento desta ferramenta é de grande interesse não só na Matemática, mas também em disciplinas como desenho geométrico.

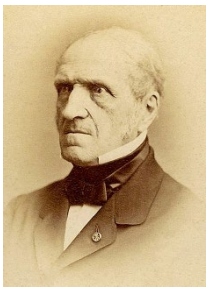
Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar a homotetia na ampliação figuras planas simples (triângulo, rectângulos, quadrado);
- Aplicar a homotetia na redução de figuras planas simples (triângulo, rectângulos, quadrado);
- Ampliar uma figura, dada a razão, relacionando os conceitos de semelhança e de proporção;
- Reduzir uma figura, dada a razão, relacionando os conceitos de semelhança e de proporção.

Para a melhor compreensão desta lição necessitas de estudar durante 60 minutos.

Homotetia



Caro aluno, deve estar a questionar-se por causa deste termo que á priori parece ser estranho. Uma das questões que julgamos que deve estar na sua mente : É o que significa homotetia? Contudo, pedimos que tenha calma, pois, até ao fim da lição tudo ficará esclarecido.

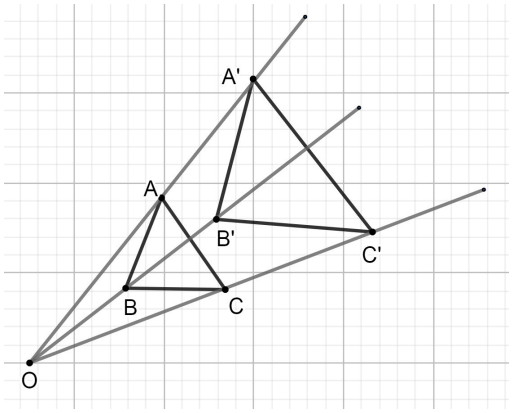
Comecemos pela origem do termo:

O termo foi cunhado pelo matemático francês Michel Charles, em 1827, derivado do grego como composto de ***homós*** (similar) e *thetós* (posição).

A homotetia é um exemplo de transformação geométrica que preserva a forma da figura original, mas não necessariamente seu tamanho, como aconteceu com a rotação. Desse modo, a figura original e a figura obtida dela por homotetia são semelhantes. Essas figuras são chamadas de figuras homotéticas.

Venda proibida

Exemplo: Podemos ampliar ou reduzir figuras usando a homotetia.



Exemplo 1: Máquinas copiadoras que fazem ampliações ou reduções geralmente utilizam a homotetia como princípio em seu funcionamento.

Fazendo revisões

Precisamos de fazer revisões sobre as razões e proporções numéricas, pois vamos precisar destes conceitos mais adiante nesta lição.

Comecemos pela definição de razão.

Razão é a relação existente entre dois valores de uma mesma grandeza. Expressa-se geralmente como "**a** está para **b**", a:b. Este conceito pode ser aplicado, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo: A Maria tem 6 laranja e o João tem 2. Qual é a razão entre o número de laranjas da Maria e o do João?

Lembra-se desta questão? Claro que sim. Você analisou esta na lição sobre razões. Nessa lição foi dito que para determinar esta razão, era preciso relacionar, comparando, o número de laranjas do João e o da Maria. Portanto: número de laranjas da Maria: número de laranjas de João.

Assim, $6:2$ é a razão entre o número de laranjas da Maria e o do João (pode ser lida como a razão de 6 para 2, ou 6 está para 2). Dividindo os dois números da razão por 2, obtemos o seguinte: $6:2 = 3:1$, o que equivale dizer que o número de laranjas da Maria é o triplo do número de laranjas do João.

Ainda sobre revisões, podemos falar de proporções, pois você aprendeu que uma proporção é uma relação que se estabelece entre duas razões, e é representada da seguinte maneira: $a:b = c:d$, e lê-se: a está para b, assim como c está para d. Pode ser útil para resolver exercícios tais como o do seguinte exemplo:

Exemplo: Determine o valor de x na proporção: $2:9 = 6:x$.

Constata-se que nesta proporção, um dos seus termos é desconhecido (**x**). Podemos calcular o **x** usando a regra de três simples:

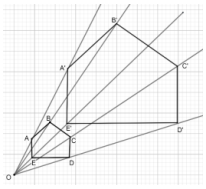
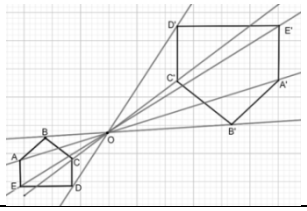
$$2:9 = 6:x \Rightarrow 2 \times x = 6 \times 9 \Leftrightarrow 2 \times x = 54 \Leftrightarrow x = 54 \div 2 \leftrightarrow x = 27$$

O valor de **x** na proporção é 27.

Venda proibida

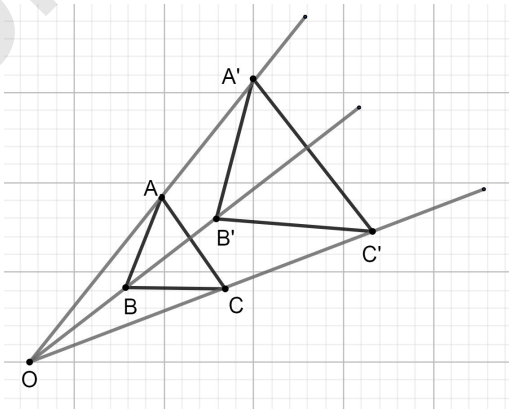
Voltando a nossa lição, e recomendar o uso de material como, o compasso, régua, lápis e papel milimétrico.

Vamos primeiro distinguir dois tipos de homotetia, que têm influência no tipo de figura homotética resultante:

Homotetia directa	**Homotetia inversa**
	
A figura resultante conserva a posição da primeira.	A figura resultante não conserva a posição da primeira

Definição: **Homotetia** de uma figura **F** com centro **O** e razão k, sendo k um número real positivo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto **P** de **F** o ponto $\boldsymbol{P'}$ sobre a semi-recta **OP**, de origem O, tal que $OP' = k.OP$.

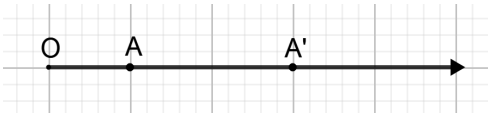
Elementos da homotetia



- Ponto O – centro da homotetia (foco);
- Triângulo ΔABC- figura original;
- Triângulo $\Delta A'B'C'$- figura homotética

Quando fazemos a homotetia, nos baseamos numa figura original, aumentando ou diminuindo seu tamanho. Os números pelos quais multiplicamos o tamanho da figura chamam-se razões da homotetia. Em caso de triplicarmos a figura original, a razão será 3 (k=3).

Exemplo: Consideremos o ponto **O**, uma semi-recta $\overrightarrow{OA}$, com o ponto **A** distinto de **O**, e uma constante, por exemplo, igual a 3 (razão):



A correspondência estabelecida entre o ponto A e o ponto A', ambos sobre a semi-recta $\overrightarrow{OA}$, é tal que: $OA' = 3OA$ ou $\frac{OA'}{OA} = 3$. Em outras palavras seria: Se tomarmos a distância do ponto **O** ao ponto **A** igual a uma medida, a distância do ponto **O** ao ponto $\boldsymbol{A'}$ será três vezes a distância do ponto **O** ao ponto **A**.

Se K fosse igual a 5 teríamos:

$OA' = 5OA$ ou $\frac{OA'}{OA} = 5$

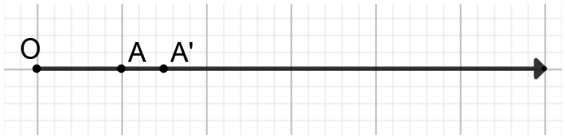
Venda proibida

Se K fosse igual a $\frac{1}{2}$ teríamos:

$OA' = \frac{1}{2}OA$ ou $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$

Se K fosse igual a $\frac{3}{2}$ teríamos:

$OA' = \frac{3}{2}OA$ ou $\frac{OA'}{OA} = \frac{3}{2}$



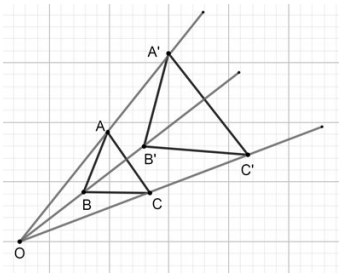
Propriedades da homotetia

a) Numa homotetia, um segmento de recta é levado a outro segmento de recta paralelo ao primeiro.

b) A imagem de um ângulo por meio de uma homotetia é outro ângulo congruente ao original.

c) Em uma homotetia com centro **O** e razão **k**, temos que a razão entre a medida do homotético de um segmento e a medida do próprio segmento é sempre igual a **k**, que é a razão da homotetia.

Com estas propriedade podemos, por exemplo, afirmar que na figura ao lado:



- Os ângulos correspondentes são congruentes, por exemplo: $< ABC \cong < A'B'C'$;
- Os segmentos correspondentes são paralelos por exemplo: $[AB] \parallel [A'B']$;
- A razão entre suas medidas é sempre a mesma é igual à razão da homotetia.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

Depois do que, você viu, é legítimo que pergunte:

Será que os polígonos homotéticos são sempre semelhantes?

A resposta é sim, mas a recíproca não é verdadeira, isto é, polígonos semelhantes nem sempre são homotéticos. Por isso é preciso ter cuidado.

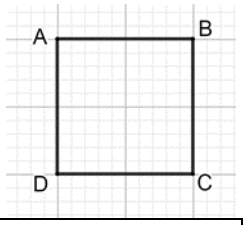
Polígonos homotéticos são sempre semelhantes, mas nem sempre polígonos semelhantes são homotéticos.

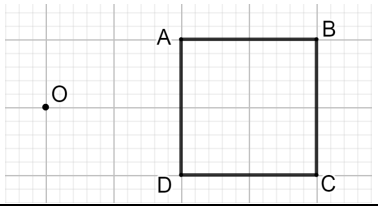
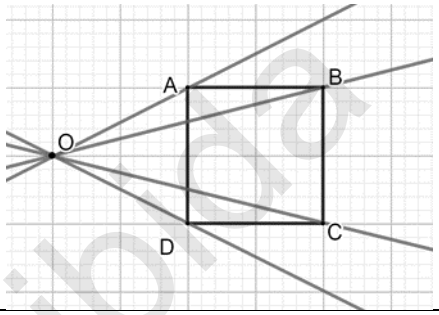
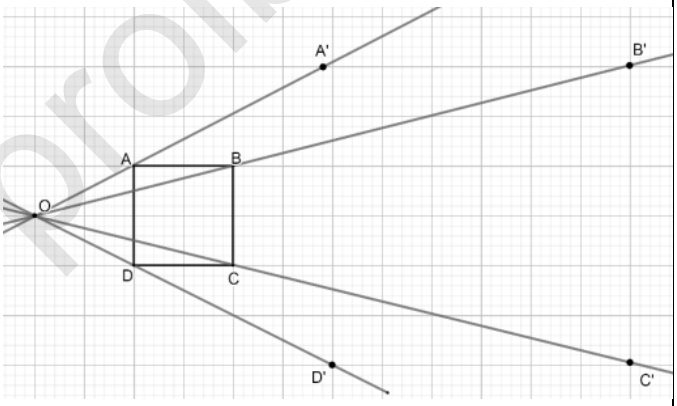
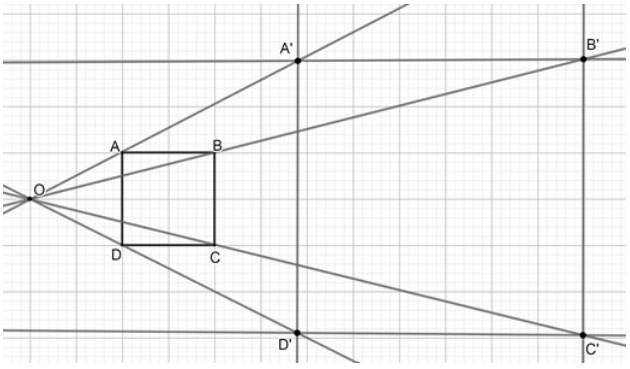
Correcto! Até aqui foi vendo imagens de construção de figuras homotéticas, e foi aprendendo as suas características. A seguir vamos aplicar tudo isso que aprendeu em casos concretos de ampliação e redução de figuras.

Venda proibida

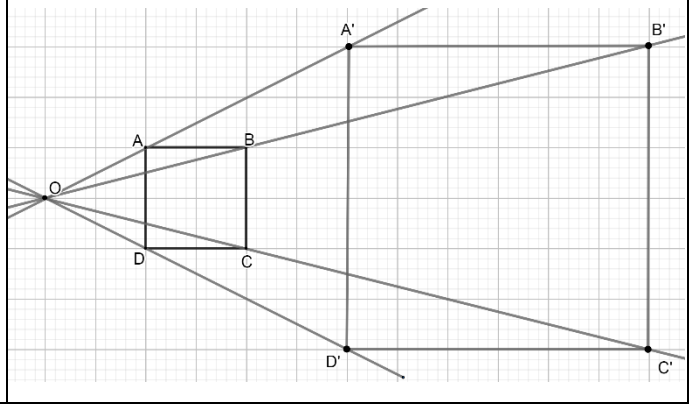
Ampliação e redução de figuras planas simples

Exemplo: Queremos ampliar o polígono ABCD. Como devemos proceder?

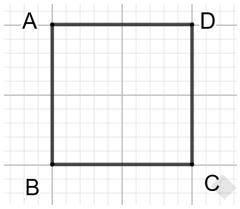


• Marcamos um ponto O (foco) qualquer.	
• Com uma régua traçamos as rectas: OA, OB, OC e OD	
• Com o compasso, marcamos um ponto A' sobre a recta OA, de modo que $OA' = r.OA$ (r é a razão de semelhança). • Marcamos um ponto B' sobre a recta OB, de modo que $\|OB'\| = r.\|OB\|$ (mesma razão de semelhança usada para marcar o ponto A'). • Procedemos da mesma maneira marcando os pontos C' e D'.	
• Com régua, traçamos rectas para unirmos os pontos e obtermos os lados homotéticos $[A'B'], [B'C'], [C'D] e\ [D'A']$	

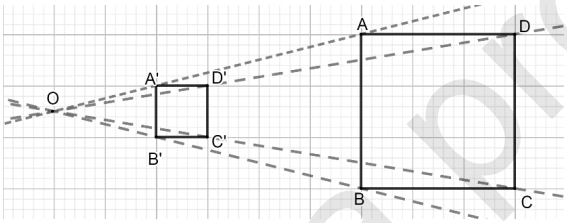
Venda proibida

Por fim temos a seguinte figura. Neste caso a figura ABCD foi ampliada 3 vezes, ou seja a razão de semelhança $r = 3$. Por isso o lado $\|A'B'\| = 3\|AB\|$ por exemplo. Observa-se também que $\|OA'\| = 3\|OA\|$; $\|OB'\| = 3\|OB\|$; $\|OD'\| = 3\|OD\|$ e $\|OC'\| = 3\|OC\|$	

Exemplo 2: Queremos reduzir o polígono ABCD. Como devemos proceder?



Os passos são semelhantes e teríamos como resultado o seguinte:



Observe que neste caso a figura ABCD foi reduzida 3 vezes, ou seja a razão de semelhança $r = \frac{1}{3}$.

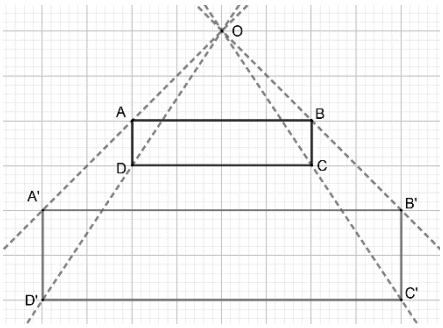
Por isso o lado $|A'B'| = \frac{1}{3}|AB|$.

E por isso mesmo temos que $|OA'| = \frac{1}{3}|OA|$; $|OB'| = \frac{1}{3}|OB|$; $|OD'| = \frac{1}{3}|OD|$ e $|OC'| = \frac{1}{3}|OC|$

Caro aluno, chegamos ao fim da nossa lição por isso, dedique um tempo para resolver os exercícios que se seguem, e posteriormente comparar com a Chave de Correcção.

Exercícios

Copie para o seu caderno de exercícios e resolva ou responda as questões colocadas.

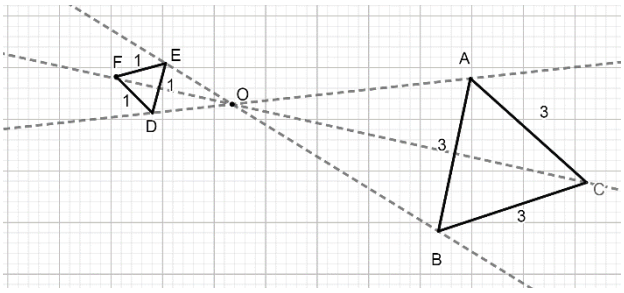


1. Observe a figura e assinale com V se a afirmação for verdadeira e com F se for falsa:
   a) ( ) A razão $k = 2$.
   b) ( ) A razão $k = -2$
   c) ( ) A razão $k = \frac{1}{2}$

Venda proibida

d) ( ) A razão $k = -\frac{1}{2}$

2. Observe a figura e assinale com V se a afirmação for verdadeira e com F se for falsa.



a) ( ) O tipo de homotetia é inversa;

b) ( ) O tipo de homotetia é direita;

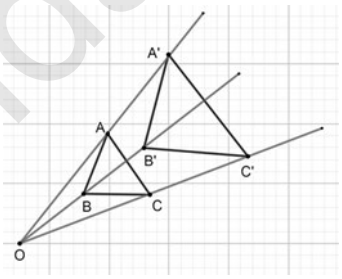
c) ( ) A razão da homotetia é $+3$;

d) ( ) A razão da homotetia é -3;

e) ( ) A razão da homotetia é $-\frac{1}{3}$;

f) ( ) A razão da homotetia é $+\frac{1}{3}$.

3. Assinale com V caso a afirmação seja verdadeira e com F se for falsa. Ampliando o triângulo ΔABC, obtém-se um novo triângulo $\Delta A'B'C'$, em que cada lado é o triplo do seu correspondente em ΔABC. Em figuras ampliadas ou reduzidas, os elementos que conservam a mesma medida são:



a) As áreas ( ) b) Os ângulos ( )

c) Os lados ( ) d) Os perímetros ( )

Chegamos ao fim de mais uma lição. Faça o resumo no seu caderno e compare com o que a seguir te apresentamos.

Resumo da Lição

Nesta lição foi abordado o tema homotetia. Estabeleceu-se a diferença entre a homotetia directa e a inversa, e como se pode usar a homotetia para ampliar ou reduzir polígonos simples como triângulos, rectângulos e quadrados.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a)V b)F c)F d)F
2. a)V b)F c)F d)F e)V f) F
3 a)F b)V c)F d)F

Venda proibida

LIÇÃO Nº 21: Semelhança de triângulos

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender a identificar figuras e triângulos semelhantes e aplicar critérios de semelhança.

Muito bom trabalho!

Objectivos da Lição

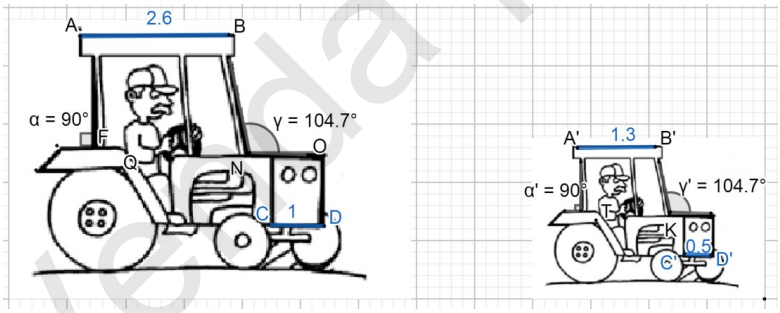
Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar figuras semelhantes;
- Identificar triângulos semelhantes;
- Explicar a semelhança de triângulos, aplicando os critérios (lll; aa; lal).

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 60 minutos.

Noção de semelhança

Caro aluno, observe as duas figuras que mostram um tractor em tamanhos diferentes.



Medindo os ângulos correspondentes teremos:

Angulo	Figura grande	Figura pequena
α	90°	90°
γ	104.7°	104.7°

Medindo os lados correspondentes, teremos:

Lado	Figura grande	Figura pequena	Razão
$[AB]. [A'B']$.	2,6	1,3	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2,6}{1,3} = 2$
$[CD], [C'D']$	1,0	0,5	$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1,0}{0,5} = 2$

Veda proibida

Isto leva-nos a concluir que ângulos correspondentes são iguais e lados correspondentes são proporcionais.

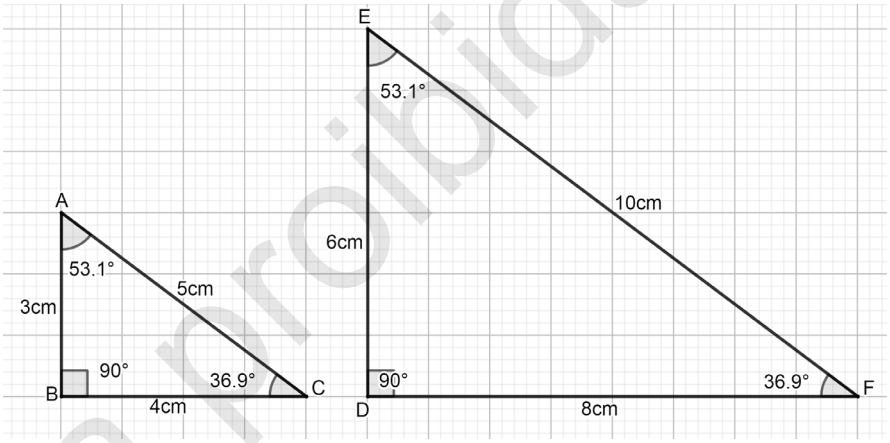
Definição: Dois polígonos são semelhantes se têm todos os ângulos correspondentes congruentes (iguais) e todos os segmentos proporcionais.

Congruência significa da mesma forma e do mesmo tamanho.
Semelhança significa da mesma forma, mas de tamanhos diferentes.

Será que o que aconteceu com os tractores acontece com polígonos? Esta pode ser uma questão que você pode estar a fazer. Vamos juntos conferir no exemplo a seguir.

Exemplo: Construir um triangulo cujos lados meçam 3cm , 4cm, e 5cm e outro com os lados 6cm, 8cm e 10cm.

Como pode observar na figura ao lado, comparando os ângulos correspondentes, nota-se que são congruentes.



Comparando os lados correspondentes temos:

$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = 2$ por isso os dois triângulos $\Delta[ABC] \sim \Delta[EDF]$. O símbolo $\sim$ é o sinal de semelhança.

A posição no plano não importa, mas a ordem das letras é importante.
Por isso não podemos dizer que $\Delta[ABC] \sim \Delta[DFE]$ para indicar a semelhança dos dois triângulos que acabamos de analisar.

Casos de semelhança

Para identificar se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns elementos.

1º Caso: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois do outro. Critério AA (Ângulo, Ângulo).

2º Caso: Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro. Critério LLL (Lado, Lado, Lado).

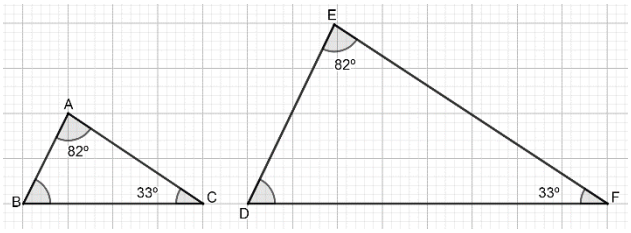
3º Caso: Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

Venda proibida

Acompanhe com atenção a resolução do exercício a seguir:

Actividades

1. Dados os triângulos ao lado, responda:



a) Eles são semelhantes? Justifique a resposta.

b) Qual é o ângulo que não aparece nas figuras?

Resolução:

a) São semelhantes porque têm dois ângulos iguais.

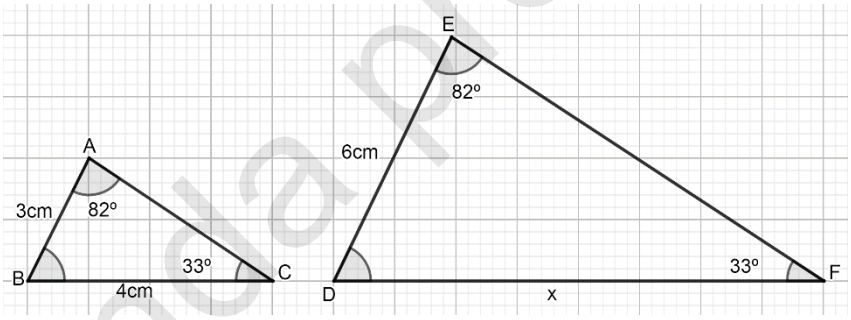
b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º. Logo:

$82° + 33° = 115°$

$180° - 115° = 65°$

Resposta: O ângulo é $65°$

2. Considere os dois triângulos ao lado e calcule o valor de x.



Resolução:

Primeiro observando os dois triângulos podemos dizer que $\Delta[ABC] \sim \Delta[EDF]$, caso AA. Ou seja, são semelhantes pois tem dois ângulos congruentes (caso AA). Como são semelhantes podemos dizer:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow 3x = 6.4 \Rightarrow x = \frac{6.4}{3} = \frac{3.2.4}{3} = 8$$

Resposta: O valor de x é de $8cm$.

Neste tipo de exercícios é preciso primeiro saber se os triângulos são ou não semelhantes para poder realizar os cálculos.

Caro aluno, chegamos mais uma vez ao fim da nossa lição por isso, dedique um tempo para verificar o seu nível de compreensão da matéria, resolvendo os exercícios que se seguem, e posteriormente comparar com a Chave de Correcção.

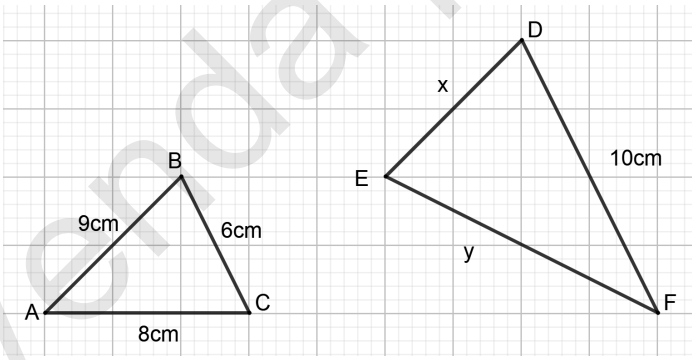
Venda proibida

Exercícios

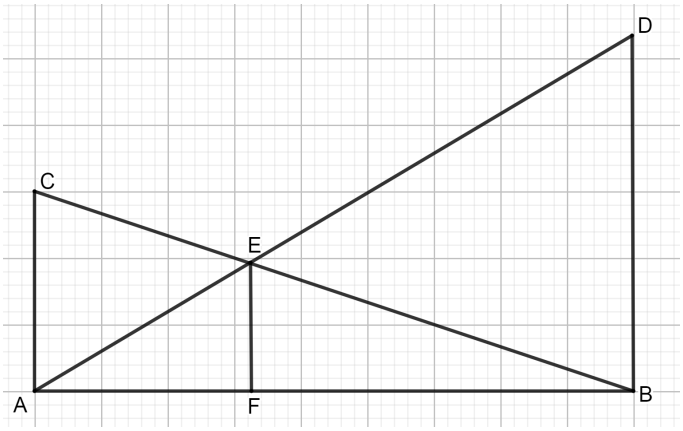
Copie para o seu caderno de exercícios e resolva ou responda as questões colocadas.

1. Existem alguns procedimentos que podem ser usados para descobrir se dois triângulos são semelhantes sem ter de analisar a proporcionalidade de todos os lados e, ao mesmo tempo, as medidas de todos os ângulos desses triângulos. A respeito desses casos, assinale com V a alternativa verdadeira e com F a alternativa falsa:
   a) ( ) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham três ângulos correspondentes congruentes.
   b) ( ) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham dois lados proporcionais e um ângulo congruente, em qualquer ordem.
   c) ( ) Para que dois triângulos sejam congruentes, basta que eles tenham os três lados correspondentes com medidas proporcionais.
   d) ( ) Dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais não serão semelhantes em qualquer hipótese.
   e) ( ) Dois triângulos que possuem apenas dois ângulos correspondentes congruentes não podem ser considerados semelhantes.

2. Qual é o valor de x sabendo que $\Delta[ABC] \sim \Delta[EFD]$.



3. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de recta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

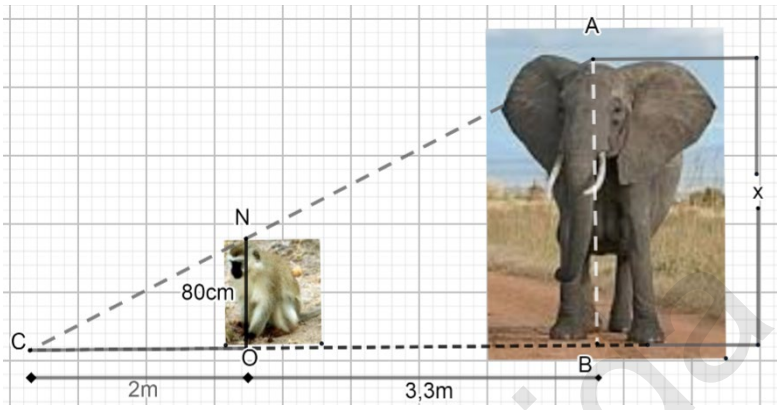


Venda proibida

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

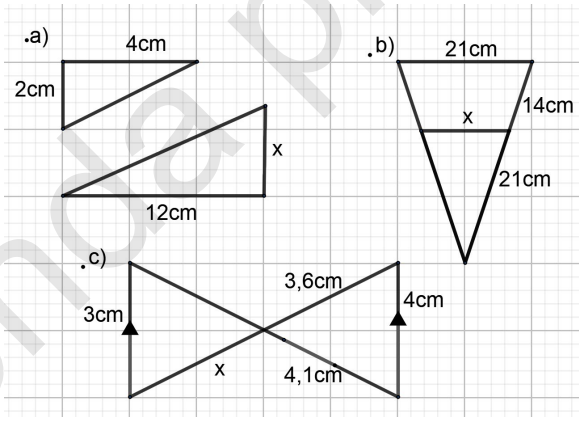
a)	$1\ m$	b)	$2\ m$	c)	$2{,}4\ m$	d)	$3\ m$	e)	$2\sqrt{6}m$

4. Observe a figura e determine a altura do elefante.



5. Para descobrir a altura de um prédio, Luiz mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luís, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

6. Calcule o valor de x nos seguintes pares de triângulos semelhantes.



7. Para descobrir a altura de um prédio, João mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de João, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

a) $50m$ b)$56m$ c)$60m$ d)$66m$ e)$70m$

Chegamos ao fim de mais uma lição para recapitular leia o resumo a seguir.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição você aprendeu a semelhança de triângulos e aplicou critérios de semelhança na resolução de exercícios. Uma chamada de atenção foi dada ao facto de antes de resolver exercícios ser preciso primeiro saber se os triângulos são ou não semelhantes, pois corre-se o risco de aplicar critérios de semelhança em triângulos que não são semelhantes.

Compare os seus resultados com os que são apresentados.

Chave de Correcção

1. a) F b)F c)V d)F e)F
2. $Y = 15 \quad x = \frac{40}{3}$
3. c)$2{,}4\ m$
4. $2{,}12m$
5. 57,6 m
6. a) 6 cm b) 12,6cm c) 2,7cm
7. b)$56m$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 22: Casos de semelhança: Demonstração do teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos

Introdução

Estimado aluno, depois de termos abordado na lição anterior o teorema de Thales, , nesta lição vamos abordar os casos de semelhança de triângulos, centrando na demonstração do teorema de Pitágoras aplicando a semelhança de triângulos.

Muita atenção!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Demonstrar o teorema de Pitágoras aplicando semelhança de triângulos.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

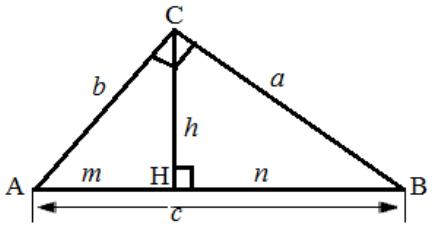
Demonstração do teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos

Caro aluno, na geometria 4 Modulo 4, falamos de Teorema de Pitágoras, onde para além do seu enunciado, fizemos a sua demonstração usando gravuras. Nesta aula vamos recordar o teorema de Pitágoras incluindo a sua demonstração.

Conforme já vimos no módulo 4, o teorema de Pitágoras diz:

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

Vamos demonstrar o teorema de Pitágoras, aplicando a semelhança de triângulos. Consideremos a figura abaixo de triângulos rectângulos semelhantes:



Os triângulos$\Delta[ABC]$ e $\Delta[BCH]$ são semelhantes, isto é, $\Delta[ABC]\sim\Delta[BCH]$ porque têm ângulos rectos e o ângulo B é comum. Então podemos relacionar os seus lados proporcionais. Assim:$\frac{a}{n}=\frac{c}{a}$, pela regra de três simples, sabendo que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos e teremos:

$$\frac{a}{n}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow a\times a=n\times c \leftrightarrow a^2=n\times c;$$

Venda proibida

Os triângulos$\Delta[ABC]$ e $\Delta[ACH]$ são semelhantes porque ambos têm ângulos rectos e um ângulo A comum. Isto é: $\Delta[ABC]\sim\Delta[ACH]$. Então, podemos relacionar os seus lados proporcionais. Assim: $\frac{b}{m}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow b\times b=m\times c\Leftrightarrow b^2=m\times c$. Se adicionarmos ambas as relações, teremos:

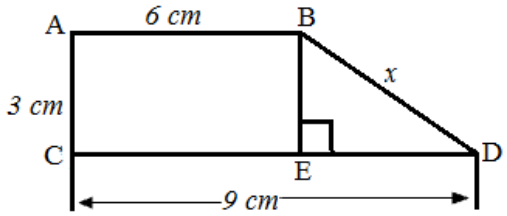
$(a^2=n\times c)+(b^2=m\times c)\Leftrightarrow a^2+b^2=n\times c+m\times c$, Vamos colocar em evidência o factor comum c, teremos: $\Leftrightarrow a^2+b^2=c(n+m)$, trocamos a posição dos membros e teremos, $\Leftrightarrow c(n+m)=a^2+b^2$, portanto, $n+m=c$, podemos substituir na expressão e teremos: $\Leftrightarrow c(n+m)=a^2+b^2\Leftrightarrow c\times c=a^2+b^2$,

$\Leftrightarrow \boldsymbol{c^2=a^2+b^2}$, Portanto $\boldsymbol{c}-$ é $hipotenusa, \boldsymbol{a}-$ é $cateto1$ $e\boldsymbol{b}-$ é $cateto2$.

Assim temos o teorema de Pitágoras que vulgarmente é traduzido pela fórmula:

$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow h^2={c_1}^2+{c_2}^2}$$

Exemplo: Considerando os dados da figura seguinte, determine o valor de $\boldsymbol{x}$.



Portanto, para determinar o valor de $\boldsymbol{x}$, devemos prestar atenção no triângulo rectângulo, $\Delta[BDE]$, repara que o segmento $|BE|$ é igual ao segmento$|AC|$,logo$|BE|$=$|AC|=3cm$;

O segmento$|AB|$ é igual ao segmento $|CE|$, logo,$|AB|=|CE|=6cm$. Então, podemos determinar o segmento$|ED|=|CD|-|CE|\Leftrightarrow |ED|=9cm-6cm\Leftrightarrow |ED|=3cm$.

Então, já temos os dois catetos do triângulo$\Delta[BDE]$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa que corresponde o lado $\boldsymbol{x}$:

Usando a fórmula:

$\boldsymbol{h^2={c_1}^2+{c_2}^2}$,veja que $|BE|=c_1=3cm, |ED|=c_2=3cm$

e $x=h$; Substituindo na fórmula teremos: $\boldsymbol{h^2={c_1}^2+{c_2}^2\Leftrightarrow x^2=(3cm)^2+(3cm)^2\Leftrightarrow x^2=9cm^2+9cm^2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2=18cm^2}$ Envolvendo ambos os membros por raiz quadrada teremos:

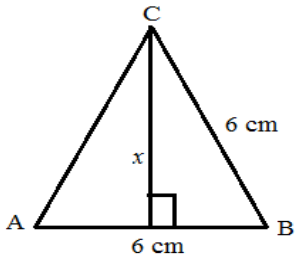
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2=18cm^2\Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{18cm^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{9\times 2cm^2}}$, extraímos o factor possível para fora de radical e teremos: $\boldsymbol{x=3\sqrt{2}cm}$.

Caro aluno, depois de termos abordado o conteúdo sobre teorema de Pitágoras, você pode estar em condições de resolver exercícios abaixo propostos

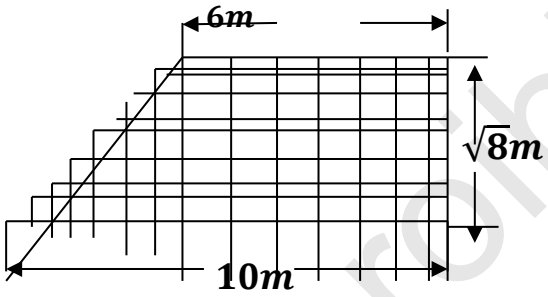
Venda proibida

Exercícios

1. Considere o triângulo abaixo e determine o valor de $\boldsymbol{x}$.



2. Considere a figura abaixo, determine a inclinação da armadura de uma parede, tendo em conta os dados.



Confira a seguir o Resumo da Lição.

Resumo da Lição

Nesta lição, você recordou o teorema de Pitágoras, onde para além do seu enunciado, aprendeu a sua demonstração usando os conhecimentos que já tinha sobre a semelhança de triângulos.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. $5\ cm$
2. $2\sqrt{6}m$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 23: Resolução de problemas práticos aplicando a semelhança de triângulos e os teoremas de Thales e de Pitágoras

Introdução

Estimado aluno, depois de ter abordado, na lição anterior, o teorema de Pitágoras, nesta vai resolver os problemas que têm relação com o dia-a-dia aplicando o teorema de Pitágoras e de Thales.

Chamamos desde já a sua atenção!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar a semelhança de triângulos na resolução de problemas práticos;
- Aplicar o teorema de Thales na resolução de problemas práticos;
- Aplicar o teorema de Pitágoras na resolução de problemas práticos.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

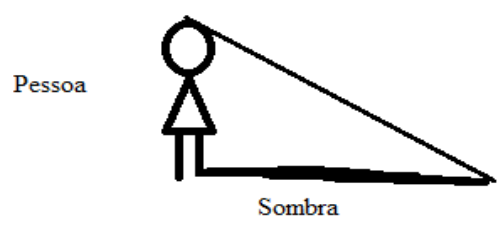
Resolução de problemas

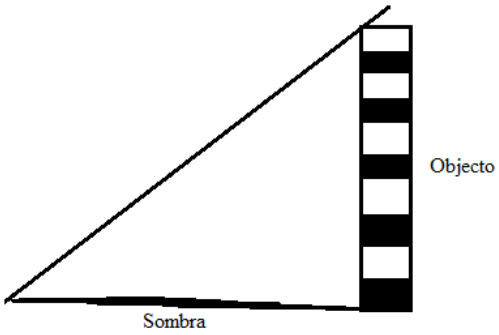
Uma das grandes aplicações da semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e de Thales é determinar as medidas dos objectos, edifícios e outros, que pode ser feita a partir das suas sombras.

Aplicação de semelhança de triângulos na resolução de problemas práticos

Vamos considerar a seguinte situação em que numa determinada hora do dia, uma pessoa de 1,80m de altura projecta uma sombra de 2,40m, no mesmo instante um objecto próximo de altura desconhecida projecta uma sombra de 12m. Qual é a altura do objecto?

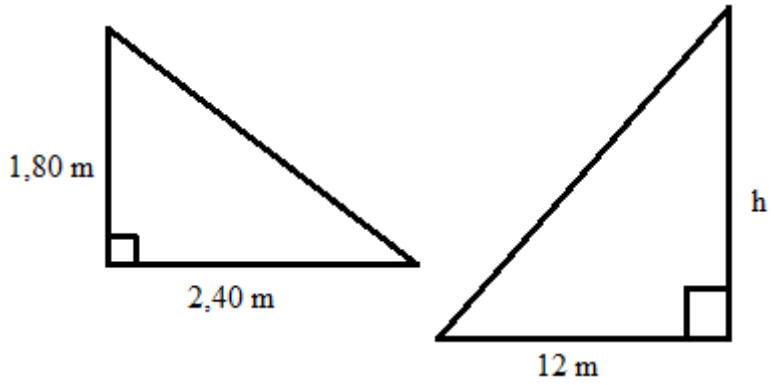
Primeiro vamos interpretar o problema esquematizando-o:





Venda proibida

Olhando para as duas situações, nota-se que as alturas, tanto da pessoa, como do objecto, na perpendicular em relação ao solo, portanto faz ângulo de 90º; como as sombras são projectadas no mesmo instante e a pessoa está próxima do objecto, o ângulo de incidência do Sol é o mesmo. Portanto, forma se dois triângulos semelhantes, isto é:



Tendo os dois rectângulos semelhantes, podemos definir a seguinte proporção:

$$\frac{altura}{sombra} = \frac{altura}{sombra} \Leftrightarrow \frac{1{,}80\ m}{2{,}40\ m} = \frac{h}{12\ m}$$

Resolvendo esta igualdade, teremos:

$$\frac{1{,}80\ m}{2{,}40\ m} = \frac{h}{12\ m} \Leftrightarrow \frac{18\ m}{24\ m} = \frac{h}{12\ m}$$

$$\Leftrightarrow 18m\ .\ 12\ m = 24m\ .\ h$$

$$\Leftrightarrow 24m\ .\ h\ = 18m\ .\ 12\ m$$

$$\Leftrightarrow\ h\ = \frac{18m\ .\ 12\ m}{24m}$$

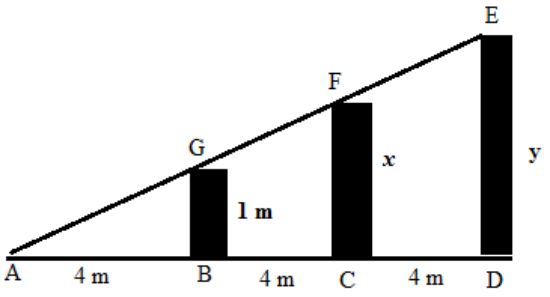
$$\Leftrightarrow\ h\ = \frac{18m\ .\ 12\ m}{24m}\ =\ \frac{216m^2}{24\ m} = 9m$$

Assim, podemos responder que a altura do objecto é de 9 m.

Aplicação de teorema de Thales na resolução de problemas práticos

Podemos aplicar o teorema de Thales para resolvermos problemas práticos do quotidiano, tal como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo: Pretende-se construir uma rampa para a lavagem de viaturas, a qual deve ser sustentada por três pilares veja a figura2. Determine as alturas $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ dos dois pilares.



Venda proibida

Portanto, estamos numa situação de duas rectas transversais no ponto A, e os pilares são rectas paralelas, então podemos aplicar o teorema de Thales. Vamos relacionar os lados proporcionais dos triângulos. Assim: $\frac{|CF|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AB|}; \frac{|DE|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|AC|}$, Então, podemos substituir pelos respectivos valores começando com a relação, $\frac{|CF|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Leftrightarrow \frac{x}{1m} = \frac{8m}{4m} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{1m \times 8m}{4m}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2m}$.

Em seguida vamos substituir na relação:$\frac{|DE|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{12m}{8m}$, o valor de $\boldsymbol{x}$ já calculamos, podemos substituir, teremos: $\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{12m}{8m} \Leftrightarrow \frac{y}{2m} = \frac{12m}{8m} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{2m \times 12m}{8m}} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 3m}$.

Aplicação de teorema de Pitágoras na resolução de problemas práticos

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras para resolvermos problemas práticos do quotidiano, tal como podemos observar no exemplo abaixo.

Exemplo:

Consideremos a figura do exercício anterior, depois de calcular os valores de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$, qual será o comprimento da rampa?

Portanto, devemos considerar, o triângulo$\Delta[ADE]$, veja que o mesmo é recto, então podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da rampa, isto é:

$\boldsymbol{h^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2}$, neste caso a rampa é hipotenusa que é o segmento $h = |AE| =?$, o cateto1 será o segmento$\boldsymbol{|AD| = c_1 = 12m}$, o cateto2 será o segmento $\boldsymbol{|DE| = c_2 = y = 3m}$, então podemos substituir na formula $\boldsymbol{h^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 \Leftrightarrow h^2 = (12m)^2 + (3m)^2}$;

$\boldsymbol{\Leftrightarrow h^2 = 144m^2 + 9m^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{144m^2 + 9m^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{153m^2}}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow h = \sqrt{153m^2} \Leftrightarrow h = 12,369m}$.

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre problemas práticos da vida aplicando a semelhança de triângulos e os teoremas de Thales e de Pitágoras, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

Exercícios

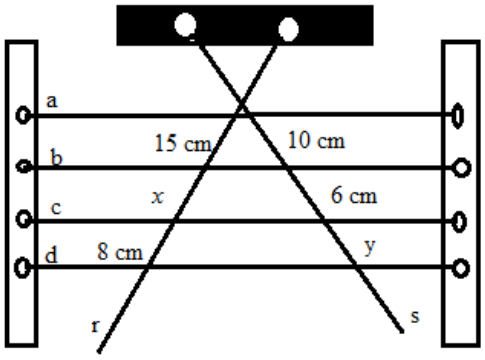
Copie para o seu caderno e resolva.

1. Em determinado momento do dia, um pilar de 1m de comprimento, faz sombra de 1,5m neste mesmo momento, uma árvore próxima faz sombra de 9m. Qual é a altura da árvore em metros?

2. Para descobrir a altura de um prédio, Maria mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Maria, que tem 1,6 metros de altura, a sombra da Maria media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

Venda proibida

3. Ao realizar a instalação eléctrica de um edifício, um electricista observou que os dois fios r e s eram transversais aos fios da rede central demonstrados por **a, b, c, d**. Sabendo disso, calcule o comprimento $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ da figura ao lado.



Chegamos ao fim desta lição, confira o resumo a seguir.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a aplicação da semelhança de triângulos e dos teoremas de Pitágoras e Thales na resolução de alguns problemas do nosso dia-a-dia.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. 6 m
2. 56 m
3. $x = 9cm \; e \; y = 5{,}33 \; cm$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 24: Polinómios

Introdução

Estimado aluno nesta lição vamos falar de polinómios. Vamos aprender o que é um polinómio, que relação tem um polinómio com um monómio.

Sendo assim, chamamos a sua atenção para esta lição.

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Definir Polinómio;
- Determinar o grau de um polinómio;
- Adicionar polinómios;
- Subtrair polinómios.

Para a melhor compreensão desta lição, você necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Polinómios

Chama-se polinómio à soma algébrica de monómios.

Exemplo:

Consideremos os monómios: $\mathbf{2x^2}$; $\mathbf{7x}$ **e** $\mathbf{6}$. A sua soma será a seguinte: $\mathbf{2x^2 + 7x + 6.}$

Veja que todos os três monómios não são semelhantes, porque têm partes literais diferentes, então, esta soma de monómios não semelhantes chama-se **polinómio.**

Os monómios que compõem os polinómios são designados de termos. Neste caso os termos são:$\mathbf{2x^2}$; $\mathbf{7x}$ **e** $\mathbf{6}$.

Outros exemplos:

- $9x^3 + 5x^2 - 5x + 4$
- $120x^2 - 10x + 9$
- $10x^3 + x^2 - 9x$
- $14x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 60x - 100$
- $6x + 5$
- $\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
- $6xy + 2xy^3z$
- $x^2yz^5 - 7xz^4 + 4x + 12$

Cada um dos monómios que figura em cada polinómio, chama-se **termo** do polinómio. Considerando o polinómio: $14x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 60x - 100$,

Venda proibida

Este polinómio tem 5 termos que são: $14x^4; 7x^3;\ -20x^2;\ -60x\ ;\ -100$

Caro aluno, deve notar que alguns polinómios têm nomes específicos tais como:

- ✓ Polinómio com dois termos chama-se binómio: $2x + 3$;
- ✓ Polinómio com três termos chama-se trinómio: $x^2 + 2x + 5$.

Grau de um polinómio

Grau de um polinómio é o mais elevado grau dos seus termos

Consideremos o polinómio: $\mathbf{5x^2 + 3xz - y^3}$**.** Determinemos os graus dos seus monómios:

O monómio:$\mathbf{5x^2}$tem grau **2**;

O monómio: $\mathbf{3xz}$ tem grau **2**;

O monómio:$-\mathbf{y^3}$ tem grau **3**. Portanto, o monómio que tem maior grau é $\mathbf{y^3}$**,** cujo seu grau é **3. Logo, o grau de polinómio** $\mathbf{5x^2 + 3xz - y^3}$ **é 3.**

Outros exemplos:

- ✓ $10x^3 + x^2 - 9x$ polinómio de grau 3 ou terceiro grau;
- ✓ $x^{10} + 4x^2 - 9x$ polinómio de grau 10.
- ✓ $2x^2yz^5 - 3xz + \frac{1}{3}xy^2$ polinómio de grau 8;

OPERAÇÕES COM POLINÓMIOS

Adição e subtracção de polinómios

Para **adicionar ou subtrairmos polinómios** - é necessário verificar os monómios semelhantes, caso existam então devemos adicionar ou subtrair os seus coeficientes e manter a parte literal.

Adição de Polinómios

Exemplos:

1. Sejam dados polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5\ \ e\ \ B(x) = x^2 - 2x + 7$.

Calcule: $A(x) + B(x)$

$A(x) + B(x) = (2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 2x + 7) = 2x^2 + x^2 + 3x - 2x - 5 + 7$

$= (2 + 1)x^2 + (3 - 2)x + (-5 + 7)$

$= 3x^2 + x + 2$

2. Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5\ \ e\ \ B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$. Calcula:

$A(x) + B(x)$.

$A(x) + B(x) = (2x^2 + 3x - 5) + (\frac{x^2}{2} - x + 3)$

$= \left(2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + (3 - 1)x + (-5 + 3)$

$= \frac{5}{2}x^2 + 2x - 2$

Venda proibida

Subtracção de polinómios

Exemplos:

Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5$ e $B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$ Calcula: $A(x) - B(x)$.

$$A(x) - B(x) = (2x^2 + 3x - 5) - (\frac{x^2}{2} - x + 3)$$
$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + [3 - (-1)]x + (-5 - 3)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 + 4x - 8$$

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre polinómios, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

Exercícios

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre polinómios, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

1. Indique o valor lógico **V** para polinómios e **F** para os que não são polinómios:

a) $\frac{3}{2}x^4 - 3x^4 + x^4$

b) $x^2 + 3(xz)^3 + z^5$

c) $2017x^5 - 3y^5 + 17$

d) $\left(-\frac{7}{3}xyz\right)^3 + x^4 + (15)^{20}$

e) $\frac{8}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 21x$

f) $-25t^3 - t^3$

2.Indique o grau dos seguintes polinómios:

a) $\frac{3}{2}x^5 - 3x^4 + x^7$

b) $x^2 + 3(xz)^3 + z^5$

c) $2017x^5 - 3y^2 + 17$

d) $\left(-\frac{7}{3}xyz\right)^3 + x^4 + (15)^{20}$

e) $\frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2yz - 21x$

f) $3^{18} - 25t^2 - y^3$

3. Considere os polinómios: $A = 2x^2 + x - 2$; $B = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$ e $C = -x^3 - 3x$.

Determine: a) $A + B$ b) $A - B$ c) $B - C$ d) $A - C + B$

Chegamos ao fim desta lição, confira a seguir o resumo que é apresentado.

Resumo da Lição

Nesta lição, aprendeu o que são polinómios, grau de polinómio e operações de adição e subtracção de polinómios. Consideramos grau do polinómio ao expoente máximo que figura nos seus monómios.

Venda proibida

Realçamos igualmente que para adicionar e subtrair polinómios, devemos fazer entre os monómios semelhantes.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a)(F); b)(V); c) (V); d)(V) ; e)(V) f) (F)

2. a) Grau 7 ; b) Grau 6 ; c) Grau 5 ; ; d) Grau 9 ; e) Grau 4 ; f) Grau 3.

3. a) $A+B=\frac{3}{2}x^2-2x-3$

   b) $A-B=\frac{5}{2}x^2+4x-1$

   c) $B-C=x^3-\frac{1}{2}x^2-1$

   d) $A-C+B=x^3+\frac{3}{2}x^2+x-3$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 25: Multiplicação de polinómios

Introdução

Caro aluno, na lição anterior estudou polinómios. Nesta vai ver a multiplicação de polinómios, começando por efectuar a operação de multiplicação de monómio por um polinómio, e a seguir a operação de multiplicação de um binómio por um polinómio.

Bom trabalho!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Multiplicar um polinómio por um monómio
- Multiplicar um polinómio por um binómio;
- Multiplicar dois binómios;
- Aplicar as propriedades da multiplicação.

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Multiplicação de polinómios por um monómio

Para multiplicar um monómio por um polinómio aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Exemplos:

- ✓ $x \cdot (x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 = x^2 + 3x$

  Neste caso, distribuímos o monómio $\boldsymbol{x}$ por todos os termos do binómio $\boldsymbol{x + 3}$
- ✓ $2y \cdot (x^2y - y^2 + 2) = 2y \cdot x^2y - 2y \cdot y^2 + 2y \cdot 2 = 2x^2y^2 - 2y^3 + 4y$

Distribuímos o monómio $\boldsymbol{2y}$ por todos termos do polinómio $\boldsymbol{x^2y - y^2 + 2}$

Multiplicação de polinómios

Multiplicação de um polinómio por um binómio

Para multiplicar um polinómio por um binómio, deve-se distribuir os termos de binómio por todos termos do polinómio. Lembre-se que **Binómio** é um polinómio com dois termos.

Exemplos:

Venda proibida

1. Considerando o binómio $\boldsymbol{x+3}$, multiplicar pelo polinómio $\boldsymbol{x^2+x-1}$. Vamos distribuir o termo $\boldsymbol{x}$ por todos termos do polinómio $\boldsymbol{x^2+x-1}$ e a seguir distribuir o termo $\boldsymbol{3}$ por todos os termos do ploinomio $\boldsymbol{x^2+x-1}$.

$$(\boldsymbol{x+3})\times(\boldsymbol{x^2+x-1}) = x\times(\boldsymbol{x^2+x-1}) + 3\times(\boldsymbol{x^2+x-1})$$
$$= x^3 + x^2 - x + 3x^2 + 3x - 3$$
$$= x^3 + x^2 + 3x^2 - x + 3x - 3$$
$$= x^3 + 4x^2 + 2x - 3$$

2. Considerando o binómio $\boldsymbol{x-\frac{1}{2}}$, multiplicar pelo polinómio $\boldsymbol{x^2+2x-4}$, vamos distribuir o termo $\boldsymbol{x}$ por todos termos do polinómio $\boldsymbol{x^2+2x-4}$ e a seguir distribuir o termo $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ por todos os termos do polinómio $\boldsymbol{x^2+2x-4}$.

✓ $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+2x-4) = x\cdot(x^2+2x-4) - \frac{1}{2}\cdot(x^2+2x-4)$, daqui vamos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e subtração, distribuindo cada monómio por todos termos do polinómio.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+2x-4) = x\cdot(x^2+2x-4) - \frac{1}{2}\cdot(x^2+2x-4)$$
$$= x^3+2x^2-4x-\frac{x^2}{2}-x+2 = x^3+\frac{3x^2}{2}-5x+2$$

Produtos notáveis.

Consideremos a multiplicação do binómio $\boldsymbol{x+2}$ pelo $\boldsymbol{x+2}$

✓ $(x+2)\cdot(x+2) = x\cdot(x+2)+2(x+2) = x\cdot x+2\cdot x+2\cdot x+2.2$
$$= x^2+2x+2x+2.2 = x^2+4x+4$$

Repare que o primeiro membro é um binómio que se repete multiplicando, isto é $(x+2)\cdot(x+2)$ que também pode ser escrito da seguinte forma: $(x+2)^2$ isto lê -se **quadrado de uma soma de monómios**.

Igualando as duas expressões teremos: $(x+2)^2 = x^2+4x+4$

$$\boldsymbol{(x+2)^2 = x^2+2.2x+2^2}$$

O **quadrado de uma soma de monómios** é um caso particular da multiplicação de polinómios.

Para além deste caso, podemos encontrar outro caso que é quadrado de uma diferença de monómios:

$$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x.(x-3) - 3.(x-3)$$
$$= x.x - x.3 - 3.x + 3.3$$
$$= x^2 - 3x - 3x + 3^2$$
$$= x^2 - 2.3x + 3^2$$
$$\boldsymbol{(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9}$$

O **quadrado de uma diferença de monómios** é também um caso particular da multiplicação de polinómios.

Venda proibida

Por fim encontramos a **diferença de quadrados** como um outro caso notável na multiplicação de polinómios:

Quadrado da soma	Quadrado da diferença	Diferença de quadrados
$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ $= a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2 = (a-b)$ $\cdot(a-b)$ $= a^2-2ab+b^2$	$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$

- $(x-5).(x+5) = x.(x+5) - 5(x+5) = x.x + x.5 - 5.x - 5.5$

$$= x^2 + 5x - 5x - 5^2$$

$$= x^2 - 5^2$$

$$\boldsymbol{(x-5).(x+5) = x^2 - 5^2}$$

Generalizando teremos os seguintes casos notáveis da multiplicação de polinómios:

Nota:

- $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ O primeiro lê-se quadrado de uma soma cujo seu desenvolvimento encontra-se na igualdade acima e o segundo a soma de quadrados.
- $(a-b)^2 \neq a^2-b^2$ O primeiro lê-se quadrado de uma diferença cujo seu desenvolvimento encontra-se na segunda coluna da tabela a cima e o segundo diferença de quadrados que está na terceira coluna da tabela a cima.

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre multiplicação de polinómios, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

Exercícios

Copie para o seu caderno e resolva:

1. Efectue as seguintes operações:
   a) $(3x)\times(2x-x^2)$
   b) $\left(-\frac{5}{3}x\right)\times\left(-x^3+\frac{9}{10}\right)$
   c) $y^3(x+y)$
   d) $4xy(2xy^2-y^3+1)$

2. Efectue os seguintes produtos:
   a) $(2x-2)\times(x^2+x)$
   b) $(-4+x)(-1+2x-x^2)$
   c) $(6x^3+2-x)(x+2)$
   d) $\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)(8x^2-6)$

3. Desenvolva cada uma das expressões:
   a) $(x+1)(x+1)$ **b)** $(x+2)^2$ **c)** $(y-3)(y-3)$

Venda proibida

d) $\left(c-\frac{1}{2}\right)^2$ **e)** $(z-5)(z+5)$ **f)** $(3x+3)(3x+3)$

Terminou mais uma lição, confira a seguir o resumo que é apresentado.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a efectuar operação de multiplicação de polinómios. Na multiplicação de polinómios, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e subtracção, onde cada termo de um dos polinómios multiplica por todos termos do outro polinómio.
Ainda na multiplicação de polinómios, foi notável a situação da multiplicação de um binómio por si mesmo ou de um binómio pelo seu conjugado, que nos dá os casos notáveis da multiplicação de polinómios.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a)$6x^2-3x^3$
   b) $\frac{5}{3}x^4-\frac{3}{2}x$
   c) xy^3+y^4
   d) $8x^2y^3-4xy^4+4xy$

2. a)$2x^3-2x$
   b) $-x^3+6x^2-9x+4$
   c) $6x^4+12x^3-x^2+4$
   d) $4x^4-8x^3-3x^2+6x$

3. a) x^2+2x+1 b) x^2+4x+4 c) y^2-6y+9 d) $c^2-c+\frac{1}{4}$ e) z^2-25
   f) $9x^2+18x+9$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 26: Decomposição de um polinómio

Introdução

Caro aluno, na lição anterior falamos sobre multiplicação de polinómios. Nesta, vamos dar continuidade a esses conteúdos, falando da decomposição de polinómios, aplicando os conhecimentos adquiridos na multiplicação de polinómios.

Tenha um bom estudo!

Objectivos da Lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Decompor um polinómio em factores, tendo em conta o factor comum e os casos notáveis.
- Dividir um polinómio por um monómio

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 120 minutos no mínimo.

Decomposição de um polinómio

Decompor ou factorizar um polinómio é obter uma expressão equivalente escrita na forma de um produto.

Caro aluno, para decompor um polinómio, iremos usar dois caminhos, mediante cada situação específica.

1. Decomposição de polinómios usando colocação do factor comum em evidência

Para decompor um polinómio colocando o factor comum em evidência é necessário primeiro verificar em todos factores do polinómio quais são os que são comuns.

Exemplos:

Exemplo 1: Consideremos o polinómio seguinte**:** $(\boldsymbol{x^2 + 2x})$**;** vamos decompô-lo.

Para tal, verificamos o factor comum. Este polinómio pode ficar também da seguinte maneira: $\boldsymbol{x^2 + 2x = xx + 2x}$**,** neste caso o factor que é comum nos dois termos é $\boldsymbol{x}$, pois, é o termo que existe nos dois monómios $\boldsymbol{xx}$ e $\boldsymbol{2x}$ ao mesmo tempo. Este factor pode se colocar em evidência, isto é, fora de parêntesis.

$x^2 + 2x = x(x + 2)$ Deste modo, o polinómio $x^2 + 2x$ está factorizado em dois factores que são: x e $(x + 2)$.

Venda proibida

Exemplo 2: Dado o polinómio, $y^3 - 2y^2 + 3y$ vamos factorizar.

Este polinómio tem como factor comum y sendo assim, o polinomio pode ser escrito da seguinte forma: $y^3 - 2y^2 + 3y = yyy\ - 2yy + 3y\ =\ y(y^2 - 2y + 3)$

$y^3 - 2y^2 + 3y = y(y^2 - 2y + 3)$ Deste modo, o polinómio esta factorizado.

2. Decomposição de polinómios usando casos notáveis da multiplicação de polinómios

Exemplos:

- ✓ $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$. Este polinómio factorizamos usando caso notável diferença de quadrados.
- ✓ $y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 = (y + 2)^2 = (y + 2) \cdot (y + 2)$ Este polinómio factorizamos, usando caso notável quadrado de uma soma.

Divisão através da simplificação de um polinómio por um monómio

Para dividir um polinómio por um monómio, é necessário identificar o factor comum entre o dividendo (que é o polinómio) e o divisor (que é o monómio).

Exemplos:

1. Determinemos a divisão de $2xy\ + 3x^2y$ por xy.

   Primeiro vamos identificar o factor comum no polinómio $2xy\ + 3x^2y$ e em seguida factorizar, isto é:

   $2xy\ + 3x^2y$ Factor comum neste polinómio é xy, assim, $2xy\ + 3x^2y\ = xy(2\ + 3x)$ Temos o polinómio factorizado.

   A seguir, vamos efectuar a divisão de $2xy\ + 3x^2y$ por xy ou seja: $(2xy\ + 3x^2\ y)\ \div xy\ \Leftrightarrow$ $\frac{2xy\ +3x^2y}{xy}\ =\ \frac{xy(2\ +3x)}{xy}$, neste caso simplificando xy do numerador com do denominador, teremos $2 + 3x\ = 3x + 2$ este é o resultado da divisão de $2xy\ + 3x^2y$ por xy.

2. Determinemos a seguinte divisão:$\left(\mathbf{14x^3t^2y^6 - 28x^5t^2y^5 + 21kx^3t^2y^5}\right) \div (\mathbf{7x^2t^2y^3}) =$ $\frac{\mathbf{14x^3t^2y^6-28x^5t^2y^5+21kx^3t^2y^5}}{\mathbf{7x^2t^2y^3}}$; primeiro vamos identificar o factor comum de polinómio$\mathbf{14x^3t^2y^6 - 28x^5t^2y^5 + 21kx^3t^2y^5}$e do monómio$\mathbf{7x^2t^2y^3}$. Portanto o factor comum é o monómio$\mathbf{7x^2t^2y^3}$. Que podemos identificar factorizando os coeficientes dos monómios de polinómio, na divisão. Isto é:

$\frac{\mathbf{7\times2x^2x^1t^2y^3y^3-7\times4x^3x^2t^2y^3y^2+7\times3kx^1x^2t^2y^3y^2}}{\mathbf{7x^2t^2y^3}}$ **=;** colocando em evidência o factor comum, teremos:

$= \frac{\mathbf{(7x^2t^2y^3)\times(2x^1y^3-4x^3y^2+3kx^1y^2)}}{\mathbf{7x^2t^2y^3}}$ **=;** Agora podemos simplificar os monómios comuns. Assim:

Venda proibida

$= \frac{(7x^2t^2y^3)\times(2x^1y^3-4x^3y^2+3kx^1y^2)}{7x^2t^2y^3} = (\mathbf{2x^1y^3 - 4x^3y^2 + 3kx^1y^2}) = \mathbf{2xy^3 - 4x^3y^2 + 3kxy^2}$. Esta última expressão é o resultado da divisão**.**

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre decomposição de polinómios, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

Exercícios

Copie para o seu caderno e resolva.

1. Decomponha os seguintes polinómios:
   a) $3x - 3$
   b) $6a - 3a^2$
   c) $4y + 2$
   d) $x^2 + 6x + 9$
   e) $x^2 + 2x$
   f) $4y^2 - 8y + 4$
   g) $x^2 - y^2$
   h) $z^2 + 2z + 1$
   i) $x^2 - 9$
   j) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

2. Efectue as seguintes operações, simplificando os resultados:
   a) $(18x^5 - 24x^3 + 6x^2) \div 3x^2$
   b) $\frac{(17x^5y^3+34x^3y^2)}{17x^3y^2}$
   c) $(y^2 - 30y) \div (y)$
   d) $\frac{13x^2y^5-26x^2ky^5-13x^2y^5z}{26x^2y^5}$
   e) $\left(\frac{50x^2}{16} - \frac{x^2z^2}{16}\right) \div \left(\frac{x^2}{16}\right)$
   f) $\frac{7y^4k+49y^3k-14y^3kx}{14y^3k}$

Chegamos ao fim desta lição, confira a seguir o resumo.

Resumo da Lição

Nesta lição, você aprendeu a decompor polinómios colocando o factor comum em evidência, assim como aplicando os casos notáveis da multiplicação de polinómios. Para além da decomposição, aprendeu igualmente efectuar a divisão de um polinómio por um monómio.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Venda proibida

Chave de Correcção

1.a) $3(x-1)$ b) $3a(2-a)$ c) $2.(2y+1)$ d) $(x+3)(x+3)$

e) $x.(x+2)$ f) $(2y-2).(2y-2)$ g) $(x-y).(x+y)$ h) $(z+1).(z+1)$

i) $(x-3).(x+3)$ j) $\left(x-\frac{1}{2}\right).\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2. a) $6x^4-8x+2$ c) $y-30$ e) $50-z^2$

b) x^2y+2 d) $\frac{1-2k-z}{2}$ f) $\frac{y-2x+7}{2}$

Venda proibida

Teste de Preparação

Teste do fim do Módulo 04

1. Das afirmações abaixo**, i**ndique com V as verdadeiras e com F as falsas:

a) Dois triângulos equiláteros sempre são congruentes. ____

b) Um feixe de rectas paralelas determina sobre duas rectas transversais segmentos proporcionais. _____

c) Num triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é sempre igual a 180º. ____

d) Num paralelogramo a soma dos ângulos adjacentes é igual a 360º. _____

e) O quadrado é um paralelogramo. _____

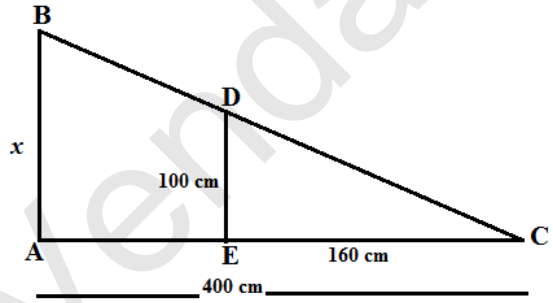
2. Um triângulo rectângulo possui área igual a 24 cm². Sabendo que a sua base mede 6 cm, a medida da hipotenusa é:

a) 4 cm b) 6 cm c) 10 cm d) 8 cm e) 12 cm

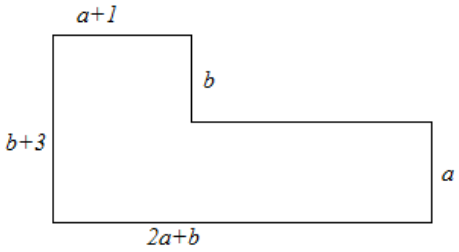
3. Resolva os sistemas de inequações a baixo

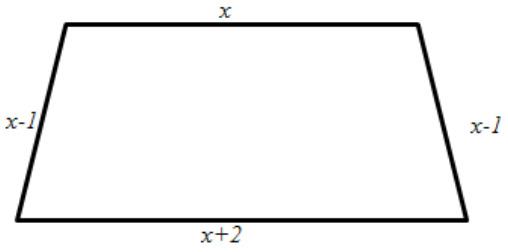
a) $\begin{cases} 2x+6 \geq 2 \\ x+3 < 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(5x-3) < 4 \\ 2(3x+4) \geq 2x+5 \end{cases}$

4. Dada a figura a baixo, sabe se que $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Determina a medida $\boldsymbol{x}$.



5. Dadas figuras a baixo, encontre as fórmulas para o cálculo do perímetro de cada uma.





6. Sejam dados os polinómios: $A(x) = \frac{1}{2}x$ $B(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 - x + 1$

$C(x) = x + 2$ $D(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$ Calcula:

a) $A(x) + C(x)$ d) $A(x) \cdot C(x)$ g) $C(x) \cdot B(x)$

Venda proibida

b) $B(x) + D(x)$ e) $[C(x)]^2$ h) $[A(x)]^2 \cdot D(x)$

6.1. Decompõe o polinómio $C(x) = x + 2$.

7. Efectue e simplifique o resultado**:**

a) $-5\sqrt{9} + 2\sqrt{169} =$ b) $10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} =$ c) $\sqrt{18} + 2\sqrt{50} =$

d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} =$ e) $\sqrt{5} \cdot (1 + \sqrt{5}) =$ f) $(3\sqrt{2} - 2) \cdot (\sqrt{2} + 3) =$

g) $\sqrt{50} \div \sqrt{2} =$ h) $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} =$ i) $\dfrac{12\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2}} =$

Venda proibida

Chave de Correcção

1. a) F b) V c) V d) F e) V
2. c) 10 cm
3. a) $x \in [-2,-1[$ b) $x \in \left[-\frac{3}{4},1\right[$
4. $x = 250\ cm$
5. a) $5a + 4b + 3$ b) $4x$
6. a) $\frac{3}{2}x + 2$ b) $x^5 - 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + 1$ c) $x^5 - 4x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x - 1$
   d) $\frac{x^2}{2} + x$ e) $x^2 + 4x + 4$ f) $\frac{5}{4}x^2 + 4x + 4$
   g) $x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 10x^3 - 5x^2 - x + 2$

6.1. $2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

7. a) 11 b) $13\sqrt[3]{2}$ c) $13\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{24}$ e) $5 + \sqrt{5}$ f) $7\sqrt{2}$ g) 5 h) $\frac{7}{5}$ i) $4\sqrt[3]{3}$

Venda proibida

Bibliografia

Amaral, a. J., & Nhalungo, C. (2004). *As maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Chuquela, N. J., & Langa, N. (2008). *Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Gelson Iezzi & Samuel Hazzan, (2004). Fundamentos de Matemática Elementar – Conjuntos e funções – Vol.1 8ª edição SP Atual editora.

Giovane José Rui & Bonjorno José Roberto (1992). Matemática 1º e 2º grau, S. Paula, Editora FTD S.A.

Guibundana, D., & Sapatinha, J. C. (2009). *Saber Matemática.* Maputo: Logman Moçambique Lda.

Langa, H., & Chuquela, N. J. (2010). *Matemática.* Maputo: Plural editora.

Nhezi Ismael *Cassano (*2005). M10 Matemática 10ª classe*,* Lda, Moç.Texto Editores,

Sapantinha, J. C., & Guibundana, D. H. (2010). *saber Matemática.* Maputo: Longman Mocambique.

Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números.* Maputo: Texto Editores

Venda proibida

IEDA