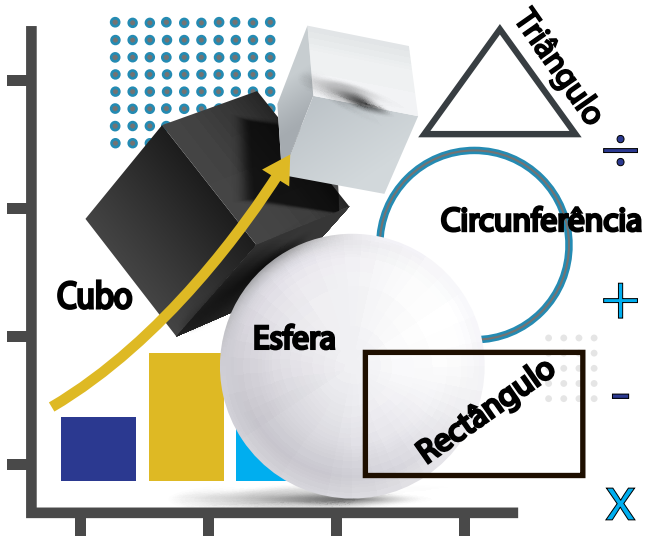
República de Moçambique
Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto de Educação Aberta e à Distância

MATEMÁTICA



MÓDULO 3

Venda proibida

Programa do Ensino Secundário à Distância - 1º Ciclo

PESD I

Módulo 3 de Matemática

Venda proibida

Moçambique – 2023

Ficha Técnica

© Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Título:

Módulo 3 de Matemática

Direcção Geral:

- Manuel José Simbine (Director Geral)
- Luís do Nascimento Paulo (Director Geral Adjunto)

Coordenação:

- Castiano Pússua Gimo (Chefe do Departamento Pedagógico)

Elaboração:

- Abel Ernesto Uqueio Mondlane
- Luís do Nascimento Paulo
- Adélia Machaieie
- Gina Guibunda
- Anselmo Chuquela
- Helena Simone
- Onélio da Mena

Revisão Instrucional:

- Simão Arão Sibinde

Revisão Científica:

- Argentino Gonçalves Nunes
- Benedito Tomás

Revisão Linguística:

- Luís Uamusse

Ilustração:

- Dionísio Manjate
- Félix Mindú
- Hermínia Langa

Maquetização:

- Flávio Joaquim Cordeiro
- Hermínio Andrade Banze
- João António Siquisse
- Júlio Ernesto Melo Ngomane

Impressão:

Venda proibida

Caro(a) aluno(a),

Seja bem-vindo/a ao Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD) do primeiro ciclo, abreviadamente designado PESD1.

É com muito prazer que o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano (MINEDH) coloca em suas mãos os materiais de aprendizagem, especialmente concebidos e elaborados para que você, independentemente do seu género, idade, condição social, ocupação profissional ou local de residência, possa prosseguir com os estudos do Ensino Secundário, através do Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD), desde que tenha concluído o Ensino Primário.

Este programa resulta da decisão do Governo de Moçambique de oferecer no Sistema Nacional de Educação (SNE) o Ensino Secundário, no país, em duas modalidades: Ensino Presencial e Ensino à Distância, expandindo, assim, o acesso à educação a um número cada vez maior de crianças, jovens e adultos moçambicanos, como você.

Ao optar por se matricular no PESD1, você vai desenvolver conhecimentos, habilidades, atitudes e valores definidos para o graduado do 1 º ciclo do Ensino Secundário, que vão contribuir para a melhoria da sua vida, da sua família, da sua comunidade e do País.

Para a implementação deste programa, o MINEDH criou Centros de Apoio à Aprendizagem (CAA), em locais estrategicamente escolhidos, onde você e os seus colegas dever-se-ão encontrar periodicamente com os tutores, que são professores capacitados para apoiar a sua aprendizagem, esclarecendo as dúvidas, orientando e aconselhando-o na adopção de melhores práticas de estudo.

Estudar à Distância exige o desenvolvimento de uma atitude mais activa no processo de aprendizagem, estimulando em si a necessidade de muita dedicação, boa organização, muita disciplina, criatividade e, sobretudo, determinação nos estudos. Por isso, fazemos votos de que se empenhe com afinco e responsabilidade para que possa, efectivamente, aprender e poder contribuir para um Moçambique sempre melhor.

Bons Estudos!

Maputo, aos 18 de Janeiro de 2024

CARMELITA RITA NAMASHULUA

MINISTRA DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 6

I. SOBRE O PESD 1 6
II. SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA 6
III. PROCESSO DE ESTUDO 6
IV. AVALIAÇÃO 7
V. ÍCONES 8

INTRODUÇÃO AO MÓDULO 9

LIÇÃO Nº 1: NOTAÇÃO CIENTÍFICA 11

LIÇÃO Nº 2 NOTAÇÃO CIENTÍFICA 14

LIÇÃO Nº 3: NOTAÇÃO CIENTÍFICA 16

LIÇÃO Nº 4: EXPRESSÕES NUMÉRICAS 18

LIÇÃO Nº 5: RAIZ QUADRADA EM $\mathbb{Q}$ 22

LIÇÃO Nº 6: NOÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS 26

LIÇÃO Nº 7: USO DE TABELA 30

LIÇÃO Nº 8: CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS USANDO O ALGORITMO 33

LIÇÃO Nº 9: CORRESPONDÊNCIA 39

LIÇÃO Nº 10: VARIÁVEL INDEPENDENTE 44

LIÇÃO Nº 11: CLASSIFICAÇÃO DE APLICAÇÕES 49

LIÇÃO Nº 12: FUNÇÃO LINEAR 53

LIÇÃO Nº 13: ZERO DA FUNÇÃO LINEAR 61

LIÇÃO Nº 14: EXPRESSÃO ANALÍTICA DA RECTA 67

LIÇÃO Nº 15: NÚMEROS REAIS 73

LIÇÃO Nº 16: RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS NUMÉRICOS $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R}$ 78

LIÇÃO Nº 17: INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS 81

LIÇÃO Nº 18: INEQUAÇÕES LINEARES 87

LIÇÃO Nº 19: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO INEQUAÇÕES LINEARES 91

LIÇÃO Nº 20: POSIÇÕES DA RECTA EM RELAÇÃO AO CÍRCULO 94

LIÇÃO Nº 21: ÂNGULO CENTRAL 98

LIÇÃO Nº 22: AMPLITUDES DE ÂNGULOS E DE ARCOS 105

LIÇÃO Nº 23: ÂNGULO INSCRITO QUE NÃO CONTÉM O CENTRO 111

LIÇÃO Nº 24: CÁLCULOS NA CIRCUNFERÊNCIA E NO CÍRCULO 120

LIÇÃO Nº 25: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE MONÓMIOS 127

LIÇÃO Nº 26: MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE MONÓMIOS 133

LIÇÃO Nº 27: SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES DE DUAS INCÓGNITAS 138

Venda proibida

LIÇÃO Nº 28: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES A DUAS INCÓGNITAS 143
LIÇÃO Nº 29: MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES 153
LIÇÃO Nº 30: MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES 161
TESTE DE PREPARAÇÃO 171
CHAVE DE CORRECÇÃO 172
BIBLIOGRAFIA 173

Venda proibida

INTRODUÇÃO

Caro (a) aluno (a), seja bem-vindo ao Programa do Ensino Secundário à Distância - PESD, uma opção de aprendizagem que lhe permite prosseguir com seus estudos pós-primários, para concluir o nível secundário.

A seguir apresentamos algumas informações que você deve conhecer antes de iniciar o seu estudo.

I. Sobre o PESD 1

Neste programa, você tem a oportunidade de estudar o primeiro ciclo do Ensino Secundário, mediante a leitura dos módulos auto-instrucionais, de forma individual, respeitando o seu ritmo próprio, para que depois de completar a aprendizagem dos conteúdos programados, seja submetido aos exames nacionais, cujos resultados positivos permitirão que você receba um certificado de conclusão do ciclo.

Neste programa, a sua aprendizagem será feita por ciclo, sendo que irá receber um conjunto de módulos de todas as disciplinas que compõem o primeiro ciclo do ensino secundário (7ª, 8ª ou 9ª classes), não se distinguindo cada uma destas três classes. Por essa razão, ao concluir o estudo deste conjunto de módulos, terá concluído o estudo do ciclo todo, estando habilitado a realizar os exames da 9ª classe.

II. Sobre a disciplina de Matemática

Neste ciclo, os conteúdos de **Matemática** estão estruturados em **5** (cinco**)** módulos. Cada módulo é constituído por um conjunto de lições.

Cada lição tem a seguinte estrutura: o título da lição, os objectivos, o tempo de estudo, o desenvolvimento (no qual encontramos a explicação dos conceitos, a demonstração de experiências e actividades), os exercícios, o resumo e a chave de correcção. Poderá encontrar o glossário, isto é, o significado de algumas palavras, no fim da lição.

III. Processo de estudo

O processo de estudo no PESD inicia depois de você receber um conjunto de orientações sobre o funcionamento da aprendizagem no ensino à distância, que são dadas no Centro de Apoio à Aprendizagem (CAA) pelo respectivo Gestor. Assim, você receberá, no máximo, dois módulos, dando início ao seu estudo. O estudo é de caracter individual e consiste na leitura dos conteúdos existentes nos módulos.

Venda proibida

Para efeitos de registo de notas pessoais (sistematização de informação, resumo das lições, resolução de actividades e exercícios, testes de preparação, incluindo anotação de dúvidas), você deverá usar um caderno. O caderno o ajudará a ser planificado e organizado no seu estudo.

A actividade de leitura faz parte do processo de estudo. Ela prepara a você a ganhar habilidade de leitura observando as regras de entoação, pausa e ritmo adequado.

Sendo assim, a actividade de leitura expressiva nas diferentes tipologias textuais previstas, nesta disciplina, deve ser feita e caberá ao seu tutor, ao longo do processo de seu estudo, a responsabilidade de programar, acompanhar e aferir o nível de atingimento dos objectivos programáticos traçados para este nível.

IV. Avaliação

No Ensino à Distância a avaliação faz parte do processo de aprendizagem. Sabe porquê? Ela estimula o seu interesse pela matéria e ajuda-o a medir em que medida está ou não a progredir na aprendizagem.

Por esta razão, ao longo e no final dos módulos aparecem actividades avaliativas, em diferentes formatos ou com diferentes nomes: *exercícios*, *actividades*, *experiências*, *resumos* e *testes de preparação*. Você deve resolver cada uma delas.

Depois de resolver um determinado tipo de actividade avaliativa, para você certificar-se se resolveu bem ou não, deverá consultar a Chave de correcção disponível logo após a actividade ou no fim do módulo.

Nas últimas páginas do módulo, vai encontrar um conjunto de questões denominadas “Teste de Preparação”, que serve para verificar o seu nível de assimilação dos conteúdos aprendidos no módulo e ao mesmo tempo que lhe prepara para a realização do Teste de Fim de Módulo (TFM).

O TFM é o teste ou prova que você irá realizar no fim de cada módulo no CAA, vigiado pelo gestor ou tutor. A nota obtida no TFM serve de base para efeito de admissão ao exame.

No fim do ciclo, realizará um Exame Nacional, com base no qual, tendo aproveitamento positivo, ser-lhe-á emitido um certificado de conclusão do 1º ciclo do Ensino Secundário.

Venda proibida

V. Ícones

Ao longo do módulo, você irá encontrar alguns símbolos gráficos com os quais se deve familiarizar antecipadamente, para a facilitação do seu estudo. Sempre que vir determinado ícone terá conhecimento prévio do que deve acontecer.

Glossário	**Desenvolvimento**	**Exercícios**	**Reflexão**
Tempo	**Resumo**	**Chave de correcção**	**Actividade de grupo**
Objectivos	**Discussão**	**Estudo de caso**	**Teste de preparação**
Note	**Dica**	**Ajuda**	**Experiências**
Vídeo	**Áudio**		

Venda proibida

INTRODUÇÃO AO MÓDULO

Seja bem-vindo, caro (a) aluno (a), ao estudo do módulo **3** da disciplina de **Matemática** do Programa do Ensino Secundário à Distância para o primeiro ciclo, PESD1. Este módulo é constituído por **6 (seis)** unidades temáticas, subdivididas em lições, respectivamente:

Unidade Temática 1: NÚMEROS E OPERAÇÕES (4)
Unidade Temática 2: FUNÇÕES (2)
Unidade Temática 3: NÚMEROS E OPERAÇÕES (5)
Unidade Temática 4: ÁLGEBRA (2)
Unidade Temática 5: GEOMETRIA (3)
Unidade Temática 6: ÁLGEBRA (3)

Objectivos do módulo

Quando terminar o estudo do módulo 3 deste ciclo, você será capaz de:

- Aplicar conhecimentos da notação científica na resolução de problemas;
- Resolver problemas, envolvendo operações com números racionais, quadrado de raízes quadradas e potências;
- Resolver inequações e problemas conducentes a uma inequação linear;
- Resolver problemas de cálculo de perímetro e áreas;
- Efectuar as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão com monómios;
- Resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas.

Recomendações para o estudo

Estimado estudante, para ter sucesso no estudo deste módulo, é necessária muita dedicação, portanto aconselhamos o seguinte:

- Reserve pelo menos 3horas por dia para o estudo de cada lição e resolução dos exercícios propostos;
- Procure um lugar tranquilo que disponha de espaço e iluminação apropriada, pode ser em casa, no Centro de Apoio à Aprendizagem (CAA) ou noutro lugar perto da sua casa;
- Durante a leitura, faça anotações no seu caderno sobre conceitos, fórmulas e outros aspectos importantes sobre o tema em estudo;
- Aponte também as dúvidas a serem apresentadas aos seus colegas, professor ou tutor de forma a serem esclarecidas;
- Faça o resumo das matérias estudadas, anotando as propriedades a serem aplicadas;

Venda proibida

- Resolva os exercícios e só consulte a chave de correcção para confirmar as respostas. Caso tenha respostas erradas volte a estudar a lição e resolve novamente os exercícios por forma a aperfeiçoar o seu conhecimento. Só depois de resolver com sucesso os exercícios poderá passar para o estudo da lição seguinte. Repita esse exercício em todas as lições.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 1: Notação Científica

Introdução

Caro aluno, bem-vindo à primeira lição do módulo 3. Nesta, irá aprender como escrever números muito grandes ou muito pequenos em notação científica, para tal antes terá que definir notação científica e dizer em que consiste.

Mãos à obra!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Transformar "números grandes e pequenos" sob notação científica.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos no mínimo.

Notação Científica

Nesta lição, vamos usar potências de base 10. Para tal, vamos recordar do conceito de potência (ou potenciação).

A potenciação é a operação matemática que representa a multiplicação de factores iguais. Isto é, usamos potenciação quando um número é multiplicado por si mesmo várias vezes.

Exemplo: Ao multiplicar 2 por si mesmo 3 vezes, isso pode ser representado pela potência 2 elevado a 3 onde simbolicamente será: $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

A potência pode ser calculada por meio da notação, isto é, multiplicar a base da potência por ele mesmo quantas vezes o expoente mandar. Desta forma, quando temos 6^5 , significa que o 6 é multiplicado, por ele mesmo cinco vezes assim:

$6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7\,776.$

Certo! Foi um exercício fácil e necessário, pois serviu de pré-requisito para a lição de hoje sobre a notação científica.

Notação Científica é uma forma de escrever números reais muito grandes ou muito pequenos de forma mais simplificada, usando potências de base dez (10). Ela é utilizada para reduzir a escrita de números que apresentam muitos algarismos.

Simbolicamente, um número em notação científica apresenta o seguinte formato:

$\boldsymbol{N \times 10^n}$,

Venda proibida

Onde o **N é** um **número racional** maior ou igual a 1 e menor que 10 e o $\boldsymbol{n}$ **é** um **número inteiro.**

Observe os exemplos:

a) $4\,570\,000\,000\,000\,000 = 4{,}57 \times 10^{15}$

b) $0{,}000000000019 = 1{,}9 \times 10^{-11}$

Viu como foi fácil escrever um número muito grande duma forma simplificada usando a notação científica.

Em seguida vamos aprender como fazer a transformação de um número em notação científica.

Como se transforma um número em notação científica?

É uma operação simples. Preste atenção aos passos que seguem:

1º Passo. Escrever o número na forma decimal, com apenas um algarismo diferente de 0 a frente da vírgula;

2º Passo: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivermos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo;

3º Passo. Escrever o produto do número pela potência de 10.

Estes são os passos necessários para fazer a notação científica. Como vê é simples.

Acompanhe os exemplos que se seguem:

1. Apresentar o número 63 000 em notação científica.
   - Primeiro "andar" com a vírgula, colocando-a entre o 6 e o 3, pois desta forma ficaremos apenas com o algarismo 6 antes da vírgula;
   - Para colocar a vírgula nesta posição verificamos que tivemos que "andar" 4 casas decimais, uma vez que nos números inteiros a vírgula se encontra no fim do número. Neste caso o 4 será o nosso expoente da potência de base 10.
   - Assim sendo, escrevendo em notação científica teremos: $6{,}3 \times 10^4$.

2. A massa de um electrão é de aproximadamente 0,00000000000000000000000000911g, transforme esse valor em notação científica.
   - Primeiro, "andar" com a vírgula, colocando-a entre o 9 e o 1, pois desta forma ficaremos apenas com o algarismo 9 (que é o primeiro algarismo diferente de 0) antes da vírgula;
   - Para colocar a vírgula nesta posição "andamos" 28 casas decimais. É necessário lembrar que ao colocar a vírgula depois do 9, o número ficou com um valor maior, então para não modificar seu valor do expoente ficará negativo;
   - Assim, escrever a massa do electrão em notação científica fica: $9{,}11 \times 10^{-28} g$.

Venda proibida

Faça o exercício que segue, como forma de medir o nível da sua aprendizagem desta matéria de notação científica.

Exercícios

1. Transforme os seguintes números em notação científica
   a) 642000 b) 0,000000000000029

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da Lição

Conseguiu-se reter que a notação científica, é uma forma de escrever números reais muito grandes ou muito pequenos de forma mais simplificada, usando potências de base dez (10). Ela é utilizada para reduzir a escrita de números que apresentam muitos algarismos, facilitando fazer comparações e cálculos matemáticos.

É chegado o momento de comparar as suas respostas com as da chave de correcção a seguir apresentada.

Chave de correcção

1. a) O primeiro número significativo é **6**. Assim, o valor do expoente é o número de vezes que deslocamos a vírgula para a esquerda até encontrar um número significativo, pois temos: 642000 e como deslocamos 5 vezes para esquerda, teremos a seguinte notação: $\mathbf{6,42 \times 10^5}$

   b) 0,000000000000029
   Primeiro encontramos o número significativo, deslocando a vírgula até o número 2.
   O expoente é o total de vezes que deslocamos a vírgula, 14 é negativo, porque temos um número decimal menor que zero. Logo teremos: $\mathbf{2,9 \times 10^{-14}}$

Muito certo! Resolveram-se os exercícios de consolidação com sucesso. Caso se tenha dúvida de algum conteúdo, entre em contacto com o tutor da disciplina ou gestor para lhe dar o apoio necessário de modo a passar para a lição seguinte sem nenhuma dúvida desta lição, pois esta lição servirá de pré-requisito para a lição subsequente.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 2 Notação Científica

Introdução

É bem-vindo ao estudo da lição 2 do módulo 3. Nesta, falaremos da multiplicação e divisão de números escritos em notação científica. Continue acompanhando a lição, para aperfeiçoar esta matéria.

Bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Efectuar operações de multiplicação números escritos sob notação científica;
- Efectuar operações de divisão de números escritos sob notação científica.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Multiplicação e Divisão de números escritos sob forma de notação científica

Vimos as operações de adição e subtracção de números escritos em notação científica. Prestemos atenção às outras operações.

Multiplicação

A multiplicação de números na forma de notação científica é feita multiplicando os números dados, repetindo a base 10 e adicionar os expoentes.

Exemplos:

a) $1,4 \times 10^3 \times 3,1 \times 10^2 = (1,4 \times 3,1) \times 10^{(3+2)} = 4,34 \times 10^5$

b) $2,5 \times 10^8 \times 2,3 \times 10^6 = (2,5 \times 2,3) \times 10^{(8+6)} = 5,75 \times 10^{14}$

Agora, vamos ver como é que se operacionaliza a notação científica na divisão.

Divisão

Para dividir números na forma de notação científica devemos dividir os números, repetir a base 10 e subtrair os expoentes.

Exemplos:

a) $9,42 \times 10^5 \div 1,2 \times 10^2 = (9,42 \div 1,2) \times 10^{(5-2)} = 7,85 \times 10^3$

b) $8,64 \times 10^{-3} \div 3,2 \times 10^6 = (8,64 \div 3,2) \times 10^{(-3-6)} = 2,7 \times 10^{-9}$

Venda proibida

Depois de ver caso-a-caso as operações de multiplicação e divisão, agora é tempo de exercitação.

Exercícios

1. Efectue as seguintes operações:
   a) $(2{,}1 \times 10^{9}) \times (7{,}3 \times 10^{-6})$
   b) $(3,4 \times 10^{10)} \times (1{,}3 \times 10^{8})$
   c) $(1{,}98 \times 10^{32}) \div (7{,}92 \times 10^{28})$
   d) $(2{,}2\times 10^{4}) \div (34{,}3 \times 10^{2})$

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da lição

Para efectuar a multiplicação e divisão com números escritos sob notação científica devemos respeitar basicamente as regras das operações com potências. Na multiplicação, devemos multiplicar os factores que multiplicam as potências de base 10 e manter a base 10 adicionando os seus expoentes. Na divisão, devemos dividir os factores que multiplicam as potências de base 10 e manter a base 10 subtraindo os seus expoentes.

Compare as suas respostas com as sugeridas na chave de correcção.

Chave de correcção

1.
   a) $(2{,}1 \times 10^{9}) \times (7{,}3 \times 10^{-6}) = (2{,}1\times 7{,}3\ ) \times 10^{9+(-6)} = 15{,}33 \times 10^{9-6} = 15{,}33 \times 10^{3}$
   b) $(3,4 \times 10^{10)} \times (1{,}3 \times 10^{8}) = (3{,}4 \times 1{,}3) \times 10^{(10+8)} = 4{,}42 \times 10^{18}$
   c) $(1{,}98 \times 10^{32}) \div (7{,}92 \times 10^{28}) = \frac{1{,}98 \times 10^{32}}{7{,}92 \times 10^{28}} = (1{,}98 \div 7.92) \times = 0{,}25 \times 10^{4} = 2{,}5 \times 10^{3}$
   d) $(2{,}2\times 10^{4}) \div (34{,}3 \times 10^{2}) = (2{,}2 \div 34{,}3) \times 10^{4-2} = 0{,}064 \times 10^{2}$

Parabéns, conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho!

Venda proibida

LIÇÃO Nº 3: Notação Científica

Introdução

Caro aluno, nesta lição, irá aprender fazer operações de adição e subtracção com números escritos sob notação científica. Chamamos desde já a sua atenção.

Objectivos da lição:

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Efectuar operações de adição de números escritos sob notação científica;
- Efectuar operações de subtracção de números escritos sob notação científica

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Adição e subtracção de números escritos sob forma de notação científica

Depois de ver a multiplicação e divisão, agora é vez da soma e subtracção.

Para efectuar a soma ou a subtracção com números em notação científica devemos adicionar ou subtrair os números e repetir a potência de base 10. Por isso, para fazer essas operações, é necessário que as potências de base 10 apresentem o mesmo expoente.

Veja os exemplos:

a) $1{,}3 \times 10^8 + 2{,}4 \times 10^8 = (1{,}3 + 2{,}4) \times 10^8 = 3{,}7 \times 10^8$

b) $5{,}4 \times 10^3 - 2{,}3 \times 10^3 = (5{,}4 - 2{,}3) \times 10^3 = 3{,}1 \times 10^3$

Valeu a pena a sua atenção à matéria.

Acreditamos que você já percebeu que para efectuar as operações de adição e subtracção de números escritos sob notação científica basta efectuar as operações dos factores que multiplicam a potência de base 10 e manter a potência de base 10 no mesmo expoente.

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

Adição e subtracção algébrica

1. Faça a adição e subtracção de:

a) $6{,}5 \times 10^3 + 2{,}3 \times 10^3$

b) $2{,}8 \times 10^9 + 7{,}3 \times 10^9$

Venda proibida

c) $6{,}5 \times 10^3 - 2{,}3 \times 10^3$ d) $5{,}92 \times 10^{30} - 3{,}68 \times 10^{30}$

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Ao longo do estudo desta lição, aprendeu que para efectuar a adição ou a subtracção com números escritos sob notação científica devemos adicionar ou subtrair os números e repetir a potência de base 10. Por isso, para fazer essas operações, é necessário que as potências de base 10 apresentem o mesmo expoente onde iremos adicionar ou subtrair os factores que multiplicam as potências de base 10 e manter as potências no mesmo expoente.

Corrija, agora, as suas respostas com base nesta chave.

Chave de correcção

Adição e subtracção algébrica

1.

a) $6{,}5 \times 10^3 + 2{,}3 \times 10^3 = (6{,}5 + 2{,}3) \times 10^3 = 8{,}8 \times 10^3$

b) $2{,}8 \times 10^9 + 7{,}3 \times 10^9 = (2{,}8 + 7{,}3) \times 10^9 = 10{,}1 \times 10^9 = 1{,}01 \times 10^{10}$

c) $6{,}5 \times 10^3 - 2{,}3 \times 10^3 = (6{,}5 - 2{,}3) \times 10^3 = 4{,}2 \times 10^3$

d) $5{,}92 \times 10^{30} - 3{,}68 \times 10^{30} = (5{,}92 - 3{,}68) \times 10^{30} = 2{,}24 \times 10^{30}$.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 4: Expressões numéricas

Introdução

Nesta lição vai ver as expressões numéricas simples, envolvendo todas as operações e parêntesis, bem assim, aprender os passos a seguir para a resolução duma expressão numérica.

Força, amigo!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular o valor de uma expressão numérica simples, envolvendo todas as operações e parêntesis

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 120 minutos.

Expressão numérica

A resolução de uma expressão numérica, como sabe, antes, passa pela sua definição.

Então, vamos a isso!

Expressões Numéricas - São sequências de duas ou mais operações que devem ser realizadas respeitando determinada operação e ordem, por exemplo: adição, subtracção, multiplicação divisão, potenciação e radiciação.

As expressões numéricas são comuns no nosso quotidiano, pois, em muitas situações há necessidade de se calcular o valor de uma expressão numérica.

Repare que além das operações, uma expressão numérica pode conter **símbolos que mostram a ordem de prioridade** ao longo da sua resolução, nomeadamente:

- Parêntesis curvos ( )
- Parêntesis rectos [ ]
- Chavetas { }

Na resolução de expressões numéricas, é comum ter dúvidas sobre qual das operações devemos realizar primeiro, para tal, é preciso dominar a ordem correcta a ser seguida.

Venda proibida

Ordem das operações

- **Potenciação e radiciação**

Caso apareçam essas duas operações em simultâneo dentro de uma mesma expressão, calculamo-las na ordem em que aparecerem, isto é, entre elas não existe prioridade, resolve se a operação que estiver em primeiro lugar.

- **Multiplicação e Divisão**

Se encontrar todas as potências e todos os radicais, as próximas operações com prioridade são a multiplicação e a divisão. Veja que entre a multiplicação e divisão também não existe prioridade, calcula-se conforme a disposição das mesmas.

- **Adição e subtracção**

Na ausência de multiplicação e divisão na expressão numérica, logo, calculamos a adição e subtracção dos termos. caso existam as duas operações, calculamo-las na ordem que elas aparecem até chegarmos à resolução final.

Agora, vamos resolver um exercício prático para nos ajudar a perceber melhor o que já foi acima explicado.

Vamos à prática!

Observe o exemplo:

$$10 : 5 \times \sqrt{9} - 6 : 2 + 3^2$$

Conforme o combinado, primeiro calcularemos a radiciação e a potenciação onde teremos:

$$= 10 : 5 \times 3 - 6 : 2 + 3^2$$

$$= 10 : 5 \times 3 - 3 + 9$$

Terminada a potenciação e radiciação, a seguir, calcularemos a multiplicação e a divisão.

$$= 2 \times 3 - 3 + 9$$

$$= 6 - 3 + 9$$

Em seguida resolveremos a adição e subtracção na ordem em que as operações aparecem.

$$= 3 + 9$$

$$= 12$$

Desta forma, o resultado do cálculo da nossa expressão numérica é de 12.

Continuando com a nossa lição. Depois de compreender que para calcularmos uma expressão numérica temos que obedecer a ordem de prioridade entre as operações, vamos agora entender o uso dos símbolos nas expressões numéricas.

Venda proibida

Uso dos símbolos nas expressões numéricas.

As expressões numéricas são comuns no nosso quotidiano, pois, em muitas situações há necessidade de se calcular o valor de uma expressão numérica.

Caro aluno, repare que além das operações, uma expressão numérica pode conter **símbolos que mostram a ordem de prioridade** ao longo da sua resolução.

- **Parênteses curvos** ( )
- **Parênteses rectos** [ ]
- **Chavetas** { }

Além das operações entre si, é comum também a utilização de símbolos para mostrar a ordem de prioridade que devemos seguir quando deparamos com uma expressão numérica com parênteses.

Como calcular uma expressão numérica como diferentes parênteses? Qual é a prioridade?

- Primeiro, calculamos as operações que estão dentro dos parênteses curvos;
- Depois as que estão dentro de parênteses rectos; e
- Por fim as operações que estão dentro de chavetas.

Você sabe que para calcular a expressão numérica é preciso respeitar sempre a ordem das operações e a ordem dos símbolos.

Ora vejamos:

Passos para resolver expressões numéricas

Observe o exemplo:

$$\{[2 + (4 + 5) \div 3 - \sqrt{4} + 9] \div 4\}$$

Quando uma expressão possui símbolos, começamos sempre por efectuar as operações que estão dentro de parêntesis curvos.

$$\{[2 + (4 + 5) \div 3 - \sqrt{4} + 9] \div 4\}$$

$$[(2 + 9 \div 3 - \sqrt{4} + 9) \div 4]$$

Eliminados os parenteses curvos, vamos resolver e eliminar os parêntesis rectos, sem nos esquecermos da ordem de prioridades das operações, para este caso, começando pela radiciação.

$$[(2 + 9 \div 3 - \sqrt{4} + 9) \div 4]$$

Na perspectiva de eliminar os parêntesis rectos, realizaremos de seguida a divisão, uma vez que ela possui prioridade em relação a adição e subtracção.

$$[(2 + 3 - 2 + 9) \div 4]$$

$$[(5 - 2 + 9) \div 4]$$

Venda proibida

Para eliminar os parêntesis rectos, calculamos as adições e a subtracção, na ordem que essas operações aparecem.

$$(3 + 9) \div 4$$
$$12 \div 4 = 3$$

Muito bem! A caminhada foi longa, mas chegamos a uma boa compreensão da nossa aprendizagem sobre expressões numéricas simples. É chegado o momento de testar os nossos conhecimentos sobre esta lição.

Exercícios

1. Resolva as seguintes expressões numéricas.
   a) $4 \times (64 - 12:3)$
   b) $25 + 6^2 : 12 - \sqrt{169} + 42$
   c) $480:\{20 \times [86 - 12 \times (5 + 2)]\}$

Este é momento de redigir o resumo da lição. Faça-o no caderno.

Resumo da lição

A expressão numérica, cuja resolução exige que se respeite a ordem de prioridade dos sinais de operações, é o conjunto de operações fundamentais a serem efectuadas usando operações como adição, subtracção, multiplicação divisão, potenciação e radiciação. Ela pode conter símbolos que mostram a ordem de prioridade na sua resolução.

Agora compare as suas respostas com as da chave de correcção apresentada.

Chave de correcção

1.a) $4 \times (64 - 12:3) =$
$4 \times (64 - 4) =$
$4 \times 60 =$
240

1.b) $25 + 6^2 : 12 - \sqrt{169} + 42 =$
$25 + 36 : 12 - 13 + 42 =$
$25 + 3 - 13 + 42 =$
$28 - 13 + 42 =$
$15 + 42 =$
57

1.c) $480:\{20 \times [86 - 12 \times (5 + 2)]\} =$
$480:\{20 \times [86 - 12 \times 7]\} =$
$480:\{20 \times [86 - 84]\} =$
$480:\{20 \times 2\} =$
$480:40 =$
12

Parabéns! Resolveu acertadamente as expressões numéricas das três alíneas apresentadas. Em caso de uma pequena dúvida, dirija se ao CAA para melhores esclarecimento pelo tutor desta disciplina.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 5: Raiz quadrada em ℚ

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender o que é a raiz quadrada de um número, bem como, a determinação do quadrado de um número racional e a sua raiz quadrada e, por fim, o cálculo da raiz quadrada exacta e não exacta.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar o quadrado de um número racional;
- Determinar a raiz quadrada de um número racional não negativo.

Para a melhor compreensão desta lição, você necessita de estudar durante 90 minutos.

Raiz quadrada em ℚ

Caro aluno, de certeza que já ouviu falar da raiz quadrada. Mas para garantirmos melhor entendimento dos conteúdos desta lição, é aconselhável que antes definamos raiz quadrada. A raiz quadrada é um caso particular da radiciação e é a operação inversa da potência com o expoente 2, visto que ao calcularmos a raiz quadrada de um número **a,** queremos descobrir qual é o número elevado ao quadrado é igual a $\boldsymbol{a}$**.** Por exemplo:

- a raiz quadrada de 4 é igual a 2, onde 2^2 é igual 4 ou seja $\sqrt{4} = 2$, visto que $2^2 = 4$;
- $\sqrt{9} = 3$ visto que $3^2 = 9$;
- $\sqrt{16} = 4$ visto que $4^2 = 16$.

Uma raiz quadrada pode ser exacta, resultando um número denominado por quadrado perfeito, ou pode ser não exacta quando o número não é um quadrado não perfeito.

Em caso de o radical não apresentar o número no índice, calcula-se a raiz quadrada do radicando.

Radiciação e a relação com a raiz quadrada

Caro aluno, o que será radiciação?

A radiciação é uma operação fundamental, na matemática. Usamos mais a raiz quadrada, mas além desta, existem outros tipos de raiz, tais como a raiz cúbica e a raiz quarta. A raiz cúbica de qualquer número y é o número cujo cubo é igual a y. Desta maneira podemos dizer que a raiz cúbica de 64 é 4, uma vez que $4^3 = 64$.

Venda proibida

Representação simbólica da raiz de índice n de um número

$\sqrt[n]{a}$ = b

n--- Índice

a –-- Radicando

b--- Raiz

$\sqrt{\ }$ - Símbolo de radical

Como calcular a raiz quadrada

Geralmente recorremos à tabuada para o cálculo da raiz quadrada de um número, todavia, quando o número é maior que 100, usamos o processo da decomposição factorial para calcular a raiz quadrada exacta e quando é para calcular uma raiz não exacta usamos tabelas de aproximações.

Raiz quadrada exacta

Obtém-se uma raiz quadrada exacta, quando o resultado da operação é um número racional como por exemplo, a $\sqrt{16}$ é exacta pois o resultado é 4 e o número 4 é um número racional. Reter que quando no radicando existe um número cuja a raiz quadrada é desconhecida, obtemos a raiz exacta usando a decomposição factorial.

Observe o exemplo:

Calcule o valor da $\sqrt{324}$ =? Através da decomposição factorial calculemos o número

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$

Assim teremos: $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 x 3^2 x\, 3^2} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

Logo: $\sqrt{324} = 18$

Continuando com a nossa lição, vamos ver como calcular raízes exactas de 0 até 100

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$;

$\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$

Venda proibida

Nota:

Repare que os números cuja raiz quadrada é exacta, são chamados de quadrados perfeitos.

Raiz quadrada não exacta

Quando o resultado da raiz quadrada é um número irracional (transformado em decimal dá uma dizima infinita não periódica), usamos as aproximações, ou seja, procuramos um número que ao elevarmos ao quadrado aproxima-se do resultado pretendido.

Dado o exemplo, calcule o valor da $\sqrt{60}$

Está claro que o resultado da raiz de 60 não é um quadrado perfeito, ou seja, a raiz quadrada não é exacta. Para a resolução, antes, temos que descobrir qual é o número anterior a 60 que tem raiz exacta, e neste caso sabemos que é o 49, e o número posterior a 60 que tem raiz exacta é o número 64.

Como já aprendemos a calcular no exercício acima a raiz de 49 igual a 7 e de 64 igual 8 é muito fácil. Ora vejamos:

$\sqrt{49} < \sqrt{60} < \sqrt{64}$

$7 < \sqrt{60} < 8$

Observe que o número 60 está perto do número 64, logo, a $\sqrt{60}$ estará perto do número 8. Desta forma, calcularemos o quadrado dos números que estão próximo do 8.

$7{,}9^2 = 62{,}41$

$7{,}8^2 = 60{,}84$

$7{,}7^2 = 59{,}29$

Assim percebemos que a $\sqrt{60} = 7{,}7$ por defeito ou que $\sqrt{60} = 7{,}8$ por excesso.

Também ficamos a saber que a $\sqrt{60}$ encontra-se entre os números 7,7 e 7,8.

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Calcule a raiz quadrada de 625 e indique a alternativa correcta
   a) 32; b) 19; c) 25; d) 101; e) 82

2. Em relação a lição sobre a raiz quadrada coloque V nas afirmações verdadeiras e F nas Falsas:
   a) A raiz quadrada de 82 é igual a 9;
   b) Podemos calcular a raiz quadrada de números negativos;
   c) A raiz quadrada de 81 é igual a 9;
   d) Obtém se uma raiz quadrada exacta, quando o resultado da operação é um número racional

Venda proibida

Resumo da lição

Caro aluno, depois duma intensa interacção com os conteúdos estudados, ficou compreendido que:

$\sqrt[n]{a} = b$

n--- Índice

a--- Radicando

b--- Raíz

No caso da raiz quadrada de um número **a** é representada por $\sqrt{a}$; e ela pode ser exacta ou não exacta. A exacta é aquela em que o resultado da operação é um número racional, caso contrário é não exacta.

Muito bem!

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1. A alternativa correcta é C, pois usando a decomposição em factores do número 625 o resultado obtido é:

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

2. a) F b) F c) V d) V

Parabéns**,** conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho! Está a entender bem os conteúdos da lição em estudo. Pode continuar com o seu estudo passando à lição seguinte. Se por teve dificuldade ao resolver os exercícios, procure a ajuda de colegas ou visite o CAA e peça apoio ao Tutor da disciplina.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 6: Noção de números irracionais

Introdução

Caro aluno, nesta lição irá aprender os números irracionais. Começará pelo conceito e depois verá a sua história, isto é, como surgiram, os primeiros cálculos, etc.

Chamamos desde já a sua atenção para esta matéria.

Objectivos

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Explicar o surgimento dos números irracionais a partir do cálculo da raiz quadrada de um número;
- Identificar os números irracionais.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Noção de números irracionais

Caro aluno, de certeza que já aprendeu o que são números racionais, mas nunca é demais recordar a sua definição, pois servirá de pré-requisito para a introdução do novo assunto, sobre os números irracionais.

Recordando, números racionais, são os números que podem ser escritos na forma de fracção.

Esses números podem também ser representados por um número decimal finito ou decimal infinito e periódico.

Muito bem! Como vê, foi importante recordar a definição acima apresentada para facilitar a compreensão do tema agora em estudo. De seguida vamos procurar perceber o que são números irracionais e como é que surgiram.

Origem dos números irracionais

É importante saber como surgiram os números irracionais. Estes surgem depois da criação dos números racionais, que foram criados para fazer a divisão de objectos. Deste modo, quando foi criada a **recta numérica**, cada um dos pontos correspondiam à um único número real.

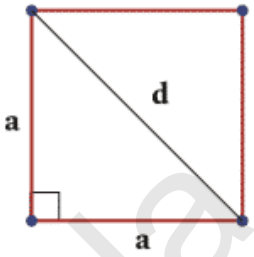
Foi a partir disso que os matemáticos perceberam que existiam algumas brechas nessa recta numérica, e que nenhum número racional poderia corresponder a essa lacuna. Até que eles encontraram uma

Venda proibida

solução: essas lacunas deveriam ser preenchidas com números decimais infinitos e não periódicos. E dessa forma, surgiram os números irracionais.

Nessa altura, descobriu-se ainda que alguns desses números decimais poderiam ser raízes não exactas. Essa descoberta foi um marco preponderante, principalmente para a área da **geometria**. E isso fica muito claro quando se fala sobre o **Teorema de Pitágoras**, que a soma dos quadrados dos **catetos** é igual ao quadrado da hipotenusa.

Observe o exemplo ao lado da descoberta dos números irracionais através do teorema de Pitágoras.



$d^2 = a^2 + a^2$
$d^2 = 2a^2$
$d = \sqrt{2a^2}$
$d = a\sqrt{2}$

Caro aluno, repare que neste exemplo, a medida da diagonal de um quadrado de lado mediano 1, será $\sqrt{2}$. No entanto, o resultado dessa raiz é um número decimal infinito e não periódico, ou por outra, um número irracional.

Como não é possível chegar ao valor da **raiz exacta**, o máximo que conseguimos é um número muito próximo, mas não o valor exacto.

Assim sendo, ao extrair sua **raiz quadrada**, obteremos o seguinte resultado por exemplo:

- $\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$ (infinito e não periódico).

O número$1{,}414213\ldots$, tem um número infinito de casas decimais e essas casas decimais são diferentes. Logo o número$1{,}414213\ldots$, tem uma **dízima infinita não periódica.**

Dizima infinita não periódica – é todo número que tem uma infinidade de casas decimais, isto é, casas decimais que não terminam**. Não periódicas** porque as casas decimais são diferentes.

Exemplos:$\ldots; -\sqrt{10}; -\sqrt{5}; -\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -0{,}2451\ldots; +\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots; +\sqrt{3}; +\sqrt{5}; +\sqrt{10}\ldots$

Então os números irracionais definem se de seguinte modo:

Os **números irracionais** são todos os números que podem ser representados por dízimas infinitas não periódicas.

Exemplos:

$\ldots; -\sqrt{10}; -\pi; -e; -\sqrt{5}; -\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -0{,}245\ldots + \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots; +\sqrt{3}; +\sqrt{5}; e; \pi; +\sqrt{10}\ldots$

Os valores π, e são equivalentes aos seguintes valores:

$\boldsymbol{\pi = 3{,}141592654}$ ...(lê-se PI)

$\boldsymbol{e = 2{,}7182818828}$ ...(lê-se número de Neper)

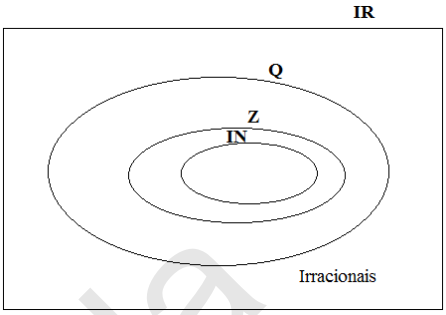
Venda proibida

Conjunto de números reais e relação entre conjuntos numéricos ($\mathbb{I}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$)

Como vimos, anteriormente, existem vários conjuntos números, cada um deles representado por uma letra. Assim, o conjunto dos números irracionais é representado por $\mathbb{I}$, enquanto o conjunto dos números reais, é representado por $\mathbb{R}$, é a união dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e números irracionais ($\mathbb{I}$).

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\boldsymbol{Irracionais}\}$

Portanto o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser resumido num diagrama que contém os outros conjuntos numéricos já abordados nas lições anteriores.



Portanto, todos os **números naturais ($\mathbb{N}$)**, inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais ($\mathbb{I}$) são todos **reais**.

Momento de verificar se reteve o que aprendeu. Faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Dos números abaixo apresentados, indique os que são racionais e os que são irracionais.

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{6400}$

2. Verifique se as dízimas abaixo, representam números racionais ou irracionais:

a) $3{,}25$ b) $44,(33)$ c) $9{,}1234\ldots$ d) 2017

e) π f) $1968{,}258$ g) $0{,}002587\ldots$

3. Relacionemos os conjuntos abaixo usando os símbolos $\subset, \supset, \not\subset, \not\supset, \in ou\ \notin$ de modo a obter proposições verdadeiras:

$a)\ \mathbb{R} \ldots \ldots \mathbb{Q}_0^-$

$b)\ \mathbb{Q}_0^+ \ldots \ldots \mathbb{R}_0^+$

$c)\ \mathbb{R}^- \ldots \left\{-1; -\frac{\pi}{2}\right\}$

$d)\ \mathbb{Z}_0^+ \ldots \ldots \mathbb{R}$

e) $+\sqrt{10} \ldots \ldots \mathbb{R}^-$

f) $\mathbb{Q}_0^- \ldots \ldots \mathbb{R}^+$

g) $-\frac{91}{4} \ldots \ldots \mathbb{R}_0^+$

h) $-\sqrt{5} \ldots \ldots \mathbb{R}^-$

i) $\pi \ldots \ldots \mathbb{R}^-$

j) $\mathbb{N} \ldots \ldots \mathbb{R}$

l) $+e \ldots \ldots R\mathbb{R}_0^+$

m) $-1000 \ldots \ldots \mathbb{R}$

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Caro aluno depois duma intensa interação sobre números irracionais e o seu surgimento, ficou evidente que, números inúmeros irracionais são aqueles que transformados em decimais encontramos dízimas infinitas não periódicas. Unido este conjunto (dos números irracionais) com os racionais, formamos o conjunto dos números reais é representado pela letra ($\mathbb{R}$).

Venda proibida

Confira a seguir a chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) Irracional
   a) Irracional
   b) Racional
   c) Racional

2. a) 3,25 - Número racional
   b) 44, (33)-Número racional
   c) 9,1234 ...-Número irracional
   d) 2017-Número racional
   e) π Número irracional
   f) 1968,258-Número racional
   g) 0,002587 -Número irracional

3.

$a) \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}_0^-$

$b) \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathbb{R}_0^+$

$c) R\mathbb{R}^- \supset \left\{-1; -\frac{\pi}{2}\right\}$

$d) \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{R}$

e) $+\sqrt{10} \notin \mathbb{R}^-$

f) $\mathbb{Q}_0^- \not\subset \mathbb{R}^+$

g) $-\frac{91}{4} \notin \mathbb{R}_0^+$

h) $-\sqrt{5} \in \mathbb{R}^-$

i) $\pi \notin \mathbb{R}^-$

j) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

l) $+e \in R\mathbb{R}_0^+$

m) $-1000 \in \mathbb{R}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 7: Uso de tabela

Introdução

Caro aluno, nesta lição, você vai estudar várias matérias, desde o uso de tabelas, estimativa das raízes de números racionais cuja raiz não é exacta, incluindo como aplicar quadrados e raízes quadrados no cálculo numérico. Bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Estimar raízes de números racionais cuja raiz não é exacta;
- Aplicar quadrados no cálculo numérico.
- Aplicar raízes quadradas no cálculo numérico

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos, no mínimo.

Uso de tabelas de raízes quadradas

Caro aluno, observe o exemplo abaixo apresentado;

Determine $\sqrt{9}$ com a tabela de raízes quadradas. Existem duas tabelas, onde a primeira serve para radicandos de 1,00 a 9,99 e a segunda de 10,0 a 99,9.

Neste caso, utilize a primeira tabela. Na linha "9" e coluna "0" lê-se $\sqrt{9{,}00} = 3{,}0000$.

Logo, $\sqrt{9} = 3$, porque $3 \times 3 = 9$.

- Quanto é $\sqrt{9{,}12}$?

	Coluna 0	1	2
8,9	2,9833	2,9850	2,9866
9,0	3,0000	3,0017	3,0033
Alínea 9,1	3,0166	3, 0183	3,0199

Para obter a resposta da $\sqrt{9,12}$, **vamos usar primeira tabela com o intervalo que varia de 1,0 a 9,99.** Lê–se na alínea 9,**1**; na coluna 2.

$\sqrt{9,12} \approx 3,0199$

Venda proibida

- E quanto será $\sqrt{3,78}$?

Para $\sqrt{3,78}$, também vamos usar a primeira tabela, com o mesmo intervalo. Lê-se na alínea $\mathbf{3,7}$; na coluna $\mathbf{8}$

$\boldsymbol{\sqrt{3,78} \approx 1,9442}$

- Determine $\sqrt{48,3}$.

  Agora é necessário utilizar a segunda tabela de raízes quadradas, a de radicandos entre 10,0 99,9 na alínea 48, na coluna 3.

  $\sqrt{48,3} \approx 6,9498$

Raiz quadrada que não é racional

Qual é o valor de $\sqrt{7}$?

Na tabela pode determinar-se usando o mesmo consultando na alínea 7,0 na coluna 0, ou seja, no 7,00, assim, $\sqrt{7} \approx 2,6458$. Se $\sqrt{7}$ fosse exactamente igual a $2,6458$, então$(2,6458)^2$ também seria exatamente igual a 7. Calculando o quadrado de $2,6458 \times 2,6458$ teremos como resultado 7,00025764 .

Deste modo, pode-se afirmar que não dá exactamente 7. O que quer dizer que 2,6458 não é a resposta exacta, mas sim, uma aproximação de 7. Assim sendo, **o valor exacto de $\sqrt{7}$ é uma dízima infinita.**

Caro aluno, observe que muitas das raízes quadradas são dízimas infinitas, como por exemplo,

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7},$ etc…, que nas tabelas têm valores arredondados.

Qual será o valor de $\sqrt{-9}$?

É -3? Não, porque $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$

Então é $+3$? Não, porque $+3^2 = +9$

Não existe nenhum número em Q cujo quadrado seja igual a -9.

$\sqrt{-9}$ não tem solução no conjunto dos números racionais.

A raiz quadrada de qualquer número negativo não tem significado.

Exercícios

1. Calcule:

   a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{144}$

2. Determine, com a ajuda da tábua de raízes quadradas:

   a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{3,16}$

Venda proibida

3. Determine, usando a segunda tábua de raízes quadradas

a) $\sqrt{81,0}$ b) $\sqrt{92,7}$

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da lição

É evidente que depois do estudo duma lição, é necessário que se faça um pequeno resumo sobre o que foi percebido ao longo desta aprendizagem. Foi possível perceber que para o uso de tabelas existem duas tabelas, onde a primeira serve para radicandos de 1,00 a 9,99 e a segunda de 10,0 a 99,9, entendido que muitas das raízes quadradas são dízimas infinitas. Também ficou claro que não existe nenhum número em Q cujo quadrado seja igual a -9.

$\sqrt{-9}$ não tem solução no conjunto dos números racionais.

A raiz quadrada de qualquer número negativo não tem significado.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1a) $\sqrt{81} = 9$ b) $\sqrt{144} = 12$

2a) $\sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt{3,1} \approx 1,7606$

3a) $\sqrt{81,0} = 9$ b) $\sqrt{92,7} \approx 9,6280$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 8: Cálculo de raízes quadradas usando o algoritmo

Introdução

Caro aluno, nesta lição vamos estudar o cálculo da raiz quadrada de um número usando algoritmo.

Aplique-se, amigo!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Calcular as raízes quadradas de números racionais usando algoritmo.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos, no mínimo.

Algoritmo da raiz quadrada de um número

Para calcular a raiz quadrada de um número usando o algoritmo da raiz quadrada, vamos obedecer a certos passos e operações. Vejamos os exemplos abaixo:

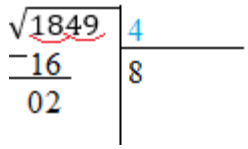
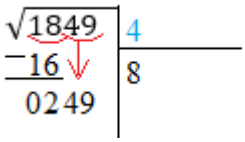
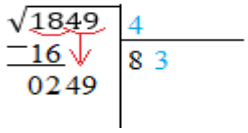
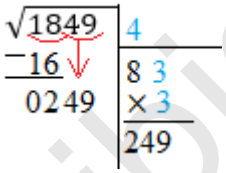
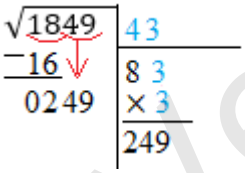
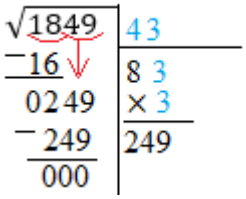
Calcula

a) $\sqrt{1849}$ b) $\sqrt{2023}$

Comecemos pela $\sqrt{1849}$ aplicando o algoritmo:

1º Passo: Dividimos o número1849, em grupos de dois algarismos, da direita para esquerda, podemos acrescentar os zeros, dois a dois consoante o número de casas decimais que pretendemos, caso seja necessário. Assim, o número 1849 ficará dividido desta maneira. $\sqrt{1849}$	**2º Passo:** Determinamos a raiz quadrada inteira, do valor que estiver mais a esquerda neste caso é 18. A sua raiz quadrada inteira é $\sqrt{18} = 4$ resto 2, porque $4 \times 4 + 2 = 16 + 2 = 18$.
3º Passo: Colocamos o resultado 4 no topo direito do algoritmo. $\sqrt{1849}\ \vert\ 4$	**4º Passo**: Determinamos o quadrado do resultado **4** que é $\mathbf{4^2 = 16}$ e subtraímos no **18**. Isto é: $\sqrt{1849}\ \vert\ 4$, -16, 2

Venda proibida

5º Passo: Determinamos o dobro de resultado **4** que é **8** e colocamos em baixo de 4. Assim: 	**6º Passo**: Baixamos o segundo grupo de dois algarismos neste caso é o número 49, acrescentando no valor **02** em baixo no lado esquerdo, e fica: **0249** 
7º Passo: Pensamos num número (0 a 9) em que devemos acrescentar no número **8** e multiplicamos por si para obtermos um valor igual a **0249** ou aproximadamente igual a **0249**. Neste caso, vamos experimentar o número **3,** colocando-o no lado direito de **8**, formando um único número **83** 	**8º Passo**: Multiplicamos **83** pelo número que estamos a experimentar, neste caso é **3** e obtemos **249**. 
9º Passo: O número 3 que experimentamos é válido no nosso cálculo, então levamos este valor e acrescentamos ao lado do número **4**, no topo direito do algoritmo. 	**10º Passo**: Colocamos **249** por baixo de **0249** e efectuamos a subtracção. 

Repare que o resto da divisão é zero (0). Sendo assim não precisamos de acrescentarmos os zeros. O que significa que o processo de cálculo da raiz quadrada de um número aplicando o algoritmo, termina aqui, ou seja:

$\sqrt{1849} = 43$

Para comprovar vamos calcular o quadrado de número 43.

$\mathbf{43^2 = 43 \times 43 = 1849 \Rightarrow \sqrt{1849} = 43}$

Caro aluno, conseguiu entende os passos que devem ser seguidos para calcular a raiz quadrada de um número aplicando o algoritmo? Se conseguiu estas de para bem. Se ainda presta atenção na resolução do segundo exemplo:

Venda proibida

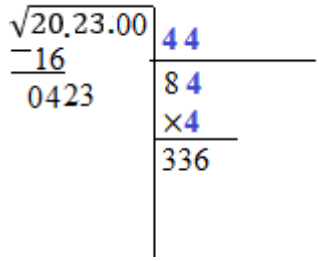
b) $\sqrt{2023}$

1º Passo: Dividimos o número2023, em grupos de dois algarismos, da direita para esquerda, podemos acrescentar os zeros, dois a dois consoante o número de casas decimais que pretendemos, caso seja necessário. Para o nosso exemplo vamos considerar duas casas decimais. Assim: b) $\sqrt{20.23.00}$	**2º Passo**: Determinamos a raiz quadrada inteira, do valor que estiver mais a esquerda neste caso é 20. A sua raiz quadrada é $\sqrt{20} = 4$ resto 4, porque $4 \times 4 + 4 = 16 + 4 = 20$.
3º Passo: Colocamos o resultado 4 no topo directo do algoritmo. Assim: $\sqrt{20.23.00}$ 4	**4º Passo**: Determinamos o quadrado do resultado **4** que é $\mathbf{4^2 = 16}$ e subtraímos no **20**. Isto é: $\sqrt{20.23.00}$ 4 -16 4
5º Passo: Determinamos o dobro de resultado **4** que é **8** e colocamos em baixo de **4**. Assim: $\sqrt{20.23.00}$ 4 -16 4 8	**6º Passo**: Baixamos o número 23, acrescentando no valor **04** em baixo no lado esquerdo, fica: **0423** $\sqrt{20.23.00}$ 4 -16 0423 8
7º Passo: Pensamos num número em que devemos acrescentar no número 8 e multiplicamos por si para obtermos um valor igual ou aproximadamente a 0423. Neste caso, vamos experimentar o número 4, colocando-o no lado esquerdo de 8, formando um único número 84 $\sqrt{20.23.00}$ 4 -16 0423 8 4	**8º Passo**: Multiplicamos **84** pelo número que estamos a experimentar, neste caso é **4** e obtemos **336**. $\sqrt{20.23.00}$ 4 -16 0423 8 4 ×4 336

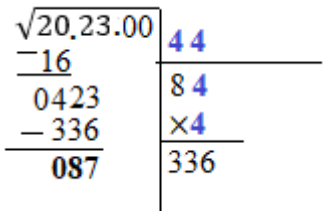
Venda proibida

9º Passo: O número 4 que experimentamos é válido no nosso cálculo, se tivéssemos experimentado o número 5 teríamos $\mathbf{85 \times 5 = 425}$, e

$\mathbf{425 > 423}$. Então, o número 4 é o ideal. Assim sendo, levamos o número **4** e acrescentamos ao lado do número **4**, no topo direito do algoritmo.

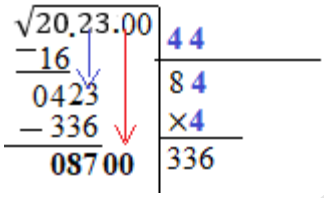


10º Passo: Colocamos **336** por baixo de **0423** e efectuamos a subtracção.

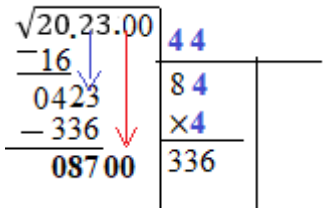


Repare que o resto da divisão é 087. O que significa $\sqrt{2023}$ é uma raiz não perfeita, ela tem a parte decimal. Sendo assim precisamos de acrescentarmos os dois zeros, referente a parte decimal e continuarmos com o processo de cálculo da raiz quadrada de um número aplicando o algoritmo. Para tal devemos:

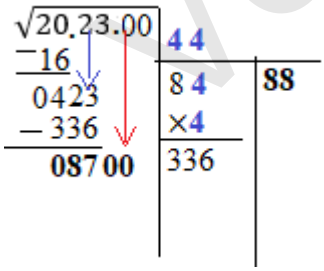
11º Passo: Baixarmos os dois zeros (**00**) acrescentados no valor **087** , a direita e, fica: **08700**, isto é:



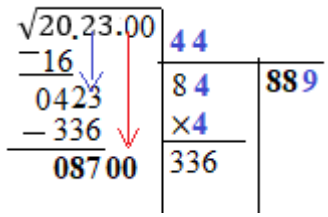
12º Passo: Colocamos uma barra de separação para poder efectuar o cálculo do dobro de **44**



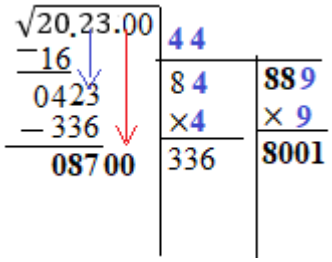
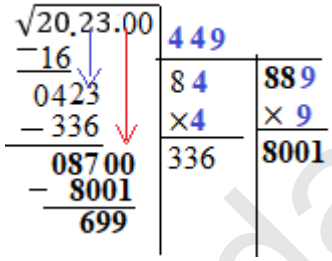
13º Passo: Determinamos o dobro de **44** e escrevemos no lado direito da barra vertical



14º Passo: Pensamos num número em que devemos acrescentar no número **88** e multiplicamos por si para obtermos um valor igual ou aproximadamente a **08700**. Neste caso, vamos experimentar o número **9,** colocando-o no lado esquerdo de **88**, formando um único número **889**



Venda proibida

15º Passo: Multiplicamos **889** pelo número que estamos a experimentar, neste caso é **9** e obtemos **8001** 	**16º Passo:** Então o número 9 que experimentamos é válido e podemos colocá-lo no número 44, formando o numero 44**9**. E subtraímos **008700** por **8001** e obtem-se **699**, como resto da divisão, isto é: 

Este resultado mostra que $\sqrt{\mathbf{202300}} \approx \mathbf{449}$ e resta **699**. E para verificarmos se o calculo esta certa podemos calcular $\mathbf{449 \times 449 = 201601 + 699 = 202300}$

Caro aluno, lembre-se que na $\sqrt{\mathbf{2023}}$ acrescentamos dois zeros para podermos ter a parte decimal no resultado pois trata-se de uma raiz não perfeita. Assim, se retirarmos os dois zeros da parte decimal, teremos:

$\sqrt{\mathbf{2023}} \approx \mathbf{44,9}$ este é o resultado e o resto **é 6,99.** O resto não deve ser superior ao dobro da raiz.

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Aplicando o algoritmo da raiz quadrada, calcule:
   a) 324 b) 1936 c) 1764 d) 15129

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da lição

É evidente que depois do estudo duma lição, é necessário que se faça um pequeno resumo sobre o que foi percebido ao longo desta aprendizagem. Nesta lição, aprendemos sobre o procedimento do cálculo da raiz quadrada de um número sem recorrer a consulta na tabela.

Venda proibida

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1. a) 18 b) 44 c) 42 d) 123

Venda proibida

LIÇÃO Nº 9: Correspondência

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender um novo conceito em Matemática. É o de função.

Preste muita atenção!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Explicar o conceito de aplicação ou função como correspondência entre dois conjuntos;
- Explicar quando é que uma correspondência é uma função.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa estudar durante 90 minutos.

Conceito de aplicação ou função

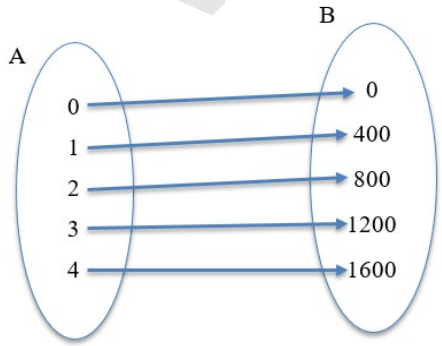
Para compreender o conceito de aplicação ou função, vamos partir de exemplos que retractam situações concretas do nosso dia-a-dia.

1. Uma pista de atletismo tem marcações a cada 400 m. Um atleta treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu treinador anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo atleta.

   O resultado pode ser observado na tabela abaixo:

Instante (min)	0	1	2	3	4
Distância (m)	0	400	800	1200	1600

A partir da tabela, é possível notar que existem dois conjuntos diferentes. O conjunto de partida "A" (instante) e o conjunto de chegada "B" (distância). Fazendo a correspondência entre os elementos desses conjuntos, usando o diagrama sagital, podemos obter o seguinte:



A partir do diagrama, podemos notar que cada elemento do conjunto de partida corresponde à um único elemento do conjunto de chegada. Ou por outra, cada instante $(\boldsymbol{x})$ corresponde uma única distância $(\boldsymbol{y})$.

Dizemos, por isso, que a **distância é função do instante**.

A fórmula (ou a lei) que relaciona y com x é: $\boldsymbol{y = 400 \times x}$.

Venda proibida

2. O Instituto Nacional de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura numa determinada cidade, mede a temperatura a intervalos regulares, por exemplo a cada 2 horas, e monta uma tabela que relaciona as grandezas hora e temperatura. Tomemos a tabela seguinte como exemplo:

Tempo (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (ºC)	17	14	13	12	15	22	28	30	28	25	22	18	17

A partir da tabela é possível notar que cada 2 horas corresponde uma única medida de temperatura. Dizemos, por isso, que **a medida da temperatura é função da medida de tempo**.

Agora que já sabe que o conceito de função tem em conta uma relação ou correspondência entre elementos de dois conjuntos distintos, vamos procurar definir uma função em Matemática.

Em Matemática, dá-se o nome de função ou aplicação de A em B a uma correspondência (ou relação) entre elementos de dois conjuntos (A e B) em que a **cada elemento do primeiro conjunto (A) corresponde um, e só um, elemento do segundo conjunto (B)**.

Uma vez que estamos a falar de dois conjuntos, vamos então procurar identificar esses conjuntos e os seus nomes específicos.

Domínio e contradomínio de uma função

Considere o segundo exemplo:

Numa loja de mariscos, na Cidade de Pemba, vende-se peixe ao preço de $250Mt$ o quilo. Para facilitar o seu trabalho, o proprietário da loja montou a tabela de preços abaixo.

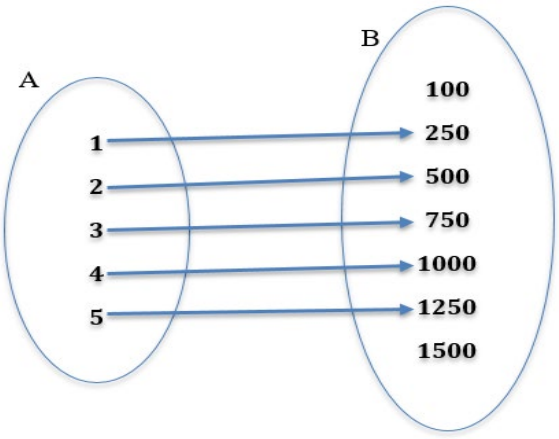
Quantidade de peixe (kg)	Preço (Mt)
1	250
2	500
3	750
4	1000
5	1250

Neste exemplo, duas grandezas estão relacionadas: a quantidade de peixe e o respectivo preço. A cada quantidade de peixe corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função da quantidade do peixe.

A fórmula que estabelece a relação de interdependência entre preço (y) e a quantidade de peixe (x) é: $\boldsymbol{y = 250 \times x}$.

Este exemplo pode ser representado por meio de um digrama sagital:

Venda proibida



A partir deste diagrama, podemos referir que:

- O conjunto A (constituído pela quantidade de peixe) chama-se **conjunto de partida** ou **domínio da função** e representa-se por **Df**.

$Df = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- O conjunto B (constituído por alguns preços de mariscos) chama-se **conjunto de chegada**.

$B = \{100, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500\}$

- O conjunto C (constituído somente pelos preços que têm correspondência a partir dos elementos do conjunto de partida) chama-se **contradomínio da função** e representa-se por **CDf** ou **D'f**.

$D'f = \{250, 500, 750, 1000, 1250\}$

- Os elementos do domínio chamam-se **objectos**.
- Os elementos do contradomínio chamam-se **imagens**. O contradomínio pode ou não ser igual ao conjunto de chegada.

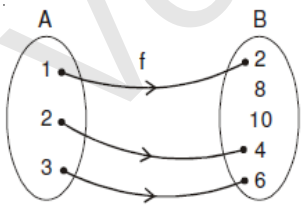
Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria.

Agora chegou a momento de testar os seus conhecimentos, resolvendo os exercícios, no seu caderno.

Exercícios

1. Considere a função representada por dois conjuntos a seguir:



a) Indique o domínio da função.
b) Indique o conjunto de chegada.
c) Indique o contradomínio da função.

2. Imagine que um bebé nasceu com $50\ cm$ de altura, e que o seu crescimento se verificou de acordo com os dados da tabela abaixo:

X (dias)	0	30	60	90	120
Y (cm)	50	51	51,5	52	55

a) Assinale com V a afirmação correcta:

i) A correspondência representada na tabela é uma função, porque o número de imagens é igual ao número de objectos.

Venda proibida

ii) A correspondência representada na tabela é uma função, porque cada objecto tem a sua imagem.

iii) A correspondência representada na tabela é uma função, porque os elementos de Y estão em ordem crescente.

a) Indique o domínio da função.

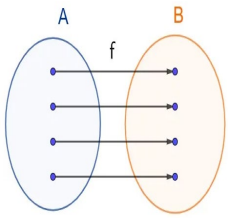
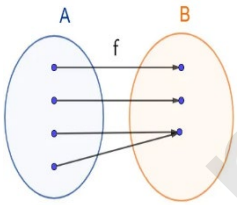
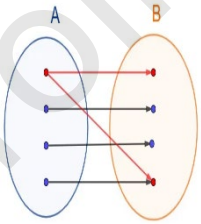
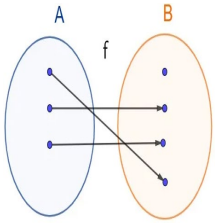
b) Indique o contradomínio da função.

3. Considere uma função de A em B definida pela lei $y = x + 2$, e os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Indique o domínio e o contradomínio da função.

b) Determine o contradomínio da função.

4. Qual dos diagramas <u>não representa uma função</u>? Justifique.

1º	2º	3º	4º
			

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da lição

Uma função é uma **correspondência** em que a cada elemento de um conjunto (chamado domínio) **corresponde um**, e **um só** elemento de um outro conjunto (chamado conjunto de chegada).

Ao conjunto dos elementos do segundo conjunto, correspondentes dos elementos do primeiro, chama-se **contradomínio**.

Os elementos do domínio chamam-se **objectos** e os elementos do contradomínio chamam-se **imagens**.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na chave de correcção.

Venda proibida

Chave de correcção

1. a) $Df = \{1, 2, 3\}$ b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ c) $D'f = \{2, 4, 6\}$
2. a) ii) V b) $Df = \{0, 30, 60, 90, 120\}$ c) $D'f = \{50, 51, 51{,}5,\ 52, 55\}$
3. a) $Df = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $D'f = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
4. O 3º diagrama não constitui uma função pois existe um elemento do conjunto A que possui dois correspondentes do conjunto B.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 10: Variável Independente

Introdução

Caro aluno, na lição passada aprendeu o conceito de função como correspondência entre dois conjuntos. Nesta lição vai dar continuidade ao estudo de função, determinando as imagens de uma função, quando são conhecidos os seus objectos.

Bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar as imagens de uma função, quando conhecidos os objectos.

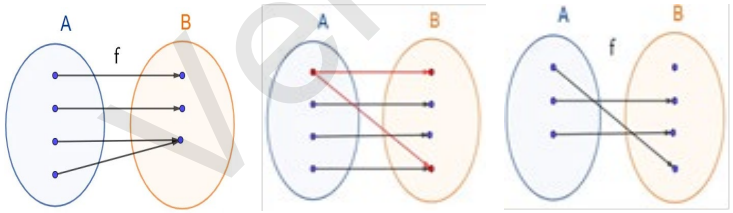
Para a melhor compreensão desta lição precisa de estudar durante 90 minutos.

Variável independente

Antes de passarmos à definição do conceito de variável independente, vamos fazer uma recapitulação do conceito de função, aprendido na lição passada por meio de uma actividade.

Actividade

Analise os diagramas abaixo, e diga quais deles representam funções.



Para resolver esta questão, temos que recorrer à definição de função abordada na lição passada.

Uma função é uma correspondência em que a cada elemento de um conjunto (chamado domínio ou conjunto de partida) corresponde um, e um só elemento de um outro conjunto (chamado conjunto de chegada).

Partindo desta definição, podemos concluir que, dentre os três diagramas, os que representam funções são o primeiro e o terceiro. O segundo diagrama não representa função porque existe um elemento do conjunto A que possui dois correspondentes do conjunto B.

Agora que já fez a recapitulação do conceito de função, vamos buscar a compreensão do conceito de variável independente.

Venda proibida

Se designarmos de **x** os valores do domínio (conjunto de partida), e de **y** os valores do conjunto de chegada que correspondem aos valores de x, podemos reformular a definição de função da seguinte maneira:

Se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma função de x.

A variável x é chamada **variável independente**.

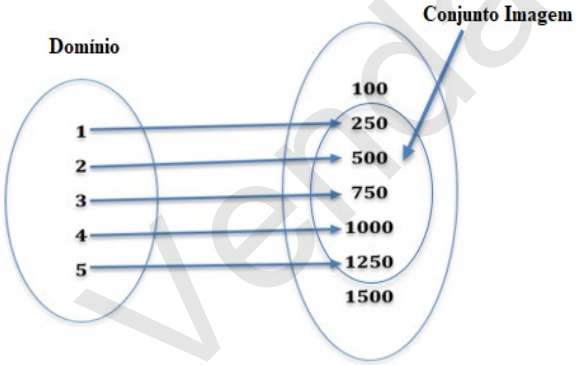
O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x é chamado **imagem de x** e é representado por $f(x)$. Portanto, a variável y é chamada **variável dependente**, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x.

Percebeu a diferença entre as variáveis dependente e independente? Acredito que sim. Continue a estudar a lição e vai aprender mais conceitos novos.

Domínio e conjunto imagem da função

Como já sabe, numa função podemos encontrar variável independente e variável dependente. Assim, o conjunto de valores que podem ser atribuídos a variável independente (x) é chamado **domínio da função** (Df), e o conjunto formado pelos valores que a variável dependente (y) assume é chamado **conjunto imagem da função** (Im) ou **contradomínio da função** $(D'f)$.

Através do diagrama abaixo, podemos facilmente demonstrar o domínio e o conjunto imagem de uma função:



Deste diagrama é possível notar que o domínio da função é $Df = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto dos valores correspondentes aos valores do domínio (imagem) é $Im = \{250, 500, 750, 1000, 1250\}$.

Lei de formação de uma função

Os valores do conjunto imagem atribuídos à variável y podem ser calculados a partir dos valores do domínio atribuídos ao x por meio de uma regra ou lei de formação (fórmula).

Até aqui percebeu o que está sendo abordado nesta lição? Acompanhe as actividades seguintes e dissipe qualquer dúvida.

Venda proibida

Actividades

1. A lei de formação que associa cada número x ao número y é dada pela lei de formação $f(x) = x - 2$.

Sabendo que o domínio da função é $Df = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, determine o conjunto imagem da função.

Para determinar o conjunto imagem temos que fazer os seguintes cálculos:

- Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 2 = -1$
- Para $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 - 2 = 0$
- Para $x = 3 \rightarrow f(3) = 3 - 2 = 1$
- Para $x = 4 \rightarrow f(4) = 4 - 2 = 2$
- Para $x = 5 \rightarrow f(5) = 5 - 2 = 3$
- Para $x = 6 \rightarrow f(6) = 6 - 2 = 4$

Organizando estes números numa tabela, obtemos o seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
y	-1	0	1	2	3	4

Assim, podemos afirmar que $Df = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $Im = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. O João foi à pastelaria comprar pães. Sabendo que o custo de cada pão é de $12Mt$.
   a) Escreva uma fórmula que relaciona o número de pães e o respectivo preço, indicando a variável independente e a variável dependente.

A variável independente é o número de pães (n) e a variável dependente é o preço (p). Portanto, a fórmula que relaciona o número de pães e o respectivo preço é:

$p(n) = 12 \times n$

   b) Quantos Meticais o João pagou por 10 pães?

Para saber o custo de 10 pães, basta substituir o n por 10, na fórmula acima apresentada:

$p(n) = 12 \times 10 \rightarrow p(n) = 120\ Mt$

Resposta: O João pagou 120 Meticais por 10 pães.

Agora chegou o momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios, no caderno.

Exercícios

1. A lei de formação de uma função é $y = 3 \times x$.
   a) Identifique a variável independente e a variável dependente.

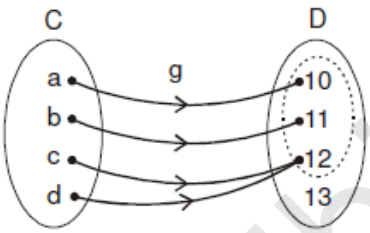
Venda proibida

b) Determine os valores de a, b, c na tabela:

x	0	2	b	6
y	0	A	12	c

2. O domínio de uma função definida pela lei de formação $g(x) = 2x - 1$ é $Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   a) Identifique a variável independente e a variável dependente.
   b) Determine o conjunto imagem da função.

3. Dado o diagrama abaixo, determine o domínio, o conjunto de chegada e o conjunto imagem.



4. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Em cada caso, determine o domínio e o conjunto imagem da função.
   a) $f: A \to B \; dada \; por \; f(x) = x + 2$ b) $f: A \to B \; dada \; por \; f(x) = -x + 1$
   c) b) $f: A \to B \; dada \; por \; f(x) = x^2$

5. A distância percorrida por um carro em movimento uniforme é definida pela lei:

$x(t) = 60 \times t$

Onde: $x\ (t)$ é a distância percorrida (em km) e $\boldsymbol{t}$ é o tempo do percurso (em horas).

   a) Identifique as variáveis independente e dependente.
   b) Determine a distância percorrida pelo carro após 3 horas.

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Venda proibida

Resumo da lição

Se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a **x** existe, em correspondência, um único valor para $\boldsymbol{y}$, dizemos que $\boldsymbol{y}$ é uma função de $\boldsymbol{x}$.

A variável $\boldsymbol{x}$ é chamada **variável independente** e a variável $\boldsymbol{y}$ é chamada **variável dependente**, porque $\boldsymbol{y}$ assume valores que dependem dos correspondentes valores de $\boldsymbol{x}$.

O conjunto de valores que podem ser atribuídos a variável independente (x) é chamado **domínio da função** (Df), e o conjunto formado pelos valores que a variável dependente (y) assume é chamado **conjunto imagem da função** (Im) ou **contradomínio da função** $(D'f)$.

Os valores do conjunto imagem atribuídos à variável y podem ser calculados a partir dos valores do domínio atribuídos ao x por meio de uma regra ou lei de formação.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1. a) Variável independente (x) e variável dependente (y).
   a) $a = 6 \quad b = 4 \quad c = 18$

2. a) Variável independente (x) e variável dependente $(g(x))$.
   b) $Im = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

3. Domínio: $Df = \{a, b, c, d\}$ Conjunto de chegada: $D = \{10, 11, 12, 13\}$
   Imagem: $Im = \{10, 11, 12\}$

4. a) $Df = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad Im = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   b) $Df = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad Im = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
   c) $Df = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad Im = \{0, 1, 4\}$

5. a) Variável independente: tempo do percurso (t);
   Variável dependente: distancia percorrida $(x\ (t))$;
   b) $x(3) = 60 \times 3 \rightarrow x(3) = 180$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 11: Classificação de aplicações

Introdução

Caro aluno, nas lições passadas aprendeu o conceito de função, a partir da correspondência entre elementos de conjuntos, e a determinar as imagens de uma função a partir dos seus objectos. Nesta lição vai aprender a classificar as funções ou aplicações.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar as aplicações sobrejectivas;
- Identificar as aplicações injectivas;
- Identificar as aplicações bijectivas.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa de estudar durante 90 minutos.

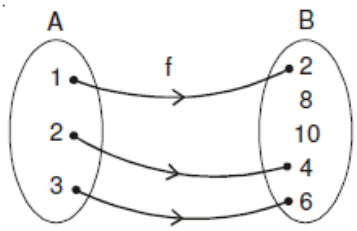
Classificação de funções ou aplicações

As funções ou aplicações podem ser classificadas em três tipos diferentes, dependendo do tipo de correspondência que se estabelece entre os elementos dos conjuntos:

- **Injectiva**
- **Sobrejectiva**
- **Bijectiva**

Função ou aplicação injectiva

Observe atentamente os seguintes diagramas que representam funções:

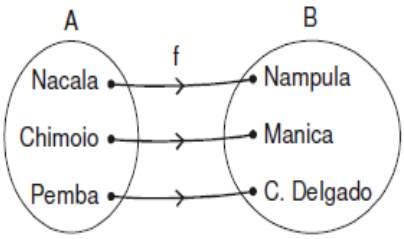


O domínio da função é $Df = \{1, 2, 3\}$;

- O contradomínio é $D'f = \{2, 4, 6\}$;
- O conjunto de chegada é $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Como vê, na aplicação acima representada, a objectos diferentes do conjunto A correspondem imagens diferentes do conjunto B. Porém, o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada.

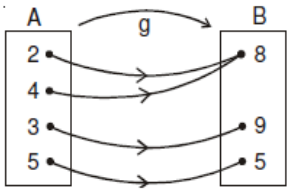
Venda proibida



Nesta aplicação, pode ver que a cidades diferentes correspondem províncias diferentes, e que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Assim, diz-se que f é uma **aplicação ou função injectiva**, desde que **a cada elemento diferente do primeiro conjunto corresponda a um elemento diferente do segundo conjunto**, independentemente de o contradomínio coincidir ou não com o conjunto de chegada.

Agora, observe o seguinte diagrama:

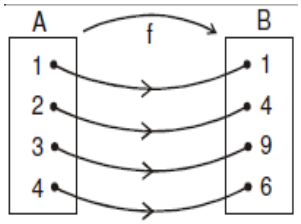


Repare que aos elementos 2 e 4 do conjunto A corresponde o elemento 8 do conjunto B ($2 \neq 4 \ e \ f(2) = f(4) = 8$). Portanto, a elementos distintos do conjunto A não correspondem elementos distintos do conjunto B.

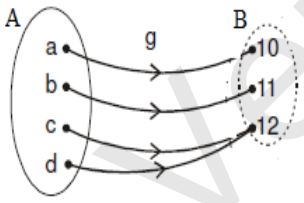
Neste caso, diz-se que a aplicação **não é injectiva**.

Função ou aplicação sobrejectiva

Observe os seguintes diagramas:



A partir do diagrama podemos constatar que nesta aplicação todos os elementos do conjunto B são imagens dos elementos do conjunto A.

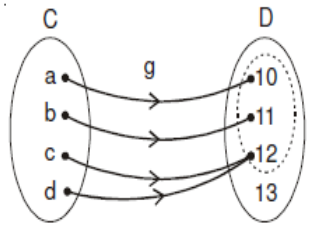


Neste diagrama constatamos que apesar do número **12** ser a imagem dos objectos ***c*** e ***d***, todos os elementos do conjunto B são imagens dos elementos do conjunto A.

Portanto, para cada função, **o contradomínio coincide com o conjunto de chegada**. Isto é, todos elementos do conjunto de chegada são imagens dos objectos do domínio.

Diz-se que, neste caso, as **funções são sobrejectivas.**

Agora, observe o próximo diagrama:

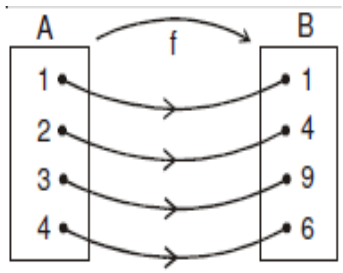


Neste caso, nem todos elementos de D são imagens dos elementos do conjunto C, isto é, **o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada.** Assim, diz-se que a aplicação ou a função é **não sobrejectiva**.

Venda proibida

Função ou aplicação bijectiva

Preste atenção ao diagrama que se segue:



Deste diagrama é possível constatar que:

- A elementos distintos do conjunto A
- correspondem a imagens distintas do conjunto B. Logo, é uma **função ou aplicação injectiva;**
- O contradomínio coincide com o conjunto de chegada. Logo, é uma **função ou aplicação sobrejectiva**.

Por ter as duas classificações simultaneamente, diz-se que a aplicação é **bijectiva**.

Agora faça este exercício, no caderno.

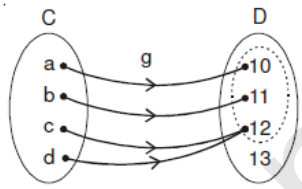
Exercícios

1. O domínio de uma função definida pela lei de formação $g(x) = x + 2$ é $Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Determine o contradomínio da função.

b) Diga se a função é ou não injectiva. Justifique.

2. Dado o diagrama abaixo:



a) Determine o domínio da função.

b) Determine o conjunto de chegada

c) Determine o contradomínio da função.

d) Classifique a função quanto a injectividade.

3. Dados os seguintes conjuntos: $C = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Considerando a função: $f(x) = x + 1$, verifique dos dois conjuntos qual deles é contradomínio da função dada.

4. Indique o domínio de $f(x)$.

5. Assinale com "V" a única afirmação verdadeira:

i. A função C em E é não injectiva, porque o domínio e contradomínio são compostos pelos mesmos elementos 0 e 2.

ii. A função C em E é injectiva porque o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

iii. A função C em E é bijectiva porque é injectiva e sobrejectiva em simultâneo.

Venda proibida

6. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Em cada caso, determine o contradomínio e classifique a função.

a) $f: A \to B$ dada por $f(x) = -x + 1$.

b) $g: A \to B$ dada por $g(x) = x^2 - 1$.

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da lição

Uma função ou aplicação é **injectiva** se **a cada objecto corresponde uma e só uma imagem**.

Uma função ou aplicação é **sobrejectiva** se **todos os elementos do contradomínio coincidirem com o conjunto de chegada**.

Uma função ou aplicação é **bijectiva** quando assume as duas características, isto é, **quando é injectiva e sobrejectiva**.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) $D'f = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   b) A função é injectiva porque a cada objecto, no conjunto A, corresponde uma e só uma imagem, no conjunto B.

2. a) Domínio: $Df = \{a, b, c,\ d\}$

   b) Conjunto de chegada: $Df = \{10, 11, 12, 13\}$

   c) Contradomínio: $D'f = \{10, 11, 12\}$

   d) A função é injectiva, mas é não sobrejectiva.

3. a) $D'f = \{0, 1, 2, 3\}$

4. a) Contradomínio: $D'f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

5. iii) V

6.

a) f(x) é injectiva e sobrejectiva. Logo, a função é bijectiva.

   Contradomínio: $D'f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

b) $g(x)$ é injectiva, mas é não sobrejectiva. Contradomínio: $D'g = \{-1, 0, 3\}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 12: Função Linear

Introdução

Caro aluno, nas lições anteriores aprendeu a identificar uma função ou aplicação, a determinar imagens de uma função quando conhecidos os seus objectos e a classificar as funções a partir da relação entre os seus domínios e contradomínios. Nesta lição vai estudar um tipo especial de função, que é a função linear e vamos definir este conceito a partir de exemplos do nosso dia a dia.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar uma função linear;
- Representar graficamente uma função linear.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa de estudar durante 90 minutos.

Conceito de função linear

Antes de apresentarmos o conceito de função linear, vejamos alguns exemplos envolvendo questões do nosso dia a dia.

1. O senhor António pegou um táxi do serviço à sua casa, que fica $10\ km$ de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa de $100{,}00Mt$ mais $25{,}00Mt$ por quilómetro rodado. Quanto, o senhor António pagou pelo táxi?

   Ele pagou $25{,}00\ Mt \times 10 = 250{,}00\ Mt$ pela distância percorrida mais $100{,}00Mt$ pela parcela fixa. Isto é:

   $$250{,}00\ Mt + 100{,}00\ Mt = 350{,}00\ Mt$$

   Se a sua casa ficasse a $15\ km$ do serviço, o senhor António pagaria pelo táxi:

   $$15 \times 25{,}00\ Mt + 100{,}00\ Mt = 375{,}00\ Mt + 100{,}00\ Mt = 475{,}00\ Mt$$

   Podemos notar que, para cada distância ($\boldsymbol{x}$) percorrida pelo táxi, há um certo preço **p** para a corrida. Nesse caso, a fórmula que expressa **p** (em Mt) em função de $\boldsymbol{x}$ (km) é:

   $$p(x) = 25{,}00 \times x + 100{,}00$$

2. Num restaurante *self-service* (onde o cliente serve-se ao seu gosto) cobra-se $75{,}00\ Mt$ por cada $100g$ de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de $510g$ e $430g$, respectivamente. Quanto cada um pagou pela comida?

Venda proibida

Observe que $1kg = 100g \times 10$. Portanto, $75{,}00\ Mt$ por $100g$ equivale a $750{,}00\ Mt$ por $1kg$. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou:

Quem serviu $510\ g = 0{,}51\ kg$ pagou $750{,}00\ Mt \times 0{,}51 = 382{,}50\ Mt$ e

quem serviu $430\ g = 0{,}43\ kg$ pagou $750{,}00\ Mt \times 0{,}43 = 322{,}50\ Mt$.

Podemos notar que o valor (y) pago varia de acordo com a quantidade de comida (x) em quilogramas. Nesse caso, a lei que relaciona y e x é: $y = 750{,}00 \times x$.

As leis $p(x) = 25{,}00 \times x + 100{,}00$ e $y = 750{,}00 \times x$, definidas nos exemplos anteriores, são casos concretos de **funções polinomiais do 1º grau** ou **funções lineares**.

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função linear**, a qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são números reais dados e **a** diferente de zero $(a \neq 0)$.

Na lei $f(x) = ax + b$, o número **a** é chamado **coeficiente angular de x**, e o número **b** é chamado **termo independente**.

Exemplos:

- $f(x) = 3x + 2$, em que $a = 3$ e $b = 2$.
- $f(x) = -4x + 3$, em que $a = -4$ e $b = 3$.
- $f(x) = -2x - 5$, em que $a = -2$ e $b = -5$.
- $f(x) = x - \frac{5}{6}$, em que $a = 1$ e $b = -\frac{5}{6}$.
- $f(x) = -5x$, em que $a = -5$ e $b = 0$

Gráfico da função linear do tipo $f(x) = ax + b$

Considere a função $f(x) = 3x - 2$.

Para construir o gráfico da função, temos que construir uma tabela que relaciona os elementos do domínio (x) e os do contradomínio (y ou f(x)).

Consideremos os seguintes valores de x (objectos) para $f(x) = 3x - 2$.

x	$f(x) = 3x - 2$
- 2	
- 1	
0	
1	
2	

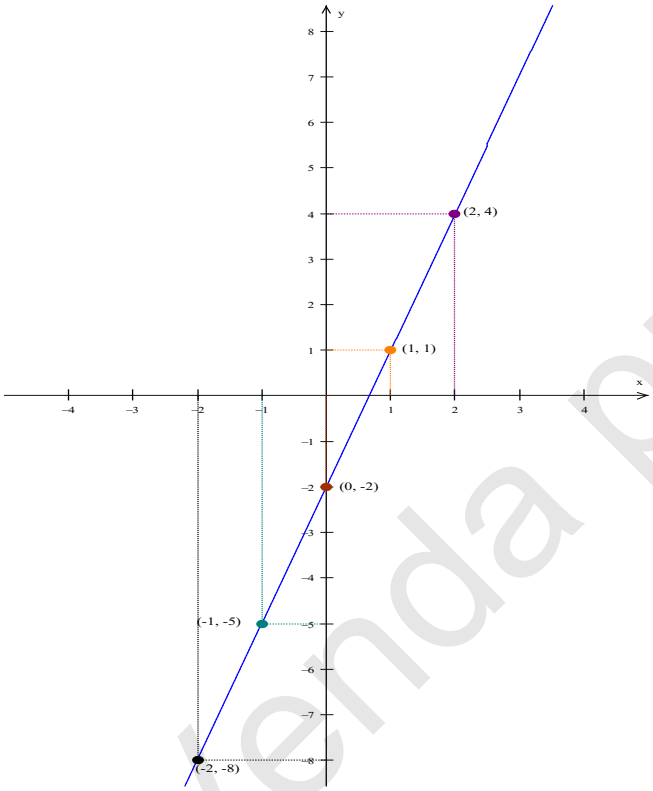
Para determinar os valores de f(x) (imagens), da coluna a direita, basta substituir o x na expressão analítica pelos valores que estão na coluna à esquerda (objectos). Veja a seguir:

Venda proibida

x	$f(x) = 3x - 2$
- 2	$f(-2) = 3 \times (-2) - 2 = -6 - 2 = -8$
- 1	$f(-1) = 3 \times (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$
0	$f(0) = 3 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2$
1	$f(1) = 3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$
2	$f(2) = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$

x	y
- 2	- 8
- 1	- 5
0	- 2
1	1
2	4

Agora vamos representar graficamente estas coordenadas (valores de x e y), que formam pares ordenados. Unindo os pontos, obtemos o gráfico da função $f(x) = 3x - 2$. Observe o gráfico com muita atenção, e siga a representação dos pares ordenados.



O gráfico ao lado representado pode ser construído de uma forma mais simples, basta para tal obtermos dois pontos do gráfico, o zero da função e a ordenada na origem, e ligá-los com o auxílio de uma régua. Sendo $f(x) = 3x - 2$:

- Ordenada na origem: para $x = 0$, temos $f(0) = 3 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2$; portanto a ordenada é $(0, -2)$.
- Zero da função: para $y = 0$, temos $0 = 3x - 2 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$; portanto o zero da função é $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

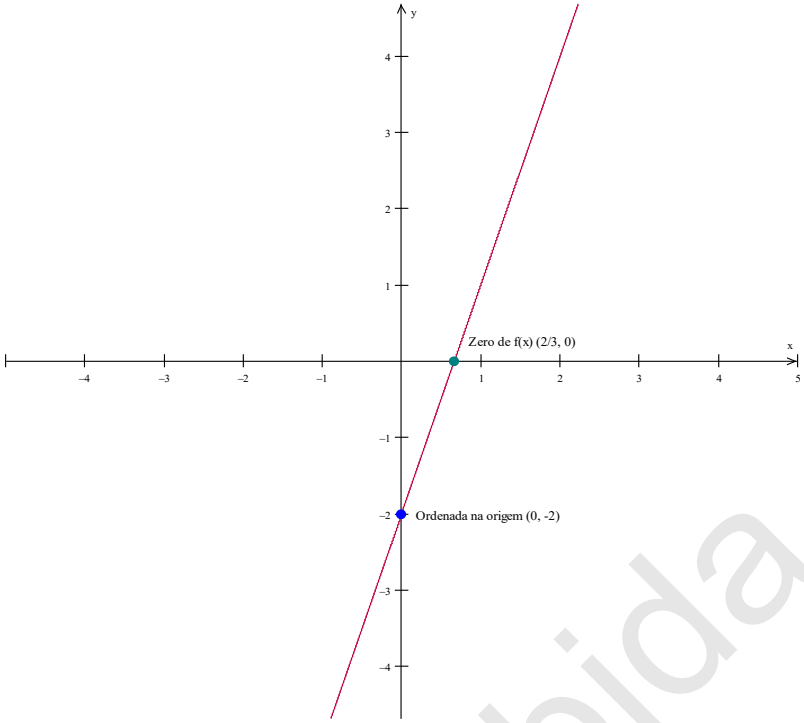
O ponto de intersecção entre o gráfico e o eixo x, chama-se **zero da função**.

O ponto de intersecção entre o gráfico e o eixo y, chama-se **ordenada na origem**.

O gráfico obtém-se marcando os pontos $(0, -2)$ e $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligando os dois pontos com uma recta.

Venda proibida

X	Y
0	-2
$\frac{2}{3}$	0



O gráfico de uma função linear dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma recta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Função linear do tipo $f(x) = ax$

Este é um caso particular da função linear em que o coeficiente angular é diferente de zero ($a \neq 0$) e a ordenada na origem é igual a zero ($b = 0$).

Exemplos:

- $\boldsymbol{f(x) = 2x}$, em que $a = 2$ e $b = 0$.
- $\boldsymbol{f(x) = -4x}$, em que $a = -4$ e $b = 0$.
- $\boldsymbol{f(x) = -\frac{3}{2}x}$, $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 0$.

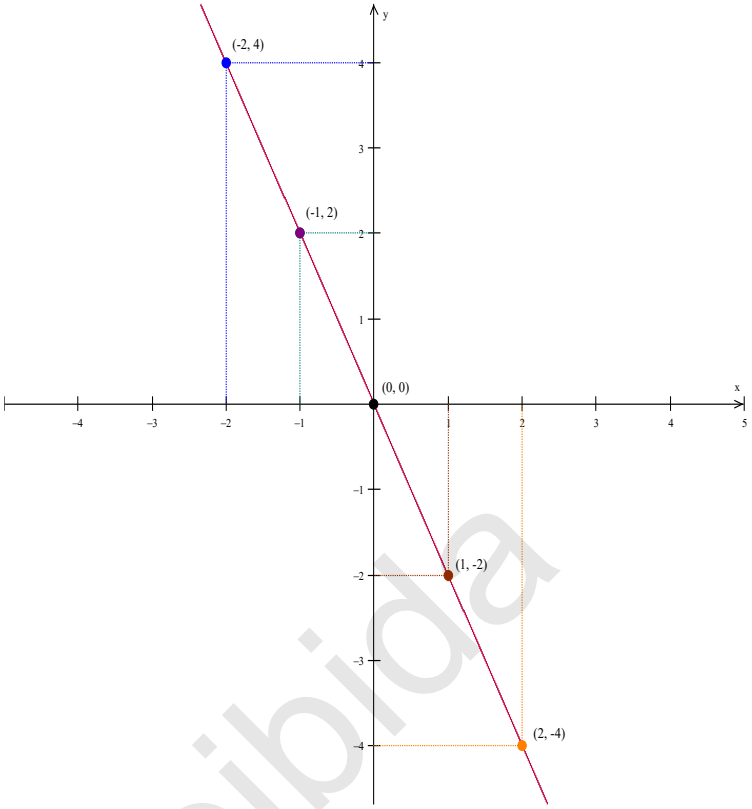
Gráfico da função linear do tipo $f(x) = ax$

Considere a função $\boldsymbol{f(x) = -2x.}$

Para construir o gráfico desta função, basta contruir uma tabela com os valores dos objectos e as respectivas imagens, marcar os pares ordenados no plano cartesiano e ligar os pontos com uma régua.

Venda proibida

X	$f(x) = -2x$
- 2	$f(-2) = -2 \times (-2) = 4$
- 1	$f(-1) = -2 \times (-1) = 2$
0	$f(0) = -2 \times 0 = 0$
1	$f(1) = -2 \times 1 = -2$
2	$f(2) = -2 \times 2 = -4$



Como vê, neste caso, o gráfico também é uma linha obliqua inclinada para a **esquerda**. Repare que o gráfico também **passa pela origem** dos eixos, isto é, pelas **coordenadas** $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Portanto, para toda função do tipo $f(x) = ax$ o gráfico é uma recta oblíqua que passa pela origem dos eixos $(0, 0)$.

Percebeu o conceito de função linear? Acompanhe a resolução da actividade seguinte de modo a dissipar qualquer dúvida.

Actividade

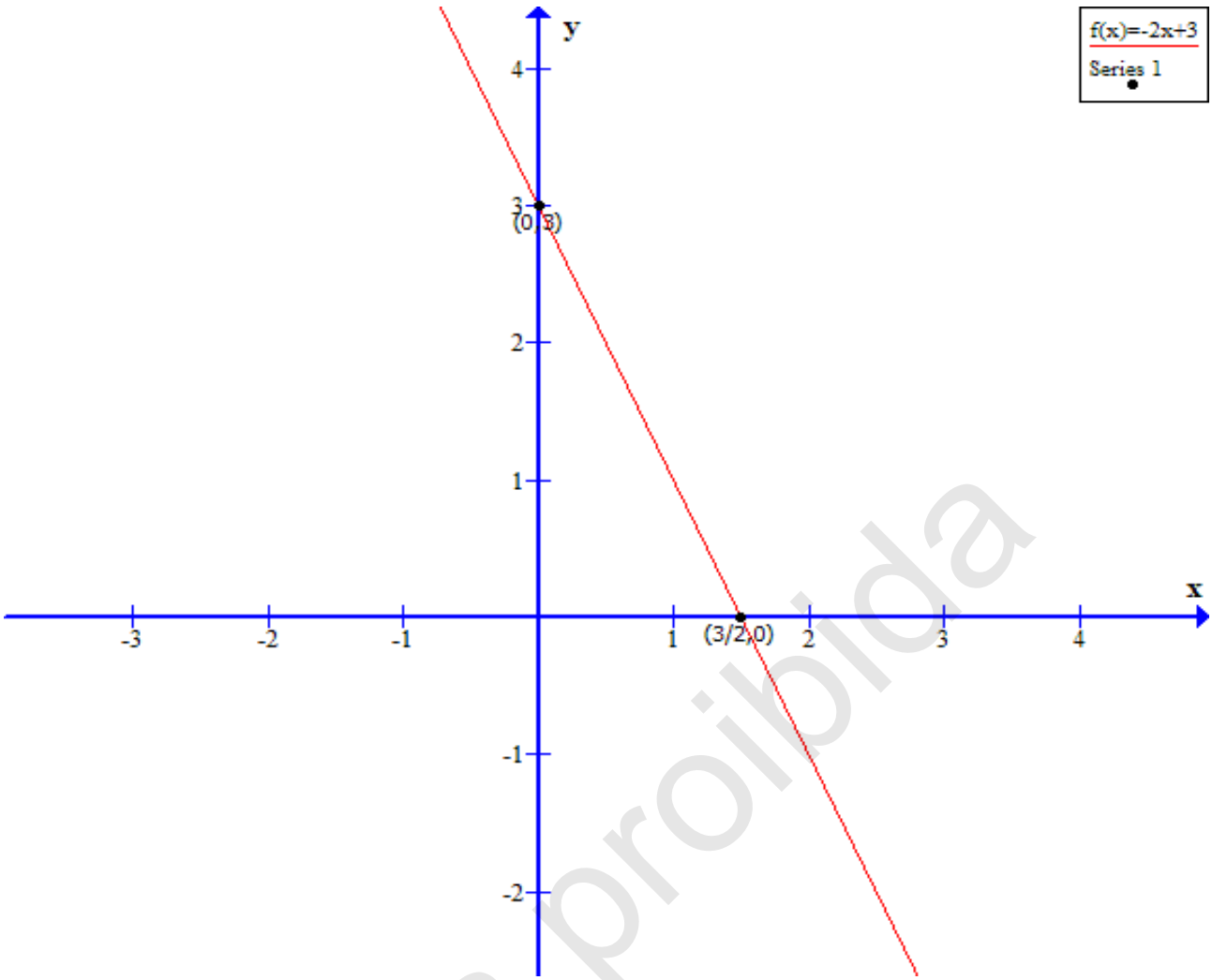
Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = -2x + 3$.

Solução:

- para $x = 0$, temos $f(0) = -2 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$; portanto um ponto é $(0, 3)$.
- para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3 \rightarrow -2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; portanto o outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Marcamos os pontos $(0, 3)$ e $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma recta.

Venda proibida



O gráfico é uma recta oblíqua, inclinada à esquerda. Isto é a função é decrescente.

Sempre que o **coeficiente de x for positivo** ($a > 0$), a função será **crescente**, ou seja, se os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam. Por outro lado, sempre que o **coeficiente de x for negativo**, a função será **decrescente**, isto é, quanto maior for o valor de x menor será o valor de y e vice-versa.

Tem alguma dúvida? Acredito que não! Faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Um mecânico cobra 500,00 Mt a visita e um adicional de 200,00 Mt por hora de trabalho.

a) Qual é a lei da função que representa o valor, em Mt, de um serviço de x horas feito pelo mecânico?

b) Esboce o gráfico dessa função.

Venda proibida

c) Quanto o mecânico receberia por um serviço de $2{,}5\ h$?

2. Um angariador de clientes recebe do banco onde trabalha um salário composto de duas partes:
   - uma ajuda de custos de $5000{,}00Mt$;
   - uma parte variável que corresponde um adicional de 5% sobre o valor de empréstimo dos clientes.

   Em certo mês, os empréstimos somaram $2.500.000{,}00\ Mt$. Quanto o angariador de clientes recebeu de salário?

3. Considere as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

   $a)\ y = -x + 3 \quad b)\ y = 2x - 3 \quad c)\ y = -3x \quad d)\ y = \frac{1}{2}x$

i) Identifique as funções crescentes e as decrescentes. Justifique.

ii) Identifique os coeficientes angulares (a) e as ordenadas (b) de cada função.

iii) Esboce os gráficos das funções.

iv) Identifique a propriedade comum aos gráficos das funções c) e d).

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.
Agora faça este exercício, no caderno.

Venda proibida

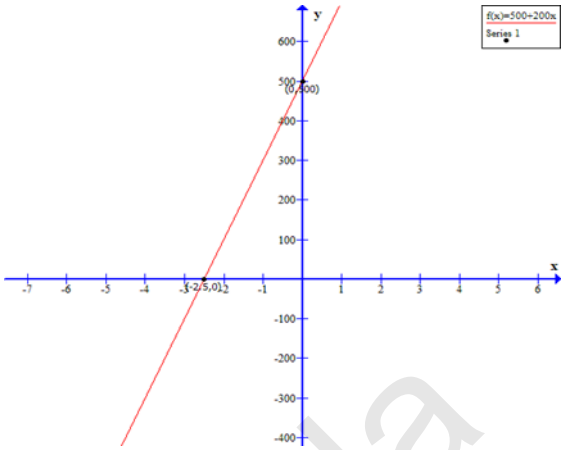
Resumo da lição

Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função linear, a qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e a diferente de zero ($a \neq 0$).
Na lei $f(x) = ax + b$, o número a é chamado coeficiente angular de $\boldsymbol{x}$, e o número $\boldsymbol{b}$ é chamado termo independente.
Para construir o gráfico da função, temos que construir uma tabela que relaciona os elementos do domínio ($\boldsymbol{x}$) e os do contradomínio ($\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{f(x)}$), marcar os pares ordenados no plano cartesiano e ligar os pontos com uma régua.
Portanto, para toda função do tipo $f(x) = ax$ o gráfico é uma recta oblíqua que passa pela origem dos eixos $(0, 0)$.
Sempre que o coeficiente de x for positivo ($a > 0$), a função será crescente e sempre que o coeficiente de x for negativo, a função será decrescente.
Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) $\boldsymbol{s = 500 + 200 \times x}$

   b)

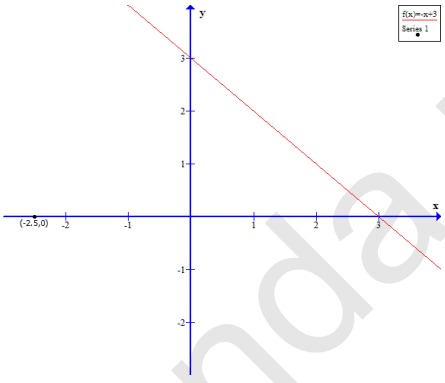


   c) $\boldsymbol{s = 500 + 200 \times 2,5 = 500 + 500 = 1000,00\ Mt}$

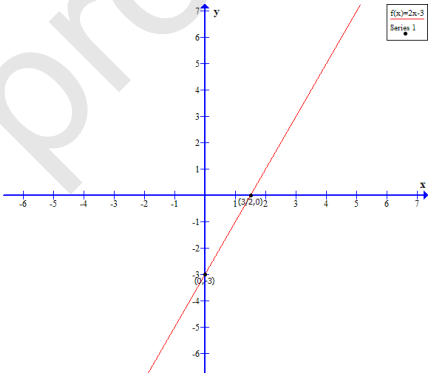
2. $\boldsymbol{s = 5000 + 5\% \times 2500000 = 5000 + 125000 = 130000,00 Mt}$

3. i) as funções crescentes são b) e d) porque os coeficientes são positivos, e as funções decrescentes são a) e c) porque os coeficientes são negativos.

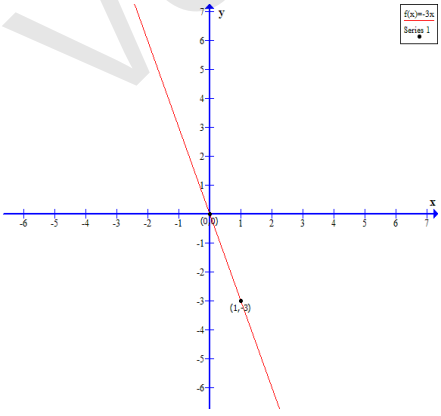
   ii) a) $\boldsymbol{a = -1\ \ b = 3}$ b) $\boldsymbol{a = 2\ \ b = -3}$ c) $\boldsymbol{a = -3\ \ b = 0}$ d) $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}\ \ b = 0}$



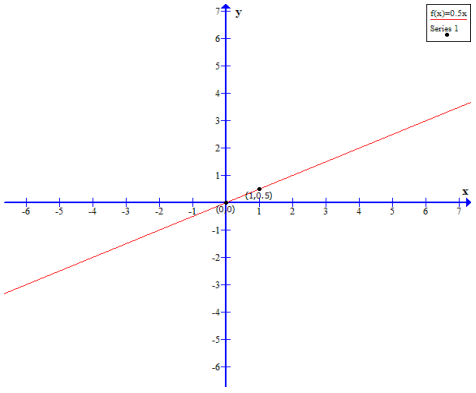
a)



b)



c)



d)

   iv) Ambos gráficos passam pela origem (0, 0).

Venda proibida

LIÇÃO Nº 13: Zero da função linear

Introdução

Caro aluno, depois de ter aprendido, na lição passada, a identificar uma função linear e a representá-la graficamente, vamos dar continuidade ao seu estudo, para ver como se determina zero deste tipo defunção.

Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar o zero de uma função linear;
- Relacionar, de forma intuitiva, a inclinação da recta com a constante de proporcionalidade, numa função linear.

Para a melhor compreensão desta lição precisa estudar 90 minutos.

Determinação de zero de uma função linear

Na lição passada aprendeu que para construir o gráfico de uma função linear, basta obter dois pontos do gráfico, o zero da função e a ordenada na origem, e ligá-los com o auxílio de uma régua.

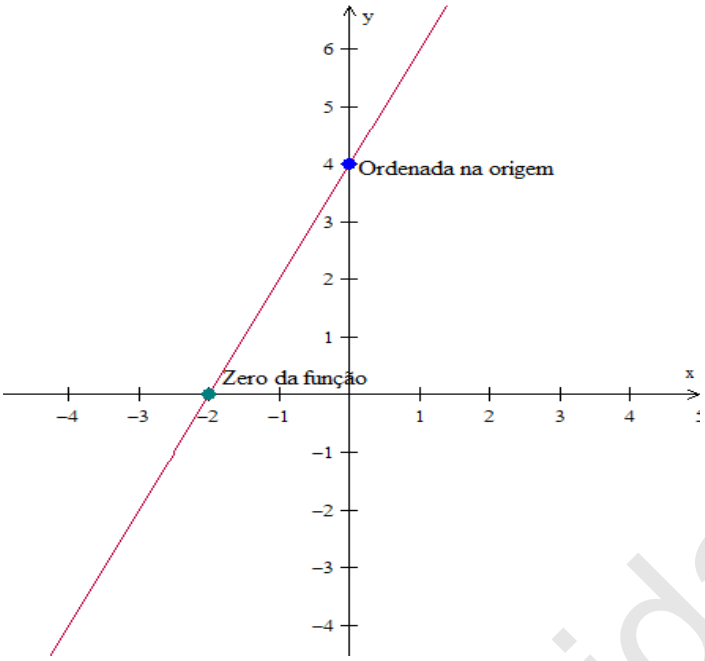
Por exemplo, para construir o gráfico de $f(x) = 2x + 4$, fazemos o seguinte:

- Ordenada na origem: para $x = 0$, temos $f(0) = 2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$; portanto a ordenada é $(0, 4)$.
- Zero da função: para $y = 0$, temos $0 = 2x + 4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$; portanto o zero da função é $(-2, 0)$.

O gráfico obtém-se marcando os pontos $(0, 4)$ e $(-2, 0)$ no plano cartesiano e ligando os dois pontos com uma recta.

Venda proibida

X	Y
0	4
- 2	0



A partir do gráfico é possível observar que o **zero da função** é o ponto de intersecção entre o gráfico e o eixo x, e para obtê-lo basta substituir, na função, o valor de y por 0.

Portanto, chama-se **zero da função linear**, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real $\boldsymbol{x}$ tal que $f(x) = 0$.

Assim,

$$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Fórmula resolvente do zero da função linear

Percebeu como se determina o zero de uma função linear?

Acompanhe a resolução da seguinte actividade.

Actividade

1. Determine o zero da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 5$.

Para resolver este exercício é preciso recorrer à expressão geral da função linear, extrair os valores dos coeficientes a e b e recorrer à fórmula resolvente. Logo:

$\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{b = -5}$ $\quad \boldsymbol{x = -\frac{b}{a} \rightarrow x = -\frac{-5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2}}$ O zero da função é: $\frac{5}{2}$

2. Qual é o zero da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -3x - 6$?

Para determinar o zero da função, também, pode-se recorrer à definição:

$-3x - 6 = 0 \rightarrow -3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{-3} \rightarrow x = -2$ O zero da função é: -2.

Venda proibida

Significado geométrico dos coeficientes a e b

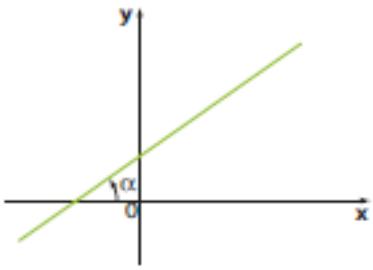
Já viu que o gráfico da função linear definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é uma recta.

Mas, qual é o significado geométrico dos coeficientes a e b?

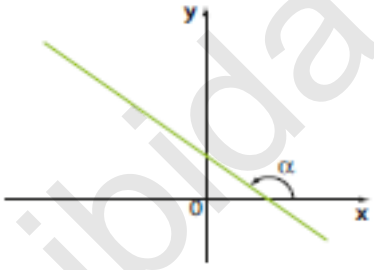
- **Significado do coeficiente a**

O coeficiente de x, indicado por a, é chamado **coeficiente angular** ou **declive da recta** e está ligado à inclinação da recta em relação ao eixo x.

Observe o ângulo α que a recta forma com o eixo x, convencionado tal como mostram os dois casos a seguir.



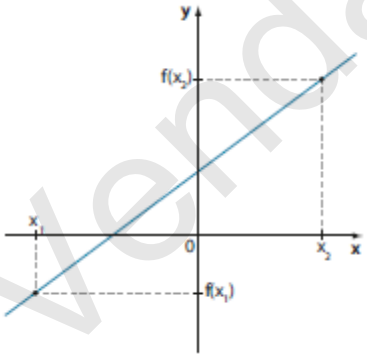
α é agudo ($0 < \alpha < 90°$)



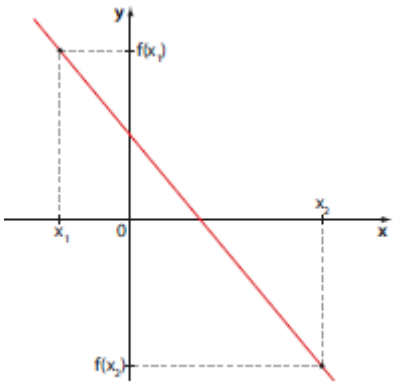
α é obtuso ($90° < \alpha < 180°$)

Considerando a função linear definida por $f(x) = ax + b$, temos duas possibilidades:

Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, $ax_1 + b < ax_2 + b$. Portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, e a função é dita crescente.



Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > a\,x_2$ e, $ax_1 + b > ax_2 + b$. Portanto, $f(x_1) > f(x_2)$ e a função é dita decrescente.



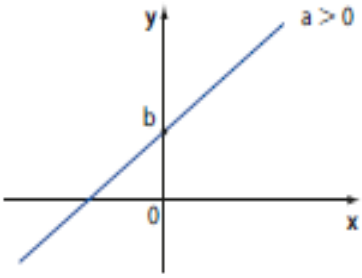
A taxa média de variação da função, quando x varia de x_1 a x_2 , com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente a: $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

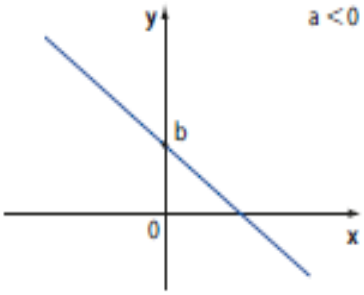
- **Significado do coeficiente b**

O termo constante **b** é chamado **coeficiente linear** da recta ou **ordenada na origem**. Portanto, para $x = 0$, temos $y = a \times 0 + b = b$.

O ponto $(0, b)$ pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a recta intersecta o eixo Oy.

Venda proibida





Percebeu o significado dos coeficientes a e b?

Dissipe qualquer dúvida, acompanhando a resolução das actividades seguintes.

Actividades

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

a) Diga se a função é crescente ou decrescente.

b) Determine a ordenada na origem.

Resolução:

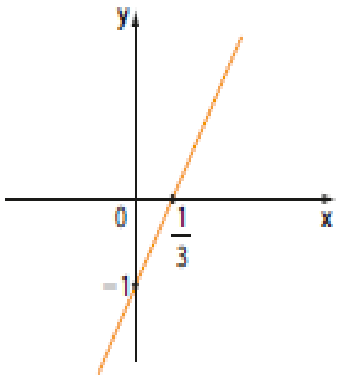
a) Repare que $a = 3 > 0$. Logo, a função é crescente.

O mesmo comportamento pode ser observado a partir da tabela e do gráfico da função:

x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5	8

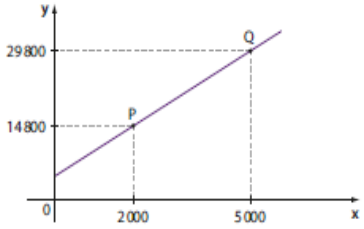
y aumenta



A partir da tabela é possível notar que quando os valores de $\boldsymbol{x}$ aumentam, os valores de $\boldsymbol{y}$, também, aumentam; e a partir do gráfico é possível notar que é uma linha recta crescente.

b) A ordenada na origem corresponde ao termo independente, na função, ou ao ponto em que a recta intersecta o eixo $\boldsymbol{Oy}$. Portanto, a ordenada na origem é $y = -1$.

2. O gráfico a seguir mostra o custo total mensal ($\boldsymbol{y}$), em meticais, para se fabricarem $\boldsymbol{x}$ unidades de caderno numa pequena fábrica.



Determine a taxa média de variação, em meticais/caderno, dessa função.

Resolução:

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \to a = \frac{29800 - 14800}{5000 - 2000} \to a = \frac{15000}{3000} \to a = 5.$

Venda proibida

A taxa média de variação dessa função é 5.

Tem alguma dúvida? Acredito que não! Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e das actividades resolvidas.

Faça este exercício, no caderno, de forma a ver se de facto não tem dúvida.

Exercícios

1. Dadas as funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pelas seguintes leis:

$a)\ f(x) = 2x - 7$ $\quad b)\ g(x) = -3x + 2$ $\quad c)\ h(x) = -\dfrac{3x-4}{2}$

$d)\ i(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{5}$ $\quad e)\ j(x) = -x$

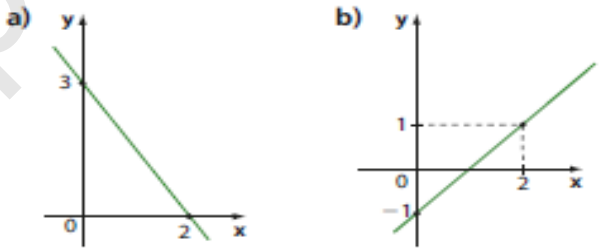
   i. Determine o zero de cada uma das funções.

   ii. Identifique, para cada função, o coeficiente angular e o coeficiente linear.

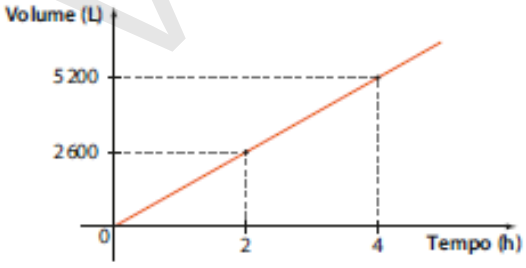
   iii. Classifique cada função em crescente ou decrescente.

2. Seja f uma função definida pela lei $f(x) = ax + 2$. Se -3 é zero da função, qual é o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{a}$?

3. Determine os valores dos coeficientes angulares e lineares (a e b, respectivamente) das rectas seguintes.



4. No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo, em litros, existente em um reservatório inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, de abastecimento do reservatório.



a) Determine a taxa de variação do volume em relação ao tempo.

b) Determine os coeficientes angular e linear dessa

Parabéns, conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho! A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Venda proibida

Resumo da lição

O zero de uma função linear corresponde à abscissa do ponto em que a recta intersecta o eixo Ox.

O zero da função linear, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, determina-se usando a fórmula $x = -\frac{b}{a}$.

O coeficiente de $\boldsymbol{x}$, indicado por a, é chamado coeficiente angular ou declive da recta e está ligado à inclinação da recta em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$.

A taxa média de variação da função, quando $\boldsymbol{x}$ varia de x_1 a x_2 , com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente a: $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Sempre que o coeficiente de x for positivo ($a > 0$), a função será crescente e sempre que o coeficiente de x for negativo ($a < 0$), a função será decrescente.

O termo constante b é chamado coeficiente linear da recta ou ordenada na origem. Portanto, para $x = 0$, temos $y = a \times 0 + b = b$.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na chave de correcção.

Venda proibida

Chave de correcção

1. i. a) $x = \frac{7}{2}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = \frac{4}{3}$ d) $x = \frac{3}{10}$ e) $x = 0$

   ii. a) $a = 2 \;\; b = -7$ b) $a = -3 \;\; b = 2$ c) $a = -\frac{3}{3} \;\; b = \frac{4}{2} = 2$

   d) $a = \frac{2}{3} \;\; b = -\frac{1}{5}$ e) $a = -1 \;\; b = 0$

   iii. a) Crescente b) Decrescente c) Decrescente d) Crescente e) Decrescente

2. $a(-3) + 2 = 0 \rightarrow -3a = -2 \rightarrow a = \frac{-2}{-3} \rightarrow a = \frac{2}{3}$

3. a) $a = \frac{0-3}{2-0} = -\frac{3}{2} \;\; b = 3$ b) $a = \frac{1-(-1)}{2-0} = \frac{2}{2} = 1 \;\; b = -1$

4. a) Taxa de variação $= \frac{5200-2600}{4-2} = \frac{2600}{2} = 1300$

   b) Coeficiente angular: $a = 1300$; coeficiente linear: $b = 0$.

LIÇÃO Nº 14: Expressão analítica da recta

Introdução

Caro aluno, na lição anterior aprendeu a determinar os zeros de uma função linear. Dando continuidade a esta matéria, nesta lição vai aprender a determinar a expressão analítica de uma recta. Bons estudos e bom trabalho!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar a expressão analítica duma recta.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa de estudar 90 durante minutos.

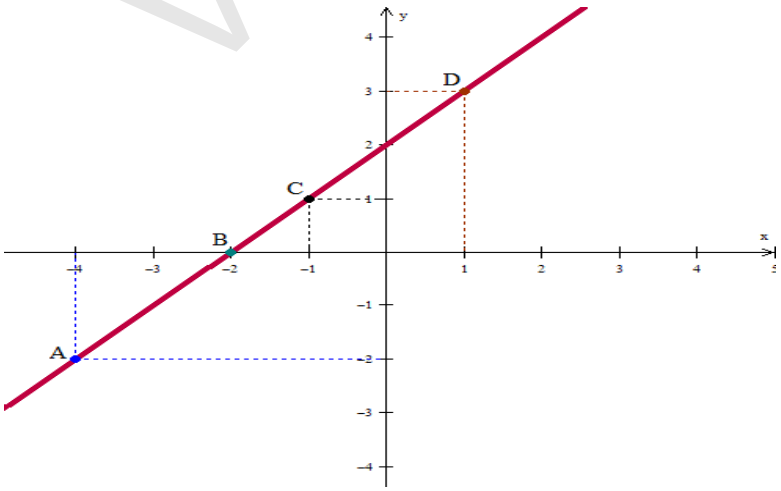
Determinação da expressão analítica duma recta

Nas aulas passadas aprendeu a representar graficamente uma função linear. Dessas lições constatou que o gráfico de uma função linear é uma linha recta, e que para representá-lo é necessário ter uma expressão analítica.

Será que é possível determinar a expressão analítica da recta, a partir do gráfico? Certamente que está a se fazer esta questão. É uma questão muito importante. Para ter a resposta desta questão, preste atenção na seguinte actividade.

Actividade

Observe o gráfico e indique as coordenadas dos pontos que fazem parte da recta.



Muito fácil, não é? Pois é, ao reparar no gráfico facilmente pôde identificar, para cada ponto, as seguintes coordenadas:

$A(-4,2)$ $B(-2,0)$

$C(-1,1)$ $D(1,3)$

Assim, constatamos que numa recta podemos encontrar vários pontos. Ou seja, uma recta é constituída por diversos pontos.

Venda proibida

Mas, como se determina a expressão analítica duma recta?

Para determinarmos a expressão analítica de uma recta, basta simplesmente termos as coordenadas de dois pontos que constituem a recta.

Note que a expressão analítica de uma recta é escrita na forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, onde os coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são chamados **declive da recta** e **ordenada na origem**, respectivamente.

Os passos a serem seguidos para determinar a expressão analítica da recta são:

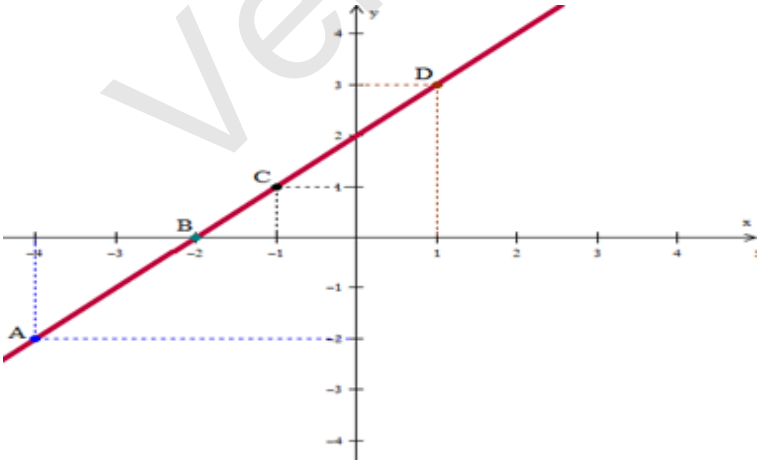
- **Primeiro passo:** Determinar os coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**:**
  - Para determinar o declive da recta $\boldsymbol{a}$, podemos usar a fórmula $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde x_1 e y_1 são as coordenadas do primeiro ponto, e x_2 e y_2 são as coordenadas do segundo ponto.
  - A ordenada na origem, **b**, podemos obter substituindo as coordenadas de um dos pontos, assim como o valor do declive da recta, na expressão $\boldsymbol{y = ax + b}$.
- **Segundo passo:** Escrever a expressão analítica $\boldsymbol{y = ax + b}$**,** substituindo os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ pelos valores determinados no primeiro passo.

Compreendeu os passos para determinar a expressão analítica da recta?

Ainda não? Não se preocupe. Vamos resolver as actividades que se seguem para clarificar a matéria.

Actividades

1. Considere a recta da figura. Determine a sua expressão analítica.



Conforme dissemos, no início da lição, a recta é constituída por vários pontos dos quais alguns estão representados na figura.

Para determinarmos a expressão analítica da recta, basta usarmos apenas dois pontos da recta e aplicarmos os passos acima descritos.

Tomemos, por exemplo, os pontos $\mathrm{A}(-4,-2)$ e $\mathrm{C}(-1,1)$. Destes pontos, podemos constatar que $x_1 = -4$, $y_1 = -2$, $x_2 = -1$ e $y_2 = 1$. Assim, vamos recorrer aos dois passos para determinarmos a expressão analítica da recta:

Venda proibida

Primeiro passo: Determinação dos coeficientes **a** e **b**

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a = \frac{1-(-2)}{-1-(-4)} = \frac{1+2}{-1+4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{3} \Leftrightarrow a = 1$
- Se tomarmos as coordenadas do ponto $\mathrm{C}(-1, 1)$ (isto é $x = -1$ e $\mathrm{y} = 1$) assim como o valor de $a = 1$ e substituirmos na expressão $\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$, obtemos o seguinte:

$1 = 1 \times (-1) + \mathrm{b} \Leftrightarrow 1 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1 + 1 \Leftrightarrow b = 2$

Portanto, o declive da recta é $a = 1$ e a ordenada na origem é $b = 2$.

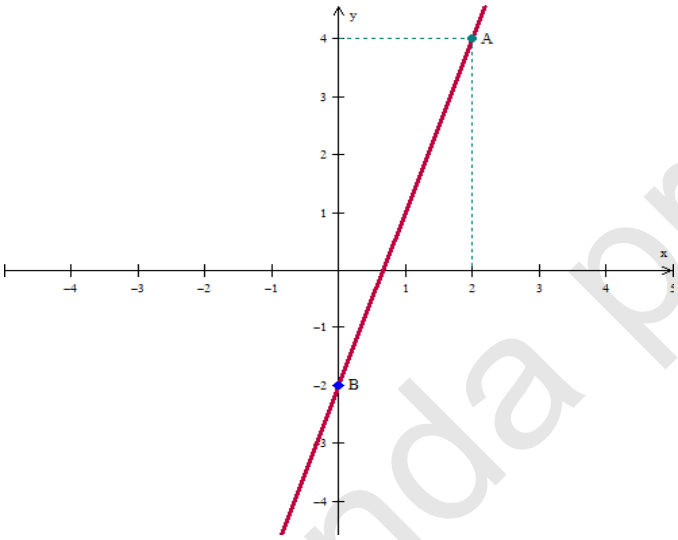
Segundo passo: Expressão analítica

Substituindo os valores de **a** e **b**, na expressão $\mathrm{y} = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, por $a = 1$ e $b = 2$, temos:

$\mathrm{y} = 1 \times x + 2 \Leftrightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$

Portanto, a expressão analítica da recta é $\mathbf{y} = \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$.

2. Determine a expressão analítica da recta representada pelo gráfico abaixo.



Reparando a figura, é possível verificar que nela estão representados dois pontos, que têm como coordenadas $A(2, 4)$ e $B(0, -2)$, isto é: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_2 = 0$ e $y_2 = -2$.

Para determinarmos a expressão analítica, vamos recorrer aos dois passos:

Primeiro passo: Determinação dos coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a = \frac{-2-4}{0-2} = \frac{-6}{-2} \Leftrightarrow a = 3$
- Se repararmos o gráfico, podemos notar que a recta intersecta o eixo $0y$ no ponto $B(0, -2)$. Isso implica que -2 é a **ordenada na origem.**

Portanto, o declive da recta é $a = 3$ e a ordenada na origem é $b = -2$.

Segundo passo: Expressão analítica

Substituindo os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, na expressão $\mathrm{y} = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, por $a = 3$ e $b = -2$, temos:

$\mathrm{y} = 3 \times x + (-2) \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$

Portanto, a expressão analítica da recta é $\mathbf{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$.

3. Determine a expressão analítica de uma recta que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(1, 4)$.

Venda proibida

Apesar de não termos o gráfico que representa a recta, temos dois pontos por onde a recta passa, isto é, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $y_2 = 4$. Assim, vamos recorrer aos dois passos para determinarmos a expressão analítica da recta:

Primeiro passo: Determinação dos coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a = \frac{4-3}{1-2} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow a = -1$
- Se tomarmos as coordenadas do ponto $\mathrm{B}(1, 4)$ (isto é $x = 1$ e $\mathrm{y} = 4$), assim como o valor de $a = -1$ e substituirmos na expressão $y = ax + b$, obtemos o seguinte:

$4 = -1 \times 1 + \mathrm{b} \Leftrightarrow 4 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4 + 1 \Leftrightarrow b = 5$

Portanto, o declive da recta é $a = -1$ e a ordenada na origem é $b = 5$.

Segundo passo: Expressão analítica

Substituindo os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, na expressão $\mathrm{y} = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, por $a = -1$ e $b = 5$, temos:

$y = -1 \times x + 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -x + 5}$

Portanto, a expressão analítica da recta é $\boldsymbol{y = -x + 5.}$

Tem alguma dúvida? Acredito que não!

Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria e dos exercícios resolvidos. Se a dúvida prevalecer, não deixe de contactar o tutor.

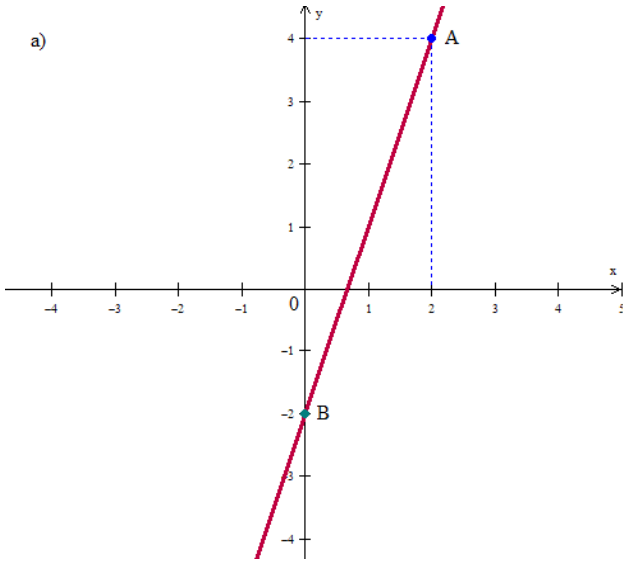
Agora faça este exercício, no caderno.

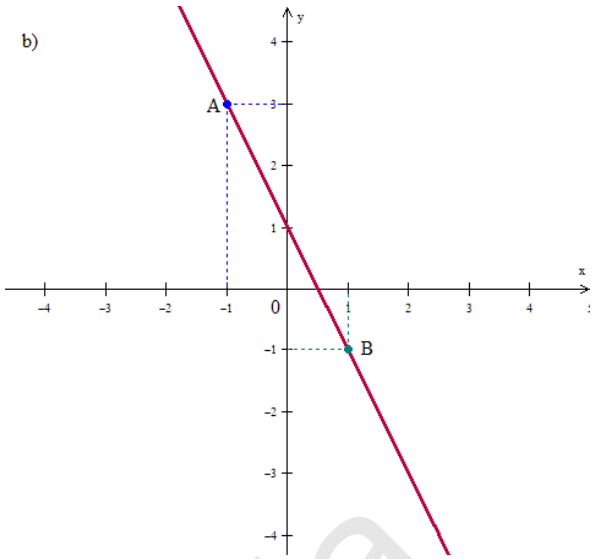
Exercícios

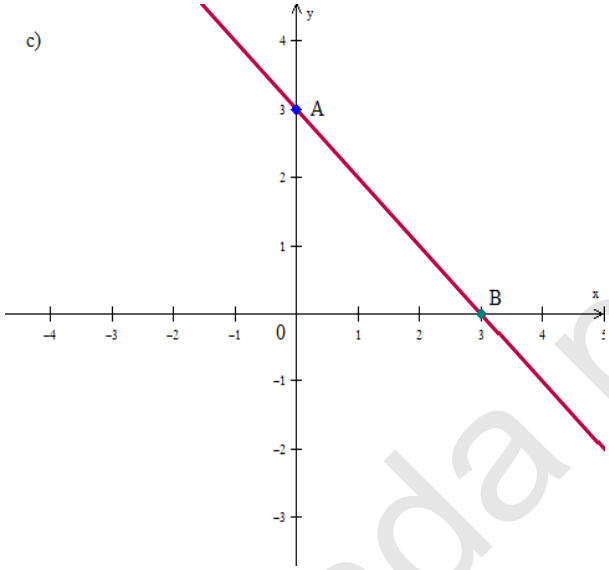
1. Determine as expressões analíticas das rectas com as seguintes características:
   a) Passa por dois pontos $\mathrm{A}(2, -2)$ e $\mathrm{C}(4, 1)$.
   b) O declive é -3 e passa por $\mathrm{A}(0, -2)$.
   c) A ordenada na origem é 6 e passa por $\mathrm{B}(-2, 2)$.
   d) O declive é 2 e a ordenada na origem é -5.

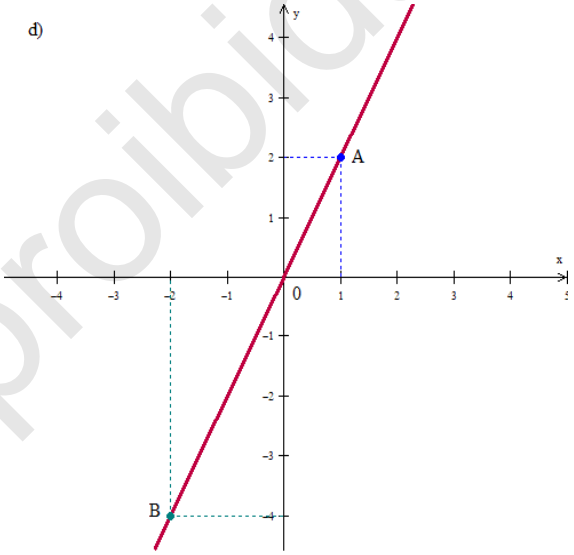
2. Determine as expressões analíticas das rectas representadas nas figuras abaixo:

Venda proibida









Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Parabéns, conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho!

Venda proibida

Resumo da lição

A expressão analítica de uma recta é escrita na forma $\mathbf{y = ax + b}$, onde os coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são chamados **declive da recta** e **ordenada na origem**, respectivamente.

Os passos a serem seguidos para determinar a expressão analítica da recta são:

- **Primeiro passo:** Determinar os coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$**:**
  - Para determinar o declive da recta, **a**, podemos usar a fórmula $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde x_1 e y_1 são as coordenadas do primeiro ponto, e x_2 e y_2 são as coordenadas do segundo ponto.
  - A ordenada na origem, $\boldsymbol{b}$, pode obter-se substituindo as coordenadas de um dos pontos, assim como o valor do declive da recta, na expressão $\mathbf{y = ax + b}$.

- **Segundo passo:** Escrever a expressão analítica $\mathbf{y = ax + b}$, substituindo os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ pelos valores determinados no primeiro passo.

Agora que já resolveu os exercícios, compare os seus resultados com os que estão na chave de correcção.

Chave de correcção

1. $a)\ y = \frac{3}{2}x - 5 \quad b)\ y = -3x - 2 \quad c)\ y = 2x + 6 \quad d)\ y = 2x - 5$
2. $a)\ y = 3x - 2 \quad b)\ y = -2x + 1 \quad c)\ y = -x + 3 \quad d)\ y = 2x$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 15: Números reais

Introdução

Nesta lição vai estudar como surgiram os números reais e a sua representação na recta graduada. Vai ainda aprender a estabelecer a relação existente entre os conjuntos numéricos, aplicando o que já aprendeu da relação entre conjuntos.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Explicar o surgimento dos números reais;
- Relacionar os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$;
- Representar os números reais na recta graduada.

Para a melhor compreensão desta lição você precisa de estudar 90 durante minutos.

Nas lições anteriores aprendeu que formar conjunto significa classificar e reunir elementos que apresentam uma ou mais características comuns. Você se lembra da sequência dos números naturais ou dos números inteiros e dos números racionais, bem como do símbolo para indicar a relação de pertença, não pertença ou inclusão?

Então vamos juntos, rever.

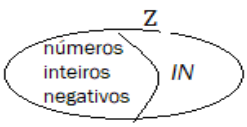
O símbolo usado para indicar o conjunto dos números naturais é $\mathbb{N}$. Os números 0,1, 2, 3, 4, 5,6, …são elementos de $\mathbb{N}$ e para dizermos que esses elementos pertencem ao conjunto $\mathbb{N}$, usamos o símbolo $\in$,

Exemplo:

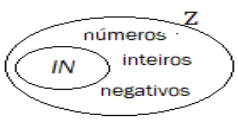
$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}$ ou $\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots.\}$ $\quad 1 \in \mathbb{N} \quad 0 \in \mathbb{N} \quad 0 \notin I\mathbb{N}^*$

Os símbolos $\in$ **e** $\notin$ indicam a relação **pertença** ou **não pertença** de um elemento a um conjunto.

Os números inteiros negativos, reunidos com os números naturais formam o conjunto dos números inteiros e o símbolo usado para indicar este conjunto é $\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.Daí conclui-se que $\mathbb{N}$ **está contido** $\mathbb{Z}$ e indicamos assim $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$**.** Também podemos dizer que $\mathbb{Z}$ **contém** $\mathbb{N}$ e indicamos desta maneira $\mathbb{N} \supset \mathbb{Z}$. A seguir veja como podemos representar esta relação usando o diagrama de Venn.



ou



Venda proibida

Os símbolos $\subset$; $\supset$; $\not\supset$ e $\not\subset$ indicam a relação da inclusão entre conjuntos, isto é, se um conjunto está ou não contido em outro conjunto.

Além dos números naturais e inteiros, também aprendeste **os números fraccionários** e **os números decimais** que estão relacionados entre si, pois toda fracção pode ser escrita na forma decimal e todo número na forma decimal possui uma representação fraccionária exacta ou aproximada.

Exemplos:

$$\frac{3}{8} = 0,375 \qquad -\frac{5}{4} = -1,25 \qquad 0,4 = \frac{2}{5} \qquad -34,5 = -\frac{345}{10}$$

As fracções, acima indicadas têm como representação um número decimal exacto, designado por **dízimas finitas,** pois o resto da divisão é zero. Mas existem outras fracções cuja representação decimal possui infinitas casas decimais com algarismos que se repetem periodicamente pela mesma ordem. Ao quociente deste tipo da divisão é designado **dízima infinita periódica** e período pode ser escrito dentro de parêntesis

Exemplos:

$$\frac{4}{9} = 0,4444 \ldots \Leftrightarrow \frac{4}{9} = 0,(4) \qquad \frac{15}{11} = 1,3636 \ldots \Leftrightarrow \frac{15}{11} = 1,(36)$$

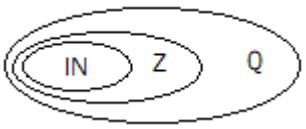
Ora vejamos, a representação decimal das duas fracções, acima indicadas, elas mostram que nos dois números, a divisão não termina, isso pode verificar, junto com os seus colegas do CAA.

Os **números fraccionários**, **os números decimais exactos** ou **dízimas finitas** e **as dízimas infinitas periódicas** representam **o conjunto dos números racionais** e o símbolo para indicar este conjunto é $\mathbb{Q}$.

Agora observe a representação dos seguintes números racionais**:**

$$5 = \frac{10}{2} \qquad -8 = -\frac{48}{6} \qquad 10 = \frac{40}{4} \qquad -12 = -\frac{36}{3}$$

A partir desta representação, repare que os números racionais podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros. Por isso, os números inteiros também fazem parte do conjunto dos números racionais**.** Assim pode se afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$**.** Esta relação pode ser representada por meio de diagrama de Venn, como se mostra, a seguir.



Este é o resumo dos conjuntos numéricos que já aprendeu. Agora, nesta lição vai iniciar aprender um novo conjunto numérico, mas antes, precisa de lembrar-se que assim como existem as dizimas infinitas periódicas, também existem **as dizimas infinitas não periódicas**.

Venda proibida

As dízimas infinitas não periódicas representam os números decimais que não podem ser expressos por meio de uma fracção, ou seja, não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$.

Exemplos:

$\pi = 3{,}142857143\ldots$

$\sqrt{2} = 1{,}141592654\ldots$

$e = 2{,}718281828\ldots$. (número de Neper) e outros números ou raízes não perfeitas $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots)$ com as mesmas características.

Estas dízimas infinitas não periódicas chamam-se **números irracionais,** ou seja, representam o **conjunto dos números irracionais**, em algumas referências bibliográficas, usam a letra $\mathbb{I}$ como simbolo, outros usam $\{\boldsymbol{numeros\ irracionais}\}$**.**

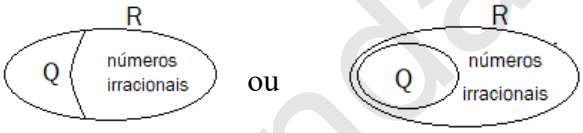
Número irracional é todo o número que pode ser representado por dízima infinita não periódica. Resumindo:

- **As dízimas finitas** e **infinitas periódicas** são **números racionais**.
- **As dízimas infinitas não periódicas** são **números irracionais**.

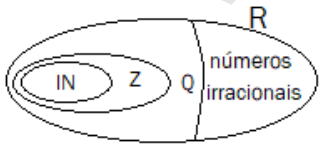
O conjunto dos números racionais com o conjunto de números irracionais formam um novo conjunto numérico designado por **conjunto dos números reais** cujo símbolo da sua representação é $\mathbb{R}$**.**

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{numeros\ irracionais\}$

Esta união pode ser representada por meio de diagrama de Venn, como se mostra, a seguir.



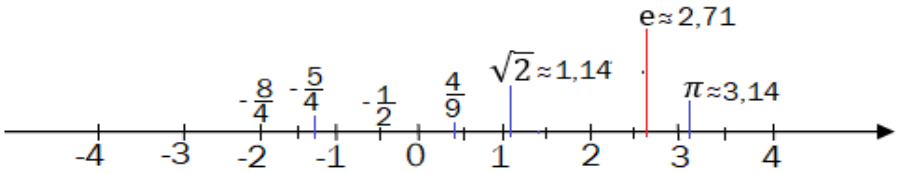
Não se esqueça que no conjunto dos números racionais estão contidos os conjuntos dos números inteiros e naturais. Esta relação pode ser representada por meio de diagrama de Venn, como se mostra, a seguir.



Representação dos números reais na recta numérica

Tal como, a cada número racional podemos associar um só ponto sobre a recta numérica, também a cada número irracional corresponde a um só ponto na recta. Observe a representação dos números reais na recta que se segue:

Venda proibida



Repara que na recta numérica estão representados números inteiros, racionais e irracionais, por isso a recta graduada também é designado por **recta real** ou **eixo real** e é formada por infinitos pontos, onde cada um deles correspondente a um número racional ou a um número irracional.

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Copie para o seu caderno e complete os espaços em branco com os símbolos $\in$ **ou** $\notin$

a) $5__\mathbb{N}$ b) $-3{,}16____\mathbb{Q}$ c) $-8__\mathbb{Z}$ d) $-4{,}8__\mathbb{Z}$

e) $-4{,}8__\mathbb{R}$ f) $\frac{3}{4}__\mathbb{N}$ g) $\frac{3}{4}__\mathbb{R}$ h) $-0{,}866\ldots__\mathbb{Q}$

2. Encontre a representação decimal das seguintes fracções e radicais, e indique a que conjunto numérico pertence cada um dos números acima mencionados:

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{30}{10}$ d) $-\frac{8}{11}$

e) $\frac{5}{8}$ f) $\frac{24}{12}$ g) $\sqrt{3}$ h) $\sqrt{8}$

3. Represente na recta numérica os seguintes números: $\sqrt{3};\ -4{,}75;\ 0{,}25;\ \frac{3}{5};\ 3{,}666\ldots;\ \sqrt{7}$

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da Lição

Nesta lição, aprendeu que o conjunto dos números reais é formado pelos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, e que o símbolo para a designação deste conjunto é $\mathbb{R}$.

Aprendeu também que a recta numérica representa a recta real pois nela estão representados todos conjuntos numéricos.

Ainda sobre os conjuntos numéricos que revimos nesta lição, aprendeu a estabelecer a relação destes com o conjunto dos números reais.

Venda proibida

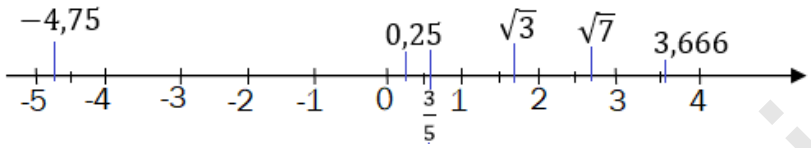
Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1-a) $\in$ b) $\in$ c) $\in$ d) $\notin$ e) $\in$ f) $\notin$ g) $\in$ h) $\in$

2-a) $0{,}25 \in \mathbb{Q}$ b) $-0{,}6 \in \mathbb{Q}$ c) $-3 \in \mathbb{Z}$ d) $-0{,}7272727273 \ldots \in \mathbb{I}$
e) $0{,}625 \in \mathbb{Q}$ f) $2 \in \mathbb{Z}$ g) $1{,}7321 \ldots \in \mathbb{I}$ h) $2{,}8284 \ldots \in \mathbb{I}$

3.



Venda proibida

LIÇÃO Nº 16: Relação entre conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Introdução

Nesta lição vai estudar a relação entre conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, tendo em conta a reunião, a intersecção, a igualdade de conjuntos.

Vai ainda, estudar os subconjuntos do $\mathbb{R}$.

Objectivos da lição

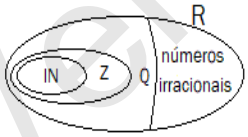
Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

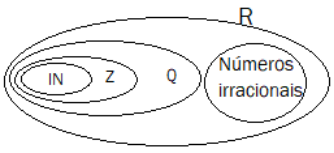
- Relacionar os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$;
- Identificar os subconjuntos de $\mathbb{R}$;
- Realizar operações de reunião e intersecção entre os conjuntos tendo $\mathbb{R}$ como conjunto universal.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Na lição anterior aprendeu que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e irracionais, o que significa que os conjuntos de números naturais, inteiros, racionais e irracionais estão contidos neste conjunto e, simbolicamente, escreve-se:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Esta relação pode ser representada pelo diagrama de venn





O conjunto $\mathbb{R}$ tem como subconjuntos:

$\mathbb{R}^- = \{\textbf{Números reais negativos}\}$

$\mathbb{R}^+ = \{\textbf{Números reais posetivos}\}$

$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^- = \{\textbf{Números reais não posetivos}\}$

$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^+ = \{\textbf{Números reais não negativos}\}$

Assim:

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^- = \mathbb{R}^- \cup \{\mathbf{0}\}$

$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\mathbf{0}\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^+ \cup \mathbb{R}^-$

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto numérico universal. Ele representa o universo numérico através da recta numérica ou eixo real.

Para esclarecer a afirmação acima citada, vamos resolver juntos a seguinte questão:

Venda proibida

Exemplo:

Do conjunto $A = \{-7;\ \sqrt{3};\ \frac{19}{12}; 0;\ \sqrt{5}; 4; \sqrt{49};\ \sqrt{87}\}$ Indique os elementos que são:

a) Irracionais
b) Racionais
c) Reais
d) Reais não positivos
e) Reais negativos
f) Reais não negativos

Resolução

a) Irracionais: $\sqrt{3}; \sqrt{5};\ \sqrt{87}$
b) Racionais: $-7;\ \frac{19}{12}; 0; 4; \sqrt{49}$
c) Reais: $-7;\ \sqrt{3};\ \frac{19}{12}; 0;\ \sqrt{5}; 4; \sqrt{49};\ \sqrt{87}$
d) Reais não positivos: $-7; 0$
e) Reais negativos: -7
f) Reais não negativos: $\sqrt{3};\ \frac{19}{12}; 0;\ \sqrt{5}; 4; \sqrt{49};\ \sqrt{87}$

Observe a resposta c), nela estão os números inteiros, racionais e irracionais.

Agora, para sua exercitação, responda às questões que se seguem.

Exercícios

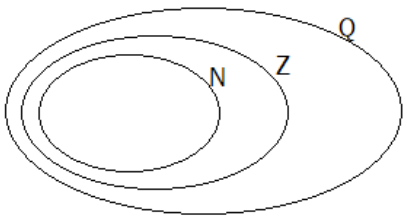
1. Complete, usando os símbolos $\in, \notin, \subset, \not\subset, \supset, \not\supset$ ou $=$ de modo a obter afirmações verdadeiras.

a) $5__\mathbb{R}$
b) $0__\mathbb{R}$
c) $\mathbb{N}__\mathbb{R}$
d) $\pi__\mathbb{R}$
e) $15{,}7(3)__\mathbb{R}$
f) $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}__\mathbb{R}^-$
g) $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}__\mathbb{R}^-$
h) $-\frac{7}{2}__\mathbb{R}$
i) $-\sqrt{48}__\mathbb{R}^-$
j) $\mathbb{R}^- \cup \{0\}__\mathbb{R}_0^-$
k) $\mathbb{N}__\mathbb{Z}__\mathbb{Q}__\mathbb{R}$
l) $\mathbb{R}____\mathbb{Q}___\mathbb{Z}____\mathbb{N}$

2. Assinale as afirmações verdadeiras com ***V*** e as falsas com ***F***

a) $2 \in \mathbb{R}^-$
b) $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}^-$
c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$
d) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$
e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
f) $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$
g) $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}^-$
h) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$
i) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$

3. Faca, no seu caderno, o diagrama similar abaixo e nele preencha os seguintes números: $0{,}75; 2\frac{3}{4};\ -16{,}439;\ -5364646\ldots;\ -64; -86; 26;\ 8; -\frac{8}{15}; 594$



Venda proibida

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Nesta lição, aprendeu as relações entre conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$). Foi possível notar que o conjunto dos números naturais está dentro do conjunto dos números inteiros relativos, por sua vez o conjunto dos números inteiros relativos, esta dentro do conjunto dos números racionais e por fim o conjunto dos números racionais esta dentro do conjunto dos números reais. Deve notar que o conjunto dos números reais é composto para alem dos números racionais, também temos números irracionais.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção. Acertou em todas? Se sim, está de parabéns.

Chave de correcção

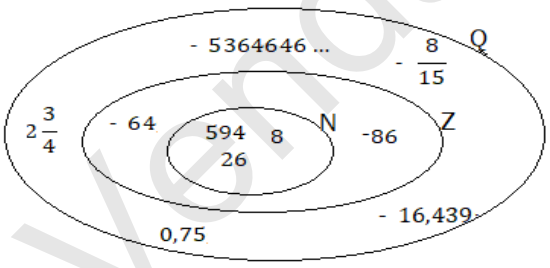
1- a) $\in$ b) $\in$ c) $\subset$ d) $\in$ e) $\in$ f) $=$

g) $\supset$ h) $\in$ i) $\in$ j) $=$ k) $\subset$ l) $\supset$

2- a) *F* b) *V* c) *V* d) *F* e) V

f) *V* g) *F* h) V i) V

3.



Venda proibida

LIÇÃO Nº 17: Intervalos de números reais

Introdução

Caro aluno, depois de você aprender a relação entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, nesta lição, vai ver os intervalos de números reais, a sua representação na recta graduada e as operações de reunião e intersecção com intervalos numéricos.

Desde já chamamos a sua atenção para este conteúdo.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Representar os intervalos numéricos na recta graduada;
- Determinar a reunião dos intervalos numéricos;
- Determinar a intersecção dos intervalos numéricos.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 180 minutos no mínimo.

Intervalos numéricos limitados e ilimitados

Caro aluno, feita a relação entre conjuntos numéricos, com especial destaque aos elementos do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), foi possível notar que este conjunto para além de integrar todos elementos dos outros conjuntos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$), apresenta outros novos números que transformados em decimais apresentam dízimas infinitas não periódicas (Irracionais), sendo que esses números permitem o preenchimento na totalidade dos pontos da recta graduada. Sendo assim, não será possível enumerar e nem representar todos elementos que compõem a recta nas chavetas mesmo num pequeno trecho da recta.

Com esta situação, somos desafiados a encontrar outra forma de representar essa infinidade de elementos (números), que só pode ser feita através da representação por intervalos de números. A representação por intervalos números é uma das mais importantes formas para a matemática pois permite que na recta graduada seja possível integrar todos elementos ou de um trecho da recta.

Esta representação consiste em definir pontos que limitam o conjunto ou onde começa. Ela é capaz de mostrar em que ponto um conjunto começa e onde termina, ou seja, o seu menor e maior elemento. Essa representação também pode indicar os números que não pertencem a esse conjunto, caso eles

Venda proibida

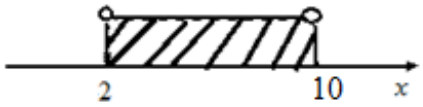
existam. Toda essa representação dos conjuntos numéricos é feita por símbolos. Geralmente, a representação por intervalos é usada para subconjuntos dos números reais.

Exemplo:

Consideremos o subconjunto A dos números reais maiores que 2 e menores que 10 são representados da seguinte maneira: $A = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 10\}$; representação em compreensão.

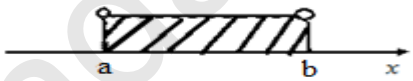
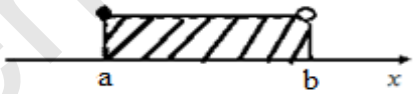
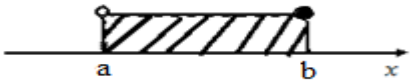
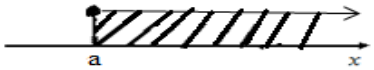
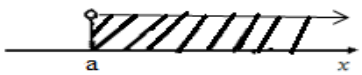
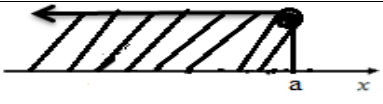
O mesmo conjunto pode representar-se sob forma de intervalo: $A = \ ]2; 10[$; lê-se intervalo aberto de 2 a 10 aberto. Aberto nas duas extremidades para indicar que o 2 e 10 não pertencem ao conjunto A.

Representação Geométrica



Nota: As bolinhas nas extremidades não estão pintadas, para indicar que os valores das extremidades não fazem parte do conjunto.

Caro aluno, podemos generalizar a representação dos intervalos números da seguinte forma: Considerando os $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais, sendo $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, podemos representar os seguintes subconjuntos de números reais:

Em compreensão	Geométrica	Em Intervalo
$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$		$[a; b]$- Limitado, fechado em a e b.
$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$		$]a; b[$ - Limitado, aberto em a e b.
$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$		$[a; b[$ - Limitado, fechado em a e aberto em b.
$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$		$]a; b]$- Limitado, aberto em a e fechado em b.
$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$		$[a; +\infty[$ - Ilimitado, fechado em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$		$]a; +\infty[$ - Ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$		$]-\infty; a[$ - Ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$		$]-\infty; a]$ - Ilimitado, fechado em a.

Venda proibida

Esta representação é muito importante pois irá nos ajudar para fazer as operações de reunião assim como de intersecção entre conjuntos numéricos, sendo assim convidamos desde já a sua maior atenção para o domínio deste conteúdo.

Reunião e intersecção de intervalos numéricos

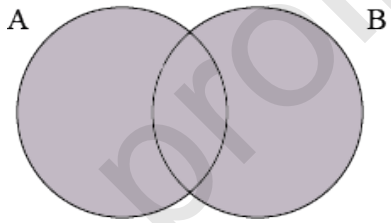
Caro aluno, recorda que no módulo 1 falamos das operações de reunião e intersecção entre conjuntos, onde destacamos que:

Reunião ou união

A união de dois conjuntos A e B, é o conjunto de todos elementos que pertencem a A ou B. Indicaremos a união pelo símbolo $\cup$.

Simbolicamente: $\boldsymbol{A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}}$

No Diagrama de Venn



Exemplo: Dados os conjuntos $\mathbf{A = \{2, 3, 4, 5, 7\}}$e $\mathbf{B = \{-2, -1, 2, 3, 5, 7\}}$, vamos representar o conjunto A $\cup$ B.

$\boldsymbol{A \cup B = \{-2, -1, 2, 3, 4, 5, 7\}}$ Este é o conjunto que representa reunião de A com B.

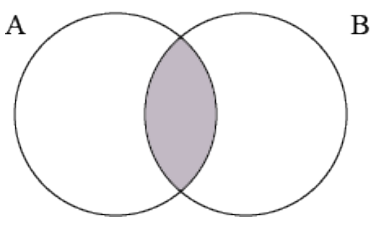
Interseção de conjuntos. Se reparar com atenção, nota que tem todos elementos dos dois conjuntos sem repetição.

Intersecção

A interseção de dois conjuntos A e B, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B. Indicaremos a interseção pelo símbolo : $\cap$

Simbolicamente: $\boldsymbol{A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}}$

No diagrama de Venn



Exemplo: Dados os conjuntos $\mathbf{A = \{2, 3, 4, 5, 7\}}$e $\mathbf{B = \{-2, -1, 2, 3, 5, 7\}}$ vamos representar o conjunto A $\cap$ B.

Venda proibida

$A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$ Este é o conjunto que representa interseção de A com B. Se reparar com atenção, nota que neste conjunto, temos apenas os elementos comuns para os dois conjuntos.

Esta era apenas uma recordação das duas operações (Reunião e Intersecção) dos conjuntos. Agora vamos passar para o conteúdo do dia, a reunião e intersecção de intervalos numéricos.

Caro aluno, com este conteúdo, vamos fazer o mesmo exercício que acabamos de fazer no anterior, o de rever, mas neste contexto já com intervalos numéricos.

Intersecção de intervalos numéricos

Consideremos os conjuntos A e B, dá-se o nome de intersecção dos dois, ao conjunto formado pelos elementos comuns a ambos os conjuntos e representa-se por $\mathbf{A \cap B}$. Que esta definição é a mesma que aplicamos na revisão.

Vamos considerar o seguinte exemplo: Dados os conjuntos $A =]1; 4]$ e $B = [2; 5[$, vamos representar o conjunto $A \cap B$.

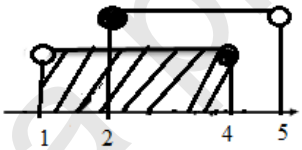
Para representar o conjunto $A \cap B$, devemos proceder da seguinte forma:

1º Representar os dois conjuntos na recta graduada;

2º Destacar os intervalos que compreendem a cada um dos intervalos;

3º Fazer leitura do intervalo que é comum para os dois intervalos.

$A \cap B =]1; 4] \cap [2; 5[$



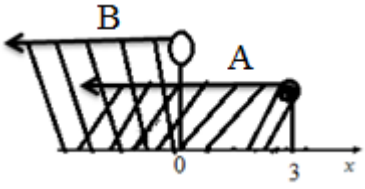
Fazendo a leitura deste gráfico, encontramos que a parte comum dos dois intervalos é o intervalo que começa do número 2 e termina no número 4. Logo: $]1; 4] \cap [2; 5[= [2; 4]$

Exemplo:

Dado os conjuntos: $A =]-\infty; 3]$ e $B =]-\infty; 0[$ Determine o conjunto $A \cap B$.

Resolução:

Para determinar o conjunto $A \cap B$, devemos seguir o mesmo procedimento anterior, onde vamos representar os dois conjuntos na recta graduada:



Em seguida fazer leitura, onde pode se notar que os dois conjuntos não têm ponto de início, isto é, vem de menos infinito$(-\infty)$, apenas apresentam onde terminam, o conjunto A termina no número 3

Venda proibida

e o conjunto B no número 0. O intervalo comum para os dois conjuntos, é a parte com duplo tracejado no gráfico, isto é, intervalo que vem de menos infinito até as proximidades de 0.
Logo: $]-\infty; 3] \cap]-\infty; 0[=]-\infty; 0[$.

Reunião intervalos numéricos

Caro aluno, vamos considerar os conjuntos A e B, dá-se o nome de reunião de dois conjuntos, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um, dos dois conjuntos e representa-se por $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Recorrendo aos mesmos intervalos que trabalhamos com eles na intersecção dos intervalos numéricos, $A =]1; 4]$ e $B = [2; 5[$, vamos encontrar o conjunto reunião de $A \cup B$.

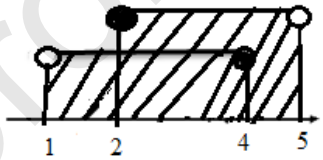
Para representar o conjunto $A \cup B$, devemos proceder da seguinte forma:

1º Representar os dois conjuntos na recta graduada;

2º Destacar os intervalos que compreendem a cada um dos intervalos;

3º Fazer leitura de onde começa o primeiro conjunto até onde termina o segundo conjunto, ou seja, onde existem todos elementos dos dois conjuntos.

$A \cup B =]1; 4] \cup [2; 5[$



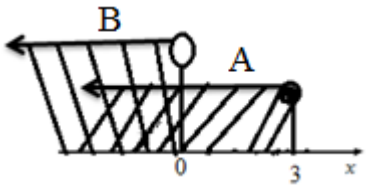
Fazendo a leitura deste gráfico, encontramos que os dois intervalos integram elementos que começam das proximidades de 1 e terminam nas proximidades de 5. Logo:$]1; 4] \cup [2; 5[=]1; 5[$.

Exemplo:

Dado os conjuntos: $A =]-\infty; 3]$ e $B =]-\infty; 0[$ determina o conjunto $A \cup B$.

Resolução:

Para determinar o conjunto $A \cup B$, devemos seguir o mesmo procedimento anterior, onde vamos representar os dois conjuntos na recta graduada



Em seguida fazer leitura, onde se pode notar que os dois conjuntos não têm ponto de início, isto é, vêm de menos infinito$(-\infty)$, apenas apresentam onde terminam, o conjunto A termina no número 3 e o conjunto B nas proximidades do 0. O intervalo que integra os dois conjuntos, é o conjunto que vem de menos infinito até 3, Logo: $]-\infty; 3] \cup]-\infty; 0[=]-\infty; 3]$.

Agora faça este exercício, no caderno.

Venda proibida

Exercícios

1. Considere em IR o conjunto $\left[-\frac{9}{2}; 1\right[$, indica:

a) Três números inteiros que pertencem a este conjunto.

b) Três números racionais não inteiros que pertencem a este conjunto.

c) Três números irracionais que pertencem a este conjunto.

2. Representa na forma de intervalos numéricos, cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $\{x \in \mathbb{R}: x > -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x < 4\}$

d) O conjunto dos números reais não inferiores a -5.

3. Dados os conjuntos, $A = [5, 9]$ e $B =]2, 7]$, determine:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

Parabéns, conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho! Confira o resumo da matéria a seguir

Resumo da lição:

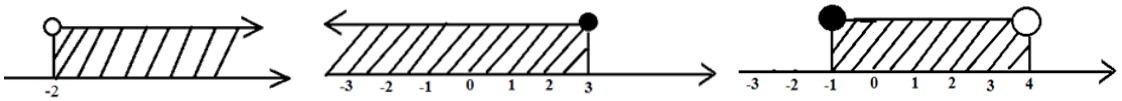
Nesta lição, você aprendeu a representação de intervalos numéricos limitados e ilimitados. Aprendeu igualmente a efectuar as operações de reunião e intersecção de conjuntos numéricos.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) $\{-3; -2; -1\}$ b) $\left\{-\frac{9}{3}; -\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right\}$

2. a) $x \in]-2, +\infty[$ b) $x \in]-\infty, 3]$ c) $x \in [-1, 4[$



3. a) $A \cap B = [5, 7]$ b) $A \cup B = [2, 9]$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 18: Inequações lineares

Introdução

Caro aluno, depois de você aprender intervalos numéricos e fazer a respectiva representação, bem assim, as operações de reunião e intersecção de conjunto tendo como foco a representação dos intervalos no eixo real e em compreensão.

Nesta lição vamos estudar as inequações lineares, a sua solução, as inequações equivalentes e os princípios de equivalência das inequações.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Definir Inequação;
- Identificar uma inequação;
- Identificar Solução de uma inequação;
- Identificar inequações equivalentes.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

Inequações lineares

Caro aluno, terminada a representação dos conjuntos solução da reunião e intersecção de conjuntos, que se espera ter assimilado com sucesso, agora vamos definir inequação. Mas antes da conceitualização do termo inequação, recordemo-nos que na representação dos intervalos numéricos em compreensão, encontramos expressões compostas por dois membros separados por um sinal de desigualdade ($>, <, \geq, \leq$).

Exemplo:

- $x > 0$
- $x < 2$
- $x \geq -1$
- $x \leq 3$

Estas expressões cada uma delas, têm uma infinidade de números que ao substituir na incógnita $\boldsymbol{x}$ transformam-se numa desigualdade verdadeira. Então, que nome daremos às expressões que apresentam dois membros separados por sinal de desigualdade?

Venda proibida

Inequações lineares – Definição

São desigualdades entre expressões que envolvem variáveis.

Exemplos:

- $x < 2$
- $x - 1 \geq 0$
- $y + 3 \leq 2y - 4$

Neste caso, uma inequação linear, temos o primeiro membro, segundo membro e os termos da inequação.

Para inequação: $y + 3 \leq 2y - 4$, o primeiro membro ee: $y + 3$, segundo membro: $2y - 4$, termos: $y, 3, 2y, -4$.

Caro aluno, com certeza já consegue identificar o que é uma inequação linear. Agora nos falta saber como encontrar solução de uma inequação linear, onde antes vamos saber o que é isso de solução de uma inequação linear.

Solução de inequações lineares

Falar de **solução de uma inequação linear**, é falar do conjunto dos valores (números) que ao substituir na incógnita transformam esta numa desigualdade verdadeira.

Como chegar a solução de uma inequação linear?

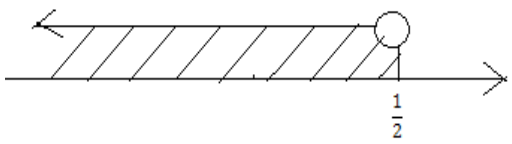
Para chegar a solução de uma inequação linear, temos que resolver a inequação, onde é necessário seguir alguns procedimentos da resolução. Esses procedimentos são mais conhecidos como princípios. Estes princípios vão permitir-nos obter **inequações equivalentes**.

Agora, o que são inequações equivalentes?

São inequações que têm o mesmo conjunto solução.

Exemplos:

- $x - 1 \geq 0$ é equivalente a $x \geq 1$
- é equivalente a $x < \frac{1}{2}$



Caro aluno, repare que nessas inequações equivalentes, houve uma transformação de uma das inequações para chegar na outra. por exemplo, na equação $x - 1 \geq 0$ para chegar à inequação $x \geq 1$ podemos dizer que dicionamos em ambos membros da inequação o número 1, isto é: $x - 1 + 1 \geq 0 + 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Venda proibida

Este processo de transformação das inequações, é feita na base do primeiro princípio de equivalência das inequações que são:

1º Princípio:

Adicionando ou subtraindo a ambos membros de uma inequação um mesmo número, obteremos uma equação equivalente à dada.

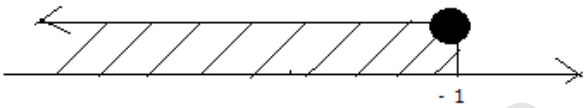
Exemplo:

$x + 2 \leq 1$

$\Leftrightarrow\ x + 2\ - 2 \leq 1\ - 2$

$\Leftrightarrow\ x + 0 \leq 1 - 1$

$\Leftrightarrow\ x \leq\ -1$



$x \in\ ]-\infty, -1[$

2º Princípio:

Multiplicando ou dividindo ambos os membros de uma inequação por um número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à dada. Onde:

- Se o número for positivo o sentido da desigualdade mantém-se;

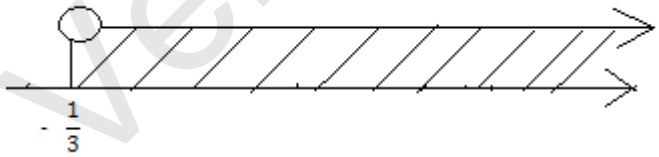
  Exemplo: $2x < 1\ \Leftrightarrow 2x.\frac{1}{2} < 1.\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

  $$x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$$

- Se for negativo, o sentido da desigualdade altera.

  Exemplo:

  $$-3x < 1\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) - 3x\ < 1\ \Leftrightarrow -3x.\left(-\frac{1}{3}\right) > 1.\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$



$$x\ \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

Aplicando os princípios de equivalência das inequações, encontre as inequações equivalentes mais simplificadas por cada alínea.

a) $5x\ - 12 \leq 0$

b) $7 - 3x < 10$

c) $51 \leq 6x + 15$

d) $16 - 4x \geq 11x - 29$

e) $\frac{2x}{3} + 6 \geq \frac{x}{5} + 9$

f) $3(x - 8) > 9x - 24$

g) $\frac{7x-4}{4} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x-1}{3} - 1$

Venda proibida

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da lição:

Nesta lição, você aprendeu a resolução das inequações lineares, aplicando os princípios de equivalências das inequações. Igualmente aprendeu a representar a solução de uma inequação no eixo real assim como sob forma de intervalo.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

a) $x \leq \frac{12}{5}$ b) $x > -1$ c) $x \geq 6$ d) $x \leq 3$ e) $x \geq \frac{45}{7}$ f) $x < 0$ g) $x < 10$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 19: Resolução de problemas envolvendo inequações lineares

Introdução

Caro aluno, você já sabe resolver inequações lineares. Nesta lição vai aprender a resolver problemas conducentes à obtenção de inequações lineares.

Sendo assim, chamamos, desde já, a sua atenção para estes conteúdos.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver problemas conducentes a uma inequação linear.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos no mínimo.

Resolução de problemas envolvendo inequações lineares

Caro aluno, as inequações lineares têm uma das suas aplicações na resolução de certo tipo de problemas tais como:

Exemplo:

A soma de um número com 10 é superior que a diferença entre o seu dobro com 3.

Para resolver este problema, primeiro temos que traduzir o problema na linguagem matemática.

Traduzindo na linguagem matemática, teremos:

1º Designemos o número pretendido por x;

2º A soma do número pretendido com 10: $x + 10$;

3º A diferença entre o seu dobro com três: $2x - 3$.

Então a tradução do problema na linguagem matemática é: $x + 10 > 2x - 3$. Esta é uma inequação do primeiro grau.

Resolvendo esta inequação, teremos:

$$x + 10 > 2x - 3$$

$x - 2x > -3 - 10$ Agrupando os termos semelhantes: -3 e 10, x e $-2x$

$-x > -13$

$x < 13$ - O sentido da desigualdade mudou, pois, o coeficiente (-1) é negativo.

Solução: $x \in \ ]-\infty; 13[$. Neste caso é uma infinidade de números que satisfazem o problema.

Venda proibida

Exemplo: Para $x = 10$ que faz parte do conjunto, substituindo na inequação e teremos:

$10 + 10 > 2 \times 10 - 3$

$20 > 20 - 3$

$20 > 17$ Verdadeiro

Caro aluno, depois de abordarmos o conteúdo sobre resolução dos problemas conducentes a obtenção de uma inequação linear, agora tem a tarefa de fazer os exercícios propostos para garantir a consolidação dos seus conhecimentos:

Exercícios

1. A diferença entre a terça parte do número 5 é inferior ao seu dobro. Equacione o problema e resolva.

2. Determine o menor múltiplo de 2 que verifica a condição seguinte: "$\frac{2}{3}$ da sua diferença com 1 é maior que 5".

3. Determine o menor múltiplo de 3 que verifica a condição seguinte:" $\frac{3}{4}$ da sua soma com 2 é maior que 11".

4. Qual é o menor número inteiro que se pode atribuir a n para que a expressão $\frac{1-3n}{5}$ tome um valor inferior a 6, mas não negativo.

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da lição:

Nesta lição, aprendeu resolver problemas do nosso cotidiano que envolvem inequações lineares, no âmbito da resolução de problemas conducentes a obtenção de inequações, devemos proceder da seguinte forma:

- Ler e compreender o problema;
- Identificar as variáveis com as quais vamos trabalhar;
- Compor a inequação que traduz o problema;

Venda proibida

- Resolver a inequação;
- verificar a solução da inequação se satisfaz o problema ou não;
- Dar a resposta de acordo com o pedido.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. $x > -3$ 2. 10 3. 15 4. – 9

Venda proibida

LIÇÃO Nº 20: Posições da recta em relação ao círculo

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai rever os elementos da circunferência e do círculo. Mas também, vai aprender outras características e propriedades da circunferência e do círculo, nomeadamente a recta secante, a recta tangente e o exterior.

Faça uma boa aprendizagem!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Definir a recta secante, a recta tangente e o exterior;
- Identificar a recta secante;
- Identificar a recta tangente;
- Identificar o exterior;
- Distinguir recta secante da tangente;
- Distinguir recta secante do exterior.

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 60 minutos.

No nosso quotidiano, estão presentes diversas formas geométricas. As circulares são as mais frequentes. Nas classes anteriores, já teve oportunidade de aprender algumas características e elementos da circunferência e de círculo. Nesta lição irá relembrar alguns desses elementos e aprender outras das suas características e propriedades. Agora na base das figuras abaixo apresentadas, responda às questões que se seguem como forma de recordar-se de alguns conceitos ligados à circunferência e círculo.

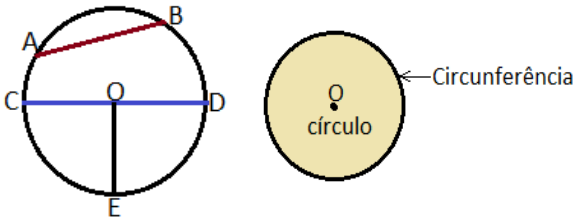
Actividades

a) Qual é a diferença que existe entre circunferência e círculo?

b) Quais são os elementos da circunferência?

c) Que nome dá ao segmento [AB], [CD] e [OE]?

d) Que relação existe entre o diâmetro e o raio?



Venda proibida

De certeza que conseguiu observar que a diferença que existe entre circunferência e o círculo consiste em o círculo ser uma superfície plana limitada por uma circunferência. Os elementos da circunferência são raio, corda, diâmetro e centro.

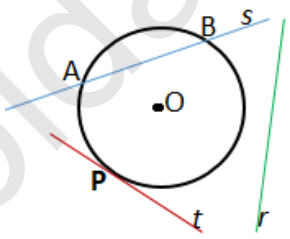
$\overline{AB}$ é uma **corda** da circunferência; $\overline{CD}$ é **diâmetro** ($\boldsymbol{d}$) da circunferência e $\overline{OE}$ é **o raio** ($\boldsymbol{r}$) da circunferência. O diâmetro é uma corda que passa pelo meio da circunferência.

Recorda-se que o diâmetro é igual ao dobro do raio ($d = \mathbf{2} \times \boldsymbol{r}$), onde $d \rightarrow$ diâmetro e $r \rightarrow$ raio

Depois desta revisão, vamos passar para a abordagem de conteúdo desta lição que faz referência das diferentes posições que uma recta pode tomar em relação a uma circunferência.

Posições da recta em relação ao círculo

Estimado aluno, observe a figura representada ao lado, ela representa uma circunferência de centro O e três rectas, nomeadamente:



- A recta ***s*** passa por pontos **A** e **B** pertencentes à circunferência;
- A recta ***t*** que passa, pelo ponto **P**, também, pertencente à circunferência;
- A recta ***r*** que não a intersecta.

Analisando a posição das rectas em relação a circunferência nota-se que;

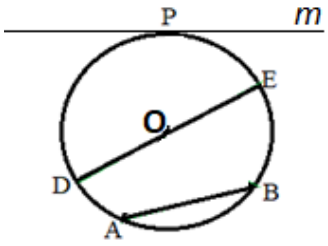
- A recta s corta a circunferência em dois pontos (A e B), isto é, a recta s e a circunferência têm dois pontos comuns. Assim, a recta ***s*** é considerada secante à circunferência.
- A recta t toca a circunferência num único ponto (p). Assim, a recta ***t*** é designada tangente à circunferência.
- A recta r não toca a circunferência, isto é, não tem nenhum ponto comum com a circunferência. Ela é considerada recta exterior porque a recta r não a intersecta.

Para consolidar os conceitos recta secante, recta tangente e exterior, responda às perguntas que se seguem:

Exercícios

1. Observe a figura, abaixo, desenhada e complete:

Venda proibida



a) O segmento [AB] chama-se_____.

b) O segmento [DE] chama-se_____.

c) Se o ponto ____ é o centro da _____ a corda _____ denomina-se _____.

d) A recta ___ é considerada ___ à circunferência porque a ___

e) O segmento ____é secante à circunferência porque os pontos ___ e ___ pertencem a circunferência.

2. Qual é a diferença que existe entre a recta m e o segmento [AB]?

3. Coloque V nas afirmações verdadeiras e F nas falsas.
   a) Uma recta que intersecta uma circunferência em dois pontos diz-se secante a circunferência.
   b) Uma recta tangente a uma circunferência intersecta-a num único ponto.
   c) Uma recta exterior a uma circunferência intersecta-a num único ponto.
   d) Se uma recta tem com uma circunferência um ponto comum, então ela diz-se tangente à circunferência.
   e) Se uma recta tem com uma circunferência dois pontos comum, então ela diz-se exterior à circunferência.

Venda proibida

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Após a resolução de exercícios vamos recapitular os conceitos tratados nesta lição:

Uma recta é secante à uma circunferência quando intersecta-a em dois pontos.

Uma recta é tangente à uma circunferência quando intersecta-a num único ponto.

Uma recta exterior à uma circunferência não a intersecta.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1. a) O segmento [AB] chama-se **corda.**

b) O segmento [DE] chama-se diâmetro.

c) Se o ponto **O** é o centro da circunferência a corda [DE] denomina-se diâmetro.

d) A recta $\boldsymbol{m}$ é considerada tangente à circunferência porque a intersecta por um só ponto.

e) O segmento [AB] é secante à circunferência porque os pontos A e C pertencem a circunferência.

2. A recta m é tangente enquanto o segmento [AB] é secante.

3. a) V b) V c) F d) V e) F

Então, conseguiu resolver mais da metade dos exercícios acertadamente? Excelente trabalho! Está a aprender bem esta matéria. Pode continuar com o seu estudo passando à lição que se segue. Se teve dificuldade em resolver os exercícios, sugerimos que procure a ajuda de colegas ou que visite o CAA e peça apoio ao Tutor. Convém não avançar com o seu estudo sem compreender bem como se fazem estes cálculos, pois vai precisar destes conhecimentos para as lições que se seguem. Não desanime!

Venda proibida

LIÇÃO Nº 21: Ângulo central

Introdução

Caro aluno, nesta lição aprenderá o ângulo central e o ângulo inscrito, tendo em conta a relação que existe entre estes ângulos.

Boa aprendizagem!

Objectivos da lição

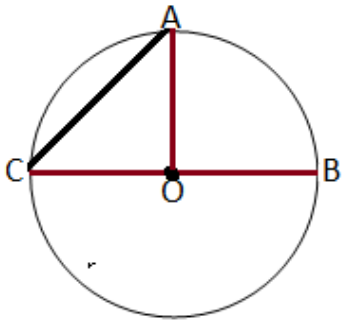
Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar ângulo inscrito;
- Identificar ângulo central
- Relacionar os ângulos inscritos e central;
- Caracterizar os ângulos inscritos sobre o diâmetro;
- Comparar as amplitudes dos ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes.

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 90 minutos.

Nas lições anteriores você aprendeu os elementos da circunferência e do círculo. Agora, antes de abordarmos conteúdos relacionados ao tema da lição, responda às questões que se seguem como forma de rever alguns conceitos ligados à circunferência e ao círculo.

Observe a figura ao lado e complete.



a) O segmento [AC] chama-se _____.

b) O segmento [CB] representa o _____ da circunferência de centro em O, e é a maior corda de uma circunferência.

c) A linha que sai do ponto A para o ponto B, no sentido dos ponteiros do relógio, chama-se _____ e é designado por ____

d) Nesta circunferência estão definidos três arcos que são: ____, ___ e ____.

e) O arco___ é o maior dos arcos da circunferência e é compreendido entre os pontos B e C.

d) No caso em que os dois arcos da circunferência são iguais a circunferência fica dividida ao meio e chamamos a cada arco de_____

Venda proibida

Caro aluno, ao responder estas questões conseguiu notar que:

O segmento [AC] chama-se **corda**, é o segmento de recta que interliga dois pontos da circunferência.

O segmento [CB] representa o **diâmetro** da circunferência de centro em O, e é a maior corda de uma circunferência.

A linha que sai do ponto **A** para o ponto **B** chama-se **arco** e é designado por $\widehat{\boldsymbol{AB}}$. As linhas $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$ são arcos da circunferência dada. O arco$\widehat{BC}$ é o maior dos arcos da circunferência e é compreendido entre os pontos **B** e **C**.

No caso em que os dois arcos da circunferência são iguais a circunferência fica dividida ao meio e chamamos a cada arco de **semi-circuferência**.

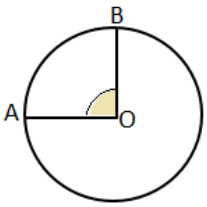
Exemplo:

Considerando os arcos $\widehat{CB}$ e $\widehat{BC}$, a circunferência fica dividida ao meio, obtendo assim duas semi-circunferências.

Bravo! Já terminou com a resolução das questões da revisão? Se a resposta é sim, então, vamos passar para abordagem dos conteúdos que dão continuidade de estudo da circunferência e o círculo.

Ângulo central e ângulo inscrito

Vejamos a figura ao lado. Nela está apresentado o **ângulo AOB** ($\boldsymbol{A\hat{O}B}$) que tem o seu vértice a coincidir com o centro da circunferência e cujos seus lados coincidem com circunferência nos pontos **A** e **B**. Este ângulo chamamos de **ângulo central** ou **ângulo ao centro.**



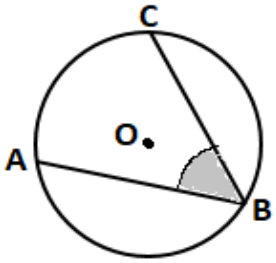
Repare que os pontos **A** e **B** definem o arco $\widehat{AB}$ que é o arco associado ou correspondente, ao ângulo ao centro, $\boldsymbol{A\hat{O}B}$ **.** Então, a medida da amplitude do ângulo ao centro, $\boldsymbol{A\hat{O}B}$ será dada pela medida do arco correspondente a este ângulo. Neste caso, pelo arco $\widehat{AB}$, ou seja, a medida do **arco** $\widehat{AB}$é dada pela medida da amplitude do **ângulo AOB**. E na linguagem matemática, escreve – se $\boxed{\widehat{AB} = \measuredangle AOB}$

.

Caro aluno, já tem conhecimento sobre o ângulo ao centro, agora vamos a noção de ângulo inscrito. Observe a figura apresentada a seguir:

Venda proibida

Na figura ao lado está representado o ângulo $A\hat{B}C$ com o vértice sobre a circunferência no ponto B e os seus dois lados a intersectarem a circunferência dada nos pontos A e B. A este ângulo chamaremos de ângulo inscrito ou circunscrito.

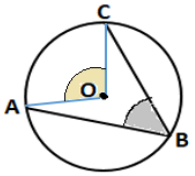


Repare que os lados do ângulo $A\hat{B}C$ formam as cordas AB e BC da circunferência dada.

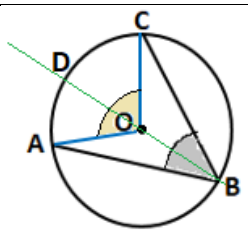
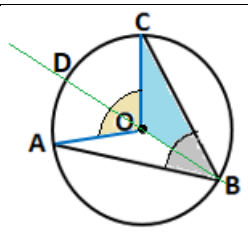
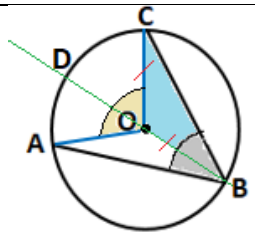
Na base desta descrição pode afirmar se que:

Ângulo inscrito é o ângulo cujo vértice está sobre um ponto da circunferência e cujos seus lados formam cordas.

Caro aluno, de certeza, pode estar a questionar-se: será que a medida da amplitude do ângulo inscrito é dada pela medida do arco correspondente a este ângulo? Tal como acontece com o ângulo ao centro? Para responder a esta questão, junte se a um amigo ou colega do CAA, juntos analisam atentamente as descrições das figuras que seguem ao lado. Caso tenha dificuldades de entender, pode procurar o tutor para dar auxílio. Certo? Então vamos proceder com a análise.



Repare que:

O $\sphericalangle AOC$ é angulo ao centro e o $\sphericalangle ABC$ é ângulo inscrito. O arco $\overset{\frown}{AC}$ é correspondente aos dois ângulos, isto é, pertencem aos $\sphericalangle AOC$ e $\sphericalangle ABC$. O centro O está no interior do ângulo inscrito, por isso, pode se traçar o diâmetro [BD].	
Considerando que o lado [DB] passa pelo centro O da circunferência. Os $\sphericalangle DOC$ e $\sphericalangle BOC$ são suplementares, o que quer dizer que a soma das suas amplitudes é um ângulo raso, isto é, $D\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$. (1) Considerando, ainda, o triangulo COB, a soma das amplitudes dos ângulos do triângulo é $\mathbf{180}^{\circ}$. Então, $\hat{C} + \hat{B} + B\hat{O}C = 180^{\circ}$(2)	
Em consequência das Igualdades (1) e (2), obtém-se: $D\hat{O}C + B\hat{O}C = \hat{C} + \hat{B} + B\hat{O}C \Leftrightarrow D\hat{O}C = \hat{C} + \hat{B} + B\hat{O}C - B\hat{O}C$ $\Leftrightarrow D\hat{O}C = \hat{C} + \hat{B}$ (3) O triângulo CBO é isósceles porque $\overline{OC} = \overline{OB}$ são raios da circunferência. Consequentemente, os $\sphericalangle B$ e $\sphericalangle C$ são congruentes, ou seja, $\hat{C} = \hat{B}$. E substituindo na igualdade (3), obtém-se:	

Venda proibida

$$D\hat{O}C = \hat{C} + \hat{B} \Leftrightarrow D\hat{O}C = \hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow D\hat{O}C = 2 \times \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{D\hat{O}C}{2}$$

Repara que o $\measuredangle B$ é angulo **inscrito** e o $\measuredangle DOC$ é angulo ao **centro** cujo arco correspondente é o arco $\overset{\frown}{DC}$. Então, a expressão $\hat{B} = \frac{D\hat{O}C}{2}$, significa que a medida da amplitude de um ângulo inscrito é a metade da medida da amplitude do ângulo ao centro associado ou correspondente.

Esta demonstração é valida para determinar a medida da amplitude de qualquer angulo inscrito.

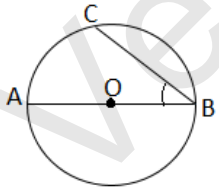
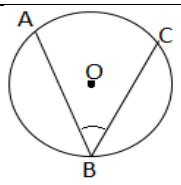
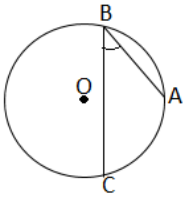
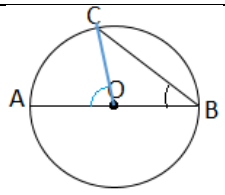
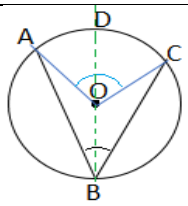
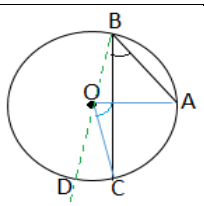
Voltando ao conteúdo em análise, repare que:

A medida da amplitude do angulo inscrito $A\hat{B}C$ é igual a metade da medida do arco correspondente a este ângulo. $\boxed{A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}}$. E como O arco $\boxed{\overset{\frown}{AC} = A\hat{O}C}$.Pode afirmar-se, ainda, que:

A medida da amplitude do angulo inscrito $A\hat{B}C$ é igual a metade da medida da amplitude do ângulo ao centro correspondente a este ângulo. $\boxed{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}}$

Que maravilha! Já está esclarecida a sua questão? Foi fácil? Sim…sim foi fácil. Com auxílio de um amigo ou mesmo sozinho, seguindo os mesmos procedimentos, faça a descrição da outra parte da figura, não colorida, composta pelos $\measuredangle AOD$ e $\measuredangle ABD$, ângulos ao centro e inscrito respectivamente, que prova a expressão definida sobre a medida de amplitude de um ângulo inscrito.

Certo! Da demonstração acima descrita, é fácil observar que existem diversas maneiras de traçar ângulos inscritos como mostra a tabela abaixo:

1. Um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro.	2. O centro fica no interior do angulo inscrito.	3. O centro não pertence ao angulo inscrito.
		
 O $\measuredangle AOC$ é angulo ao centro e o $\measuredangle ABC$ é ângulo inscrito $\boxed{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}}$	 O $\measuredangle AOC$ é angulo ao centro e o $\measuredangle ABC$ é ângulo inscrito $\boxed{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}}$	 O $\measuredangle AOC$ é angulo ao centro e o $\measuredangle ABC$ é ângulo inscrito $\boxed{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}}$

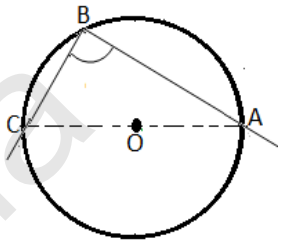
Venda proibida

Repare que a fórmula para determinar a amplitude do ângulo inscrito é sempre a mesma, e é dada pela metade da medida da amplitude do ângulo ao centro correspondente ou arco correspondente a este ângulo. Para comprovar esta afirmação é só seguir os passos acimas descrita.

Pela abordagem da noção de ângulo central e ângulo inscrito, vamos parar por aqui, já tem conhecimento suficiente que dá para exercitação, mas antes, vamos passar para outro tema desta lição.

Ângulo inscrito sobre o diâmetro

Observe a figura ao lado, ela representa um ângulo inscrito $\measuredangle ABC$ cujo vértice **B** intersecta a circunferência e os seus lados **[AB]** e **[BC]** são **corda**s que intersectam a mesma nos extremos do **diâmetro**. A este ângulo chamaremos de **ângulo inscrito sobre o diâmetro.**



Repare que o arco correspondente do ângulo inscrito $\measuredangle ABC$ é o arco $\overset{\frown}{AC}$

Ah! Lembra-se que, na abordagem do ângulo inscrito, vimos que da medida da amplitude do $\measuredangle ABC$ **é** a metade da amplitude do seu ângulo ao centro! Neste caso, o ângulo ao centro correspondente $\measuredangle AOC$ é um ângulo **raso,** mede $\mathbf{180^{\circ}}$**.** Assim sendo:

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ} \Leftrightarrow A\hat{B}C = 90^{\circ}$$

Tendo em conta esta resolução, pode se afirmar que todo ângulo inscrito sobre o diâmetro é **recto,** ou seja, a medida da amplitude de todo ângulo inscrito sobre o diâmetro é igual a $\mathbf{90^{\circ}}$.

Metade de ângulo raso é ângulo recto.

A amplitude do ângulo inscrito sobre uma semi-circunferência é um **ângulo recto**

Agora, vamos tratar o último conteúdo desta lição:

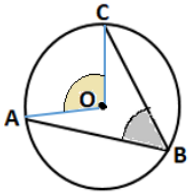
Relação entre o arco e o ângulo ao centro e ângulo inscrito.

Na abordagem do ângulo ao centro e ângulo inscrito e vimos que:

A medida da amplitude de um ângulo ao centro é dada pela medida do **arco** correspondente a este ângulo.

A medida da amplitude de um ângulo inscrito é dada pela metade da medida do ângulo ao centro correspondente a este ângulo.

Exemplo: $\boxed{\overset{\frown}{AC} = \measuredangle AOC}$ e $\boxed{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}}$



Repare que os dois ângulos compartilham o mesmo arco. Nos dois ângulos, o arco correspondente define a medida das amplitudes dos ângulos. No ângulo ao centro, por inteiro e no ângulo inscrito pela metade.

Venda proibida

A partir do arco correspondente de um ângulo ao centro pode obter-se a medida da amplitude do ângulo inscrito, vice-versa.

Caro aluno, resolva os exercícios das actividades de verificação e veja se entendeu a matéria discutida nesta lição

Exercícios

1. Assinale **X** nas afirmações verdadeiras.

a) O ângulo central tem o seu vértice no centro da circunferência.

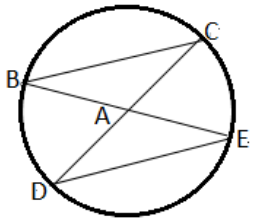
b) O ângulo central mede o dobro do arco correspondente.

c) O ângulo inscrito é caracterizado por ter o vértice no interior da circunferência.

d) O ângulo inscrito é igual ao arco correspondente.

e) Se um ângulo inscrito e um ângulo central estão ligados ou correspondem ao mesmo arco então estes são iguais.

2. Assinale com X as afirmações verdadeiras



a) O ângulo $\measuredangle \boldsymbol{BAC}$ é inscrito

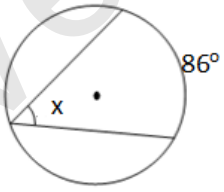
b) O ângulo $\measuredangle \boldsymbol{BED}$é inscrito

c) O ângulo $\measuredangle \boldsymbol{BCD}$ é central

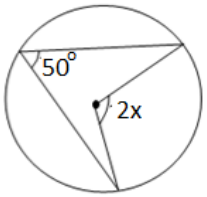
d) O ângulo $\measuredangle \boldsymbol{DAE}$ é central

3. Determine o valor de x nas figuras abaixo:

b)



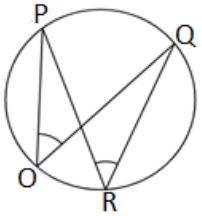
b)



4. Dada a figura ao lado.

Determine o valor de $\boldsymbol{x}$ sabendo que

$\boldsymbol{P\hat{O}Q = 3x + 2^{\circ}}$, e $\boldsymbol{P\hat{R}Q = 110^{\circ} - 6x}$



Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Venda proibida

Resumo da Lição

Nesta lição aprendeu que:

Ângulo central é o ângulo cujo vértice está no centro da circunferência e cujos seus lados intersectam a circunferência.

Ângulo inscrito na circunferência é o ângulo cujo vértice está sobre um ponto da circunferência e cujos lados intersectam a circunferência em mais dois pontos. A medida da amplitude de um ângulo ao centro é dada pela medida do **arco** correspondente a este ângulo.

Um ângulo inscrito sobre o diâmetro é o ângulo cujo seu vértice intersecta na circunferência e os seus lados a intersectam a mesma nos extremos do diâmetro. A medida da amplitude de um ângulo inscrito é dada pela metade da medida do ângulo ao centro correspondente a este ângulo.

Todo ângulo inscrito sobre o diâmetro é **recto.**

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1. a) (x) b) ( ) c)(X) d)( ) e)( )
2. a) ( ) b)(X) c) ( ) d)(X)

3.a) $x = \frac{86°}{2} = 43°$

b) $2 \times 50° = 2x \Leftrightarrow x = \frac{100^{\circ}}{2} = 50°$

4. Dados

$P\hat{O}Q = 3x + 2^{\circ}$,

$P\hat{R}Q = 110^{\circ} - 6x$

$P\hat{O}Q = P\hat{R}Q$

$3x + 2° = 110° - 6x$

$\Leftrightarrow 3x + 6x = 110° - 2° \Leftrightarrow 9x = 108° \Leftrightarrow x = \frac{108°}{9} \Leftrightarrow x = 12°$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 22: Amplitudes de Ângulos e de Arcos

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai aprender a amplitude dos ângulos e os arcos no sistema sexagesimal e centesimal.

Muita dedicação!

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

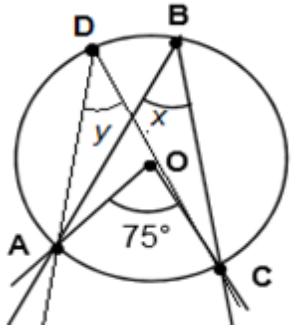
- Determinar a amplitude dos ângulos no sistema sexagesimal;
- Determinar a amplitude dos ângulos no Sistema Centesimal;
- Transformar um ângulo do Sistema Sexagesimal em Sistema Centesimal;
- Transformar um ângulo do Sistema Centesimal em Sistema Sexagesimal.

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 60 minutos.

Nas lições anteriores aprendeu os pares de ângulos, a unidade para medir a amplitude de um ângulo e o instrumento para medir a amplitude dos ângulos. Nesta lição, ira aprender a transformação de amplitude dos ângulos no sistema sexagesimal para o sistema centesimal. Antes de abordarmos conteúdos desta lição, vamos resolver os exercícios que se seguem como forma de rever alguns conceitos sobre a relação que existe entre amplitude do ângulo e o arco.

Actividades

Observe a figura abaixo e calcule.



a) Valor de x

b) Valor de y.

Resolução

a) Observando a figura podemos facilmente ver que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são inscritos e o ângulo $A\hat{O}C$ é um ângulo central. Os três ângulos compartilham o mesmo arco.

Venda proibida

Como dados, a figura mostra-nos que $\mathbf{A\hat{O}C = 75°}$, $A\hat{B}C = x$ e como o $\measuredangle \boldsymbol{AOC}$ é ângulo ao centro e o $\measuredangle \boldsymbol{ABC}$ **é ângulo inscrito** com o centro a circunferência no seu interior**,** a sua amplitude será a metade do ângulo ao centro correspondente. Assim;

$$A\hat{O}C = 2 \times A\hat{B}C \Leftrightarrow A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} \Leftrightarrow A\hat{B}C = \frac{75°}{2} \Leftrightarrow A\hat{B}C = 37{,}5°$$

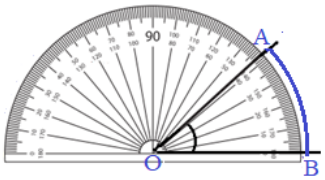
$\mathbf{A\hat{B}C = x = 37,5°}$

b) Para o $\measuredangle \boldsymbol{ADC = y}$, apesar de, este ângulo ter um dos lados passar pelo centro, ele tem o mesmo arco que o $\measuredangle ABC$. Isso significa que $\mathbf{A\hat{B}C = A\hat{D}C}$. Assim $\mathbf{A\hat{D}C = y = 37,5°}$

Feita a revisão da relação entre a amplitude do ângulo inscrito e o ângulo central, passaremos para o conteúdo da nossa lição, começando por:

Amplitude de ângulos no sistema sexagesimal

Recordemos que a amplitude de um arco pode ser definida como a amplitude do ângulo ao centro correspondente. $\boxed{\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B}$

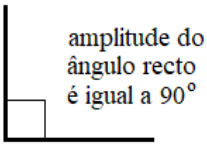


A amplitude de um ângulo é dada por **"**Grau**"** quando se divide um ângulo recto em 90 partes iguais. Cada parte corresponde a **1°**.

São submúltiplos do grau o minuto e o segundo. Neste sistema, simbolicamente:

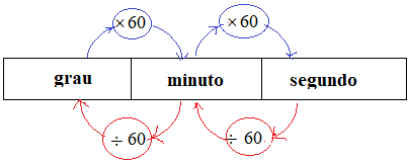
Um minuto escreve-se $1'$.

Um segundo escreve-se $1''$.



Assim, cada grau equivale a 60 minutos: $\boxed{1^{o} = 60'}$

Cada minuto equivale a 60 segundos: $\boxed{1' = 60''}$



Caro aluno, estas são as unidades usadas para a medição da amplitude dos ângulos no sistema sexagesimal. Para melhor compreensão da conversão de uma unidade para outra dentro deste sistema, resolva os exercícios que se seguem.

Actividades

Converta para grau os seguintes ângulos.

a) $6° 15'$ b) $24° 30' 18''$

Caro aluno, conseguiu efectuar a conversão? Foi difícil para fazer a conversão? Vamos juntos, efectua-la:

Venda proibida

a) **Resolução**

Sabe-se $\boxed{1^o = 60'}$ e queremos converter $\mathbf{15'}$para " ° " (**grau**). Assim:

$1^o \rightarrow 60'$

$x \rightarrow 15' \Rightarrow x = \dfrac{1^o \times 15'}{60'} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^o \Leftrightarrow x = (0,25)^o$

o que quer dizer $\boxed{15' = (0,25)^o}$ ou seja, $\mathbf{15'}$ Corresponde a $\mathbf{0,25°}$, adicionado com $\mathbf{6°}$, obtém-se

$6^o\,15' = 6^o + 0,25^o = 6,25^o$. Logo $\boxed{6^o\,15' = 6,25^o}$

b) Sabe-se que $\boxed{1^o = 60'}$, $\boxed{1' = 60''}$ queremos converter $\mathbf{30'\ 18''}$ para " ° " (**grau**). Existem duas formas de calcular:

Primeira forma:

1º Começamos por determinar, quantos minutos corresponde a $\mathbf{18''}$

$1' \rightarrow 60''$

$x \rightarrow 18'' \Rightarrow x = \dfrac{1' \times 18''}{60''} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{18}{60}\right)' \Leftrightarrow x = (0,3)'$

Significa que $\boxed{18'' = 0,3'}$,ou seja $\mathbf{18''}$ correspondem a $\mathbf{0,3'}$.

2ºPasso: De seguida, adicionamos $\mathbf{30'}$ com $\mathbf{0,3'}$, o resultado obtido na primeira resolução:

$30'\,18'' = 30' + 0,3' = 30,3'$

3ºPasso: E no fim determina-se quantos graus equivalem a $\mathbf{30,3'}$?

$1^o \rightarrow 60'$

$x \rightarrow 30,3' \Rightarrow x = \dfrac{1^o \times 30,3'}{60'} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{30,3}{60}\right)^o \Leftrightarrow x = (0,505)^o$,

O que quer dizer $\mathbf{30'\ 18''}$corresponde a $\mathbf{(0,505)°}$. Adicionando $\mathbf{(0,505)°}$com 24°, obtém-se

$24^o\ 30'\ 18'' = 24^o + 0,505^o = 24,505^o$. Logo $\boxed{24^o\ 30'\ 18'' = 24,505^o}$

Segunda forma

1º Passo: Começamos por determinar quantos segundos correspondem $\mathbf{1°}$. Então, vamos calcular.

$1' \rightarrow 60''$

$60' \rightarrow x'' \Rightarrow x = \dfrac{60' \times 60''}{1'} \Leftrightarrow x = 3600''$.

Estes cálculos mostram que $\boxed{1^o = 60' = 3600''}$, isto é $\boxed{1^o = 3600''}$

2º Passo: Determinamos a quantos segundos correspondem $\mathbf{30'}$. Calculando obtém-se

Venda proibida

$1' \rightarrow 60''$

$30' \rightarrow x'' \Rightarrow x = \frac{30' \times 60''}{1'} \Leftrightarrow x = 1800''$

Significa que $\boxed{30' = 1800''}$,ou seja $\mathbf{30'}$ correspondem a $\mathbf{1800''}$.

3º Passo: De seguida, adicionamos $\mathbf{1800''}$ com $\mathbf{18''}$ e obtem-se $\mathbf{1800'' + 18'' = 1818''}$. Isso para dizer que $\mathbf{30'\ 18''}$

Corresponde a $\mathbf{1818''}$ ou seja $\boxed{30'\ 18'' = 1818''}$

4º Passo: Por fim determinamos quantos graus correspondem a $\mathbf{1818''}$. Assim:

$1^o \rightarrow 3600''$

$x \rightarrow 1818'' \Rightarrow x = \frac{1^o \times 1818''}{3600''} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1818}{3600}\right)^o \Leftrightarrow x = (0,505)^o$

O que quer dizer $\mathbf{30'\ 18'' = 1818''}$corresponde a $\mathbf{(0,505)°}$. Adicionando $\mathbf{(0,505)}$°com 24°, obtém-se

$24^o\ 30'\ 18'' = 24^o + 0,505^o = 24,505^o$. Logo $\boxed{24^o\ 30'\ 18'' = 24,505^o}$

Caro aluno, comparando os resultados obtidos e os seus, conseguiu descobrir onde falhou para chegar à solução? Se sim, está de parabéns. Caso não, tente de novo, não desanime, sempre acabará por descobrir.

Agora, vamos passar para o outro sistema de medição de amplitude de ângulo. Alguma vez já ouviu falar desse sistema? Então vamos a isso.

Amplitude de ângulos no sistema centesimal

A unidade de medição de ângulos, no sistema centesimal, é o **grado.** Esta unidade resulta da divisão do ângulo recto em 100 partes iguais. Cada uma das partes corresponde a **1g ,** lê-se **1 grado**. Assim,

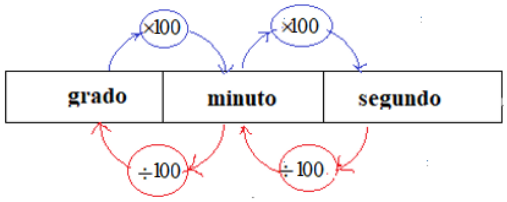
$\boxed{\mathbf{90° \Leftrightarrow 100g}}$

Do mesmo modo que no sistema sexagesimal, no sistema centesimal, também, existe outras unidades: o **minuto** e o **segundo**. O que difere é o valor da equivalência atribuído em cada sistema.

Neste sistema:

Cada **grado** equivale a **100 minutos**: $\boxed{1g = 100'}$

Cada **minuto** equivale a **100 segundos**: $\boxed{1' = 100''}$



Para melhor compreensão da conversão neste sistema, vamos resolver juntos os seguintes exercícios:

Venda proibida

Actividades

1. Reduza 27° ao sistema centesimal.

Resolução

$$\boxed{90^o = 100g} \quad \begin{array}{l} 90^o \rightarrow 100g \\ 27^o \rightarrow x \Leftrightarrow x = \dfrac{27^o \times 100g}{90^o} \Leftrightarrow x = 30g \end{array}$$

No sistema centesimal, **27°** corresponde a **30g.**

2. Reduza 75g ao sistema sexagesimal.

Resolução

$$\boxed{90^o = 100g} \quad \begin{array}{l} 90^o \rightarrow 100g \\ x \rightarrow 75g \Leftrightarrow x = \dfrac{90^o \times 75g}{100g} \Leftrightarrow x = 67{,}5^o \end{array}$$

Caro aluno, repare que no sistema sexagesimal, **75g** corresponde a **67, 5°**. E no sistema sexagesimal, a resposta pode ser dada em graus e minutos. Para tal, há necessidade de decompor o **67, 5°**. Ainda se lembra da decomposição de números decimais? Assim sendo:

67, 5° = 67° + 0, 5°.

Depois desta decomposição vamos converter **0, 5°** em minutos**.**

$1^o \rightarrow 60'$

$0{,}5^o \rightarrow x \Rightarrow x = \dfrac{0{,}5^o \times 60'}{1^o} \Leftrightarrow x = 30'$

Significa **0, 5°** corresponde a **30′**, ou seja**,** $\boxed{0{,}5^o = 30'}$. Adicionando este resultado com **67°,** obtém-se:

67° + 0, 5° = 67° + 30′ = 67° 30′.

Terminada a abordagem dos conteúdos desta lição, resolva os exercícios que se seguem, como forma de consolidar os conteúdos apreendidas nesta lição.

Exercícios

1. Converta para o grau os seguintes ângulos.
   c) 23° 15′ b) 52° 30′ c) 112,083°
2. Converta ao sistema centesimal os seguintes ângulos.
   a) 45° a) 72° b) 36° 24′ c) 54,3°

Venda proibida

3. Converta ao sistema sexagesimal os seguintes ângulos.

a) $\mathbf{47g}$ b) $\mathbf{64g}$ c) $\mathbf{3g\,20'}$ d) $\mathbf{49,5g}$

Apresente o resumo da matéria desta lição

Resumo da Lição

Nesta aula aprendeu que:

No sistema sexagesimal, a amplitude de um ângulo é dada por **" Grau"** que resulta da divisão de um ângulo recto em 90 partes iguais. Cada parte corresponde a **1°**.

No sistema centesimal, a unidade de medição de ângulos, é o **grado.** Esta unidade resulta da divisão do ângulo recto em 100 partes iguais. Cada uma das partes corresponde a **1g ,** lê-se **1 grado**. $\boxed{\mathbf{90° \Leftrightarrow 100g}}$

O minuto e **o segundo** são submúltiplos nos dois sistemas. O que difere é o valor da equivalência atribuído em cada sistema.

Sistema sexagesimal	**Sistema centesimal**
Cada grau equivale a 60 minutos: $\boxed{1^o = 60'}$	Cada grado equivale a 100 minutos: $\boxed{1g = 100'}$
Cada minuto equivale a 60 segundos: $\boxed{1' = 60''}$	Cada minuto equivale a 100 segundos: $\boxed{1' = 100''}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de Correcção

1-a) 23,25° b) 52,5° c) 112,083°

2-a) 50g b) 80g c) 40g 44′ d) 60,3g

3-a) $\mathbf{42,3°}$ b) $\mathbf{57,6°}$ c) $\mathbf{2,73°}$ d) $\mathbf{44,55°}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 23: Ângulo inscrito que não contém o centro

Introdução

Caro aluno, depois de termos aprendido na lição anterior a conversão dos ângulos do sistema centesimal para o sexagesimal e vice-versa, nesta vai ver o ângulo inscrito que não contém o centro; ângulo ex-inscrito e ângulo exterior.

Convidámo-lo, desde já, a prestar boa atenção para esta matéria.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

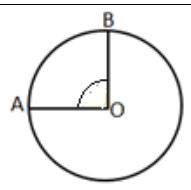
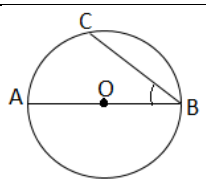
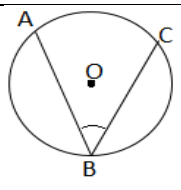
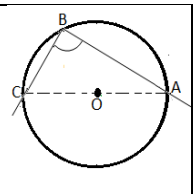
- Identificar o ângulo inscrito que não contém o centro;
- Identificar o ângulo ex-inscrito;
- Identificar ângulo exterior;
- Determinar as amplitudes dos ângulos inscritos que não contêm o centro
- Determinar a amplitude do ângulo ex-inscrito;
- Determinar a amplitude do ângulo exterior.

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 90 minutos.

Nas lições anteriores aprendeu sobre ângulo central, ângulo inscrito cujo um dos lados passa pelo centro, ângulo inscrito cujo centro do ângulo central fica no interior do ângulo inscrito, ângulo inscrito cujo centro não pertence ao ângulo inscrito e ângulo inscrito sobre o diâmetro. Para tal, antes de abordarmos conteúdos relacionados o tema da lição, responda às questões que se seguem como forma de rever alguns conceitos ligados aos ângulos estudados.

Actividades

Observa as figuras e indique o tipo de angulo se trata.

			
A	B	C	D

Venda proibida

Caro aluno, ao responder a estas questões conseguiu notar que:

A - trata-se ângulo central, **B**- ângulo inscrito cujo um dos lados passa pelo centro, **C**- ângulo inscrito cujo centro do ângulo central está no interior do ângulo inscrito, e **D**-ângulo inscrito sobre o diâmetro.

Continuando com a revisão, o que tem a dizer sobre o cálculo das amplitudes destes ângulos? Para melhor dar a resposta, responda às seguintes questões:

Actividades

1. Determine a medida de um ângulo ao centro sabendo que o ângulo inscrito associado mede**:**

   a) $23°$ b) $6\,°\;18'$ c) $49°\;20'$ d) $39°\;5'$

2. Determine a medida de um ângulo inscrito sabendo que o ângulo ao centro associado mede

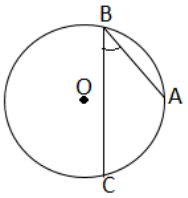
a) $84°$ b) $56\,°\;38'$ c) $59°\;12'$ d) $43°\;51'$

Já terminou a resolução das questões ligadas ao cálculo da amplitude de um ângulo ao centro e inscrito? Se a resposta é sim, então, vamos passar para abordagem dos conteúdos desta lição.

Ângulo inscrito que não contém o centro

Caro aluno, observe a figura apresentada a seguir:

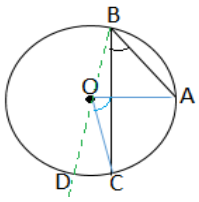
Na figura ao lado está representado o $\sphericalangle ABC$ é um ângulo inscrito com o vértice sobre circunferência no ponto B e os seus dois lados a intersectarem a circunferência dada nos pontos A e C. O centro da circunferência não faz parte do ângulo, está fora do ângulo inscrito. A este ângulo chamaremos de ângulo inscrito que não contém o centro.



O arco correspondente do $\sphericalangle ABC$ é o arco $\overset{\frown}{AC}$

Caro aluno, repare que:

Ao unir os pontos A e C ao centro, obtém-se, o ângulo ao centro $\sphericalangle AOC$ cujo arco correspondente é$\overset{\frown}{AC}$, o mesmo do $\sphericalangle ABC$.



O segmento $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD}$ são raios das circunferências.

O $\sphericalangle AOD$ é o ângulo ao centro definido pelo arco$\overset{\frown}{CD}$.

Repare ainda que, ao traçar o diâmetro **[BD],** a partir do ponto **B** obtém-se dois ângulos inscritos:

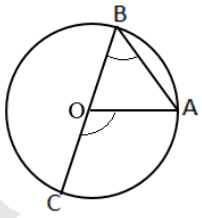
Venda proibida

1. O $\measuredangle \boldsymbol{ABD}$ cujo arco correspondente é $\overset{\frown}{AD}$.

2. O $\measuredangle \boldsymbol{CBD}$ cujo arco correspondente é$\overset{\frown}{CD}$.

As amplitudes destes ângulos são dadas pelas relações: $A\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2}$ e, $C\hat{B}D = \frac{C\hat{O}D}{2}$

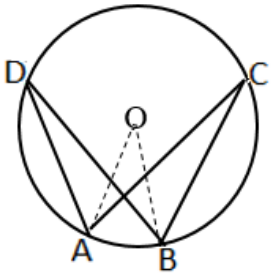
Caro aluno, observando ainda a circunferência, nota-se que a amplitude do ângulo inscrito $\measuredangle \boldsymbol{ABC}$ pode ser obtido subtraindo as amplitudes dos ângulos inscritos do $\measuredangle \boldsymbol{ABD}$ **e** $\measuredangle \boldsymbol{CBD}$, isto é: $A\hat{B}D - C\hat{B}D = A\hat{B}C$



Substituindo, pelas fórmulas de cálculo das amplitudes, obtém-se o seguinte:

$A\hat{B}D - C\hat{B}D = A\hat{B}C \Leftrightarrow \frac{A\hat{O}D}{2} - \frac{C\hat{O}D}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2}$ logo: $A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$

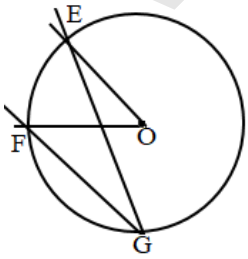
Na base desta abordagem pode se afirmar que dois ângulos inscritos no mesmo arco são iguais.



$A\hat{D}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$ mas também $A\hat{C}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$ Assim $A\hat{D}B = A\hat{C}B$

Caro aluno! Conseguiu compreender como calcular a amplitude do ângulo inscrito que não contém o centro? Como norma, para verificar o nível de compreensão de conteúdos faz-se uma avaliação respondendo a algumas questões. Para tal, resolva os exercícios que se seguem:

Actividades



a) Se $\boldsymbol{F\hat{O}E = 46°}$, quanto mede $\boldsymbol{F\hat{G}E}$?

b) Se $\boldsymbol{F\hat{O}E = 31°}$, quanto mede $\boldsymbol{F\hat{G}E}$?

a) Se $\boldsymbol{F\hat{G}E = 33°\ 15'}$, quanto mede $\boldsymbol{E\hat{G}F}$?

a) Se $\boldsymbol{F\hat{G}E = 28°}$, quanto mede $\boldsymbol{F\hat{G}E}$?

Observe a figura e resolva.

Bravo! Conseguiu notar que o $\measuredangle \boldsymbol{FOE}$ é um ângulo ao centro e $\measuredangle \boldsymbol{FGE}$ é um ângulo inscrito por isso a amplitude do $\measuredangle \boldsymbol{FGE}$ é metade da amplitude do $\measuredangle \boldsymbol{FOE}$ **.** Assim sendo, em a) tem como resposta $23°$, em b) $15°\ 30'$, em c) $66°\ 30'$ e em d) $56°$.

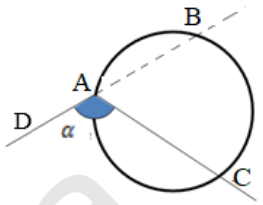
Venda proibida

Feita a revisão, vamos passar para o conteúdo seguinte da nossa lição.

Ângulo ex-inscrito

Dada a figura ao lado podemos ver que ela representa o $\sphericalangle DAC$ cujo vértice está sobre circunferência no ponto **A** e que um dos lados, neste caso, **lado [AC]** é uma corda e outro **lado [AD]** está fora da circunferência, o seu prolongamento é que a intersecta.

A este tipo de ângulo dá-se o nome de ângulo ex-inscrito.



Ângulo ex-inscrito é o ângulo que tem o vértice sobre a circunferência que é intersectada por um dos seus lados e pelo prolongamento do outro.

Exemplo:

O $\sphericalangle DAC$ é um angulo externo.

Caro aluno! Repare que:

O $\sphericalangle DAC$ é suplementar ao $\sphericalangle BAC$. Isto é, $D\hat{A}C = 180° - B\hat{A}C$.

O $\sphericalangle BAC$ é um ângulo inscrito com o centro no interior e o arco correspondente é o arco$\overset{\frown}{BC}$. Isso quer dizer que $B\hat{A}C$ = $\boxed{B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}}$, assim sendo $\boxed{D\hat{A}C = 180^o - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}}$.

Sabe-se que 180° é metade de $\frac{360°}{2}$, e substituindo na igualdade acima mencionada, fica:

$$D\hat{A}C = \frac{360^o - \overset{\frown}{BC}}{2}$$

Continuando, ainda, com a análise, observa que a soma dos três arcos da circunferência dada é igual a 360°, simbolicamente escreve-se: $\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 360^o$. E substituindo, de novo, na mesma igualdade, fica:

$$D\hat{A}C = 180^o - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Leftrightarrow D\hat{A}C = \frac{360^o - \overset{\frown}{BC}}{2} \Leftrightarrow D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BC}}{2} \Leftrightarrow \boxed{D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB}}{2}}$$

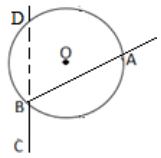
Na base desta análise, pode se afirmar que:

A medida de um angulo ex-inscrito é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados e os seus prolongamentos. $\boxed{D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB}}{2}}$	A medida de um angulo ex-inscrito é igual à diferença entre o ângulo raso e a metade da amplitude do arco correspondente. $\boxed{D\hat{A}C = 180^o - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}}$

Venda proibida

Exemplo:

Calcule a medida do ângulo ABC, sabendo que o arco DA é igual a 65°.



Dados

$\widehat{DA} = 65^o$

$\widehat{ABC}-?$

Resolução

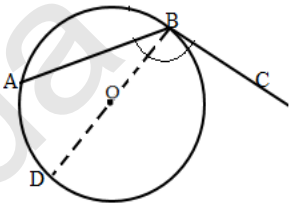
$$A\hat{B}C = 180^o - \frac{\widehat{DA}}{2} \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180^o - \frac{65^o}{2}$$

$$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 180^o - 32,5^o \Leftrightarrow A\hat{B}C = 147,5^o \Leftrightarrow A\hat{B}C = 147^o30'$$

Neste grupo de ângulos existe um outro designado por **ângulo de um segmento.** Este ângulo tem o vértice na circunferência e é formado por uma corda e uma tangente.

Exemplo:

Na figura ao lado está representado o $\sphericalangle ABC$ que é um ângulo de um segmento



$$A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C$$

O $\sphericalangle ABD$ é um ângulo inscrito, significa que $\boxed{A\hat{B}D = \frac{\widehat{AD}}{2}}$

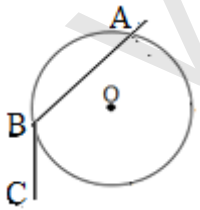
O $\sphericalangle DBC$ é um ângulo recto, significa que $\boxed{D\hat{B}C = \frac{\widehat{BD}}{2}}$

O $\sphericalangle ABC$ também é um angulo **ex-inscrito** porque o lado [AB] é uma corda o lado [BC] é externo e o vértice do ângulo intersecta a circunferência no ponto B. Assim, a sua amplitude é dada pela relação:

$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AD}+\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow \boxed{A\hat{B}C = \frac{\widehat{ADC}}{2}}$ Esta relação mostra que a medida de um ângulo de um segmento é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Exemplo:

Observe a figura e determine a amplitude do ângulo CBA, sabendo que o arco BA mede 290°.



Dados

$\widehat{BA} = 290^o$

$\widehat{CBA}-?$

Resolução

$$C\hat{B}A = \frac{\widehat{BA}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = \frac{290^o}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = 145^o$$

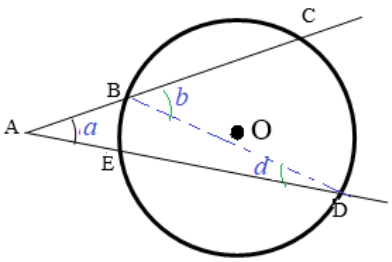
Caro aluno, finda a abordagem de ângulo ex-inscrito e ângulo de um segmento, passemos para outro tipo de ângulo descrito na circunferência.

Ângulo exterior

Diz-se que um ângulo é **exterior** quando tem o vértice fora da circunferência. Nesta lição irá aprender três casos de ângulo exterior. Para compreensão, iremos abordar caso por caso, começando por:

Venda proibida

1. Ângulo exterior cujos lados são secantes a circunferência



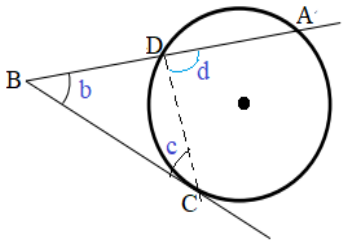
Observando a figura, vemos que o ponto A, que é o vértice do ângulo, não pertence à circunferência, cada um dos lados intersecta a circunferência em dois pontos.

Considerando o ∢BAD e unindo os pontos B e D, vê-se que o ∢CBD é ângulo externo do triângulo [BAD];

Os ∢CBD e ∢ADB são ângulos inscritos.

Assim: $C\hat{B}D = \frac{\widehat{CD}}{2}$ e $B\hat{D}A = \frac{\widehat{BE}}{2}$.Mas como $C\hat{B}D = C\hat{A}D + A\hat{D}B$ então $C\hat{A}D = C\hat{B}D - A\hat{D}B$ substituindo pelos arcos correspondentes obtém-se: $C\hat{A}D = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{EB}}{2} \Leftrightarrow \boxed{C\hat{A}D = \frac{\widehat{CD} - \widehat{EB}}{2}}$

2. Ângulo exterior cujo um dos lados é uma secante e o outro é uma tangente à circunferência



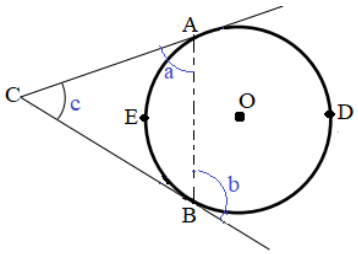
Observando a figura, vemos que o ponto A, que é o vértice do ângulo, não pertence à circunferência, o lado [BC] é tangente e o lado [BA] é secante à circunferência.

Considerando o ∢ABC e unindo os pontos D e C, vê-se que o ∢ADC é ângulo externo do triângulo [DBC];

Os ∢ADC é ângulo inscrito e ∢BCD é ângulo de um segmento.

Assim: $A\hat{D}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$ e $B\hat{C}D = \frac{\widehat{CD}}{2}$. Mas como $A\hat{D}C = A\hat{B}C + B\hat{C}D$ substituindo pelos arcos correspondentes obtém-se: $\frac{\widehat{AC}}{2} = A\hat{B}C + \frac{\widehat{CD}}{2}$ então $A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Leftrightarrow \boxed{A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CD}}{2}}$

3. Angulo exterior cujos dois lados são tangentes à circunferência



Observando a figura, vemos que o ponto C, que é o vértice do ângulo, não pertence à circunferência, os lados [AC] e [BC] são tangentes à circunferência.

Considerando o ∢ACB e unindo os pontos A e B, vê-se que o ∢b é ângulo externo do triângulo [ABC];

Os ∢CAB e ∢b são ângulos de um segmento.

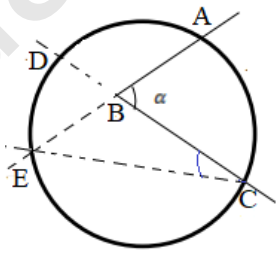
Assim: $C\hat{A}B = \frac{\widehat{AEB}}{2}$ e $\hat{b} = \frac{\widehat{ADB}}{2}$.Mas como $A\hat{D}B = A\hat{C}B + C\hat{A}B$ substituindo pelos arcos correspondentes obtém-se: $\frac{\widehat{ADB}}{2} = A\hat{C}B + \frac{\widehat{AEB}}{2}$ então $A\hat{C}B = \frac{\widehat{ADB}}{2} - \frac{\widehat{AEB}}{2} \Leftrightarrow \boxed{A\hat{C}B = \frac{\widehat{ADB} - \widehat{AEB}}{2}}$

Venda proibida

Caro aluno! Após descrever as diferentes formas de ângulos exteriores, repare que em todos os casos, a amplitude de um ângulo com vértice no exterior da circunferência é igual a semi-diferença das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados.

Naturalmente, se existe o exterior de algum objecto, significa que existe, também o interior. Muito bem! Acredita-se que durante a abordagem do angulo exterior da circunferência, nalgum momento, terá passado pela mente a seguinte questão: como é feito o cálculo da amplitude de um ângulo cujo vértice esta no interior d circunferência? Então, vamos juntos, analisarmos o caso.

Ângulo com o vértice no interior da circunferência



Observando a figura, vemos que o ∢ABC que tem o vértice no interior da circunferência.

Para determinar a sua amplitude vamos começar por prolongar os seus lados.

As intersecções com a circunferência são os pontos D e E.

Repare que os ∢ABC e ∢DBE são geometricamente iguais por serem opostos pelo vértice.

Os ∢AEC e ∢DCE são ângulos inscritos. Assim:

$A\hat{E}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$ e $D\widehat{CE} = \frac{\widehat{DE}}{2}$.Mas como $A\hat{B}C = A\hat{E}C + D\hat{C}E$ substituindo pelos arcos correspondentes obtém-se: $A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{DE}}{2} \Leftrightarrow \boxed{A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}+\widehat{DE}}{2}}$

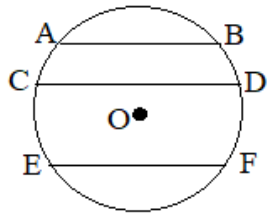
Esta igualdade mostra que a amplitude de um ângulo com o vértice no interior da circunferência é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os dos prolongamentos.

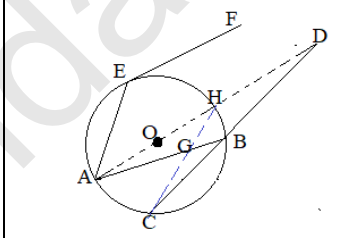
Caro aluno, conseguiu entender como calcular a amplitude do ângulo com vértice no interior da circunferência? Qual é a diferença que existe com o ângulo ex-inscrito? E com ângulo exterior?

Para melhor responder a estas perguntas, resolva os exercícios que se seguem como forma de consolidar a matéria aprendida nesta lição.

Venda proibida

Exercícios

1. Considere a circunferência de centro O em raio r. [AB]; [CD] e [EF] são cordas paralelas. Sabe-se que $\widehat{AB} = 60^o$; $\widehat{DF} = 70^o$ e $\widehat{AC} = 40^o$ Quanto mede $\widehat{EF}$ −?	

2. Considere a circunferência de centro O e raio *r*. EF é uma tangente à circunferência. Classifique os ângulos e indique as suas medidas; a) $\measuredangle ABC$ b) $\measuredangle ABD$ c) $\measuredangle AEF$ d) $\measuredangle AOC$ e) $\measuredangle ADC$ f) $\measuredangle AGC$	

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Nesta aula aprendeu que:

Ângulo inscrito que não contém o centro é o ângulo cujo vértice intersecta a circunferência e que o centro está fora do angulo inscrito. A sua amplitude é dada pela metade da medida do **arco** correspondente a este ângulo. Dois ângulos inscritos com mesmo arco são iguais.

O ângulo ex-inscrito tem o vértice sobre a circunferência que é intersectada por um dos seus lados e pelo prolongamento do outro. A amplitude deste ângulo é dada pela metade da semi-soma das medidas dos **arcos** correspondente. Também pode ser calculada através da diferença entre o ângulo raso e a metade do arco correspondente.

O ângulo de um segmento é um ângulo formado por uma corda e uma tangente. A amplitude deste ângulo é dada pela metade dos arcos compreendido entre os seus lados.

Ângulo exterior tem o vértice fora da circunferência. A amplitude de ângulo exterior é dada pela semi-diferença das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados.

A amplitude de um ângulo com o vértice no interior da circunferência é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os dos prolongamentos.

Venda proibida

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = 40^o$; $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{DF} = 70^o$; $\overset{\frown}{AB} = 60^o$ $\boxed{\overset{\frown}{EF} = 80^o}$

2. a) $\sphericalangle \boldsymbol{ABC}$ é ângulo inscrito: $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

b) $\sphericalangle \boldsymbol{ABD}$ é angulo ex-inscrito:

$$A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{BEA}+\overset{\frown}{BC}}{2}$$

c) $\sphericalangle \boldsymbol{AEF}$ é ângulo de um segmento:

$$A\hat{E}F = \frac{\overset{\frown}{ECA}}{2}$$

d) $\sphericalangle \boldsymbol{AOC}$ é ângulo ao centro: $A\hat{O}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

e) $\sphericalangle ADC$ é o ângulo ex-inscrito com vértice fora da circunferência: $A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BH}}{2}$

f) $\sphericalangle AGC$ é ângulo com o vértice no interior da circunferência: $A\hat{G}C = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BH}}{2}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 24: Cálculos na circunferência e no Círculo

Introdução

Caro aluno, nesta lição vai rever o cálculo de perímetro da circunferência.

Objectivos

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Determinar o perímetro de uma circunferência;
- Determinar a área do sector circular;
- Determinar a área da coroa circular;
- Resolver problemas de cálculo de perímetro;
- Resolver problemas de cálculo de áreas.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Nas classes anteriores aprendeu a fórmula usada para determinar o perímetro da circunferência e a área do círculo. Para melhor rever este conteúdo, iniciaremos a lição com a realização de uma experiência.

Caro aluno! Acompanhe, atentamente as instruções e a respectiva descrição mencionadas para que mais tarde possa aplicá-las e realizá-las sem problemas.

Experiência

Tire as medidas do comprimento do diâmetro de vários objectos circulares, tais como, moeda, fundos de copos circulares, de latas, e entre outro.

Para medição do perímetro da circunferência, pode-se utilizar uma fita de papel. Depois de marcar o perímetro na fita, mede-se com uma régua qualquer.

Preencha os dados numa tabela, como mostra a seguir:

objecto	Diâmetro (d)	Perímetro (p)	Quociente ($P \div d$)
Moeda	$\mathbf{26mm}$	$\mathbf{82mm}$	$\mathbf{82 \div 26 \approx 3,15}$
Lata	$\mathbf{13,9cm}$	$\mathbf{43,5cm}$	$\mathbf{43,5 \div 13,9 \approx 3,13}$

Venda proibida

Na base dos dados de exemplo, acima colocado, observe que o quociente $\boldsymbol{P \div d}$, parece aproximadamente constante!... E de facto é. Essa constante de proporcionalidade é chamada $\boldsymbol{\pi}$, letra grega lê-se **"pi"**.

Então, $\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\pi}$; $\boldsymbol{P = \pi \times d}$ mas, como $\boldsymbol{d = 2r}$; significa $\boldsymbol{P = 2\pi r}$.

A constante $\boldsymbol{\pi}$ **é uma dízima infinita.** Os primeiros algarismos são $\boldsymbol{3,141592653589}$ ..., normalmente, e por uma simplificação do cálculo, usam-se três algarismos: **3,14.**

Que tal? Deu para recordar e perceber como é que e donde vem o valor da constante $\boldsymbol{\pi}$**?** Muito bem! Continuando com a nossa revisão, resolva os exercícios que se seguem, como forma de complementar a parte inicial.

Actividades

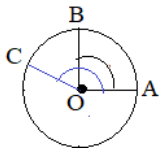
1. Calcule o perímetro da circunferência cujo diâmetro mede $6{,}2cm$.
2. Qual seria o comprimento do diâmetro se o perímetro da circunferência fosse $15{,}7cm$?

De certeza conseguiu calcular e chegar a solução, uma vez que, a fórmula para determinar o perímetro da circunferência é $\boldsymbol{P = 2\pi r}$ e $\boldsymbol{d = 2r}$, assim $\boldsymbol{P = 2\pi r = 6,2 \times 3,14cm = 19,468cm \approx 19,5cm}$.

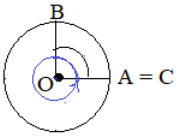
Para o exercício 2, fica $\boldsymbol{P = 2\pi r \Leftrightarrow d = \frac{p}{\pi} \Leftrightarrow d = \frac{15,7}{3,14} cm = 5cm}$.

Feita revisão, vamos para a nova matéria da nossa lição.

Comprimento de um arco

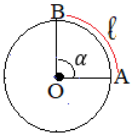


Caro aluno, sabia que a medida de um ângulo é proporcional à medida do seu arco correspondente? Quanto maior o ângulo, tanto maior será o seu arco correspondente. E esta proporcionalidade pode-se exprimir como: $\frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}}$



Afastando o ponto **C**, ao longo da circunferência, o $\boldsymbol{\sphericalangle AOC}$**,** tornar-se-á um **ângulo giro**, ou seja, de $\boldsymbol{360°}$.O arco **AC** será igual ao comprimento da circunferência, ou seja, o perímetro $\boldsymbol{P}$. Assim: $\frac{A\hat{O}B}{360^o} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{P}$.

Designando a medida do $\boldsymbol{\sphericalangle AOB}$ por $\boldsymbol{\alpha}$**,** e a medida do **arco AB** por ℓ , terá**:**



$\frac{A\hat{O}B}{360^o} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{P} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{360^o} = \frac{\ell}{P}}$, onde $\boxed{\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times P}$, mas $P = 2\pi r$. Então:

$\boxed{\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times 2\pi r}$ Esta é a fórmula para determinar **o comprimento de um arco**.

Venda proibida

Exemplo:

A amplitude de um arco de uma circunferência de raio igual a $27cm$ é 30°. Determine a medida do seu comprimento.

Dados	Resolução
$\boldsymbol{r = 27cm}$	Fórmula: $\boxed{\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times 2\pi r}$
$\boldsymbol{\alpha = 30°}$	
$\boldsymbol{\pi = 3,14}$	$\ell = \frac{30^o}{360^o} \times 2 \times 3,14 \times 27cm \Leftrightarrow \ell = 14,13cm$
Pedido	
$\ell -?$	Resposta: A medida do comprimento deste arco é $\boldsymbol{14,13cm}$

Foi difícil entender? Claro, que não, é muito fácil, basta aplicar, cuidadosamente, a fórmula.

Área do círculo

Nas classes anteriores aprendeu como calcular a área do círculo. Então como forma de rever este conhecimento, resolva o seguinte exercício:

Actividades

1. Calcule a área de um jardim de forma circular cujo raio mede $12m$.
2. Quanto mede o raio de um círculo de área $314d\ dm^2$.

Caro aluno! Acredita-se que conseguiu resolver esta actividade. Agora compare a sua resolução com a do manual.

1. Dados	Resolução
$\boldsymbol{r = 12cm}$	Fórmula: $\boxed{A = \pi r^2}$
$\boldsymbol{\pi = 3,14}$	$A = 3,14 \times (12cm)^2 \Leftrightarrow A = 3,14 \times 144cm^2 \Leftrightarrow A = 452,13cm^2$
Pedido	
$\boldsymbol{A}-?$	Resposta: a área do jardim é de $\boldsymbol{452,13cm^2}$

Para o exercício 2, tem-se:

1. Dados	Resolução
$\boldsymbol{A = 314cm^2}$	Fórmula: $A = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{A}{r}}}$
$\boldsymbol{\pi = 3,14}$	
Pedido	$r = \sqrt{\frac{314}{3,14} cm^2} = \sqrt{\frac{3,14 \times 100}{3,14}} cm = \sqrt{100} cm = 10cm$
$\boldsymbol{r}-?$	
	Resposta: O raio do círculo mede $\boldsymbol{10cm}$.

Venda proibida

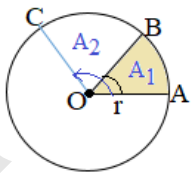
Muito bem, já deu para rever a fórmula para calcular a área do círculo. Agora vamos para a matéria seguinte da lição.

Área de um sector circular

Caro aluno, acredita-se que pode estar a se questionar: O que será sector circular? Como calcular a área sector do sector circular? Terá uma ligação com a área do círculo?

Claro que sim, tem tudo a ver!

Observando a figura ao lado, nota-se que a parte pintada da circunferência representa $\sphericalangle AOB$. Lembra-se que circunferência é a parte limitada do círculo. A esta parte pintada dá-se o nome de o **sector circular.**



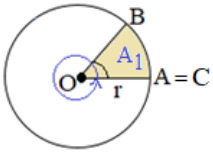
Exemplo:

O$\sphericalangle AOB$ representa sector circular**.**

Na abordagem do comprimento de um arco vimos que, quanto maior for o ângulo central, tanto maior será a área do sector circular formado. Analisando a figura, nota-se que, neste conteúdo, também, existe uma proporcionalidade directa que pode ser expressa de seguinte:

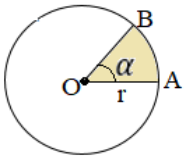
$$\frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C} = \frac{\text{área do sector } AB}{\text{área do sector} AC} = \frac{A_1}{A_2}$$

Repare que, aumentando a abertura do $\sphericalangle AOC$**,** ao longo da circunferência até atingir o **ângulo giro**, ou seja, $360°$, a área do sector AC**,** torna-se igual à área do círculo. E a proporção fica:



$$\frac{A\hat{O}B}{360°} = \frac{\text{área do sector } AB}{\text{área do círculo}}$$

Designando a medida do $\sphericalangle AOC$ por α**,** a área do sector AB por A**,** e substituindo a área do círculo pelo seu valor, πr^2**,** obtém-se:



$$\frac{A\hat{O}B}{360°} = \frac{\text{área do sector } AB}{\text{área do círculo}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360°} = \frac{A}{\pi r^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\alpha}{360°} \times \pi r^2}$$

Exemplo:

Determine a área de um sector circular associado a um ângulo de 144°, numa circunferência de raio igual a $8cm$.

1. Dados

$\alpha = 144°$

$r = 8cm$

$\pi = 3,14$

Pedido

$A-?$

Resolução

Fórmula: $\boxed{A = \frac{\alpha}{360°} \times \pi r^2}$

$$A = \frac{\alpha}{360°} \times \pi r^2 \Leftrightarrow A = \frac{144°}{360°} \times 3,14 \times (8cm)^2$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{144°}{360°} \times 3,14 \times 64cm^2 \Leftrightarrow A = 80,384cm^2$$

Resposta: a área do sector circular é de $452,13cm^2$

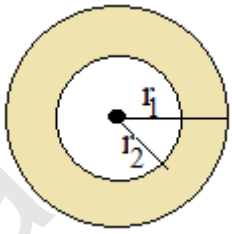
Venda proibida

Caro aluno, conseguiu compreender como calcular a área do sector circular? Acredita-se que sim, caso não, contacte, imediatamente, o seu tutor para receber ajuda.

Para terminar a abordagem dos conteúdos desta lição passemos para área de uma coroa circular. Um conteúdo, também, ligado a área do círculo e do sector circular.

Área de uma coroa circular

Observe a figura ao lado, nela estão apresentados dois círculos de raios diferentes e com o mesmo centro. Dois círculos que têm o centro comum são **concêntricos**.



A parte colorida na figura chama-se **coroa circular**.

Repare que o círculo de raio $\boldsymbol{r_1}$ tem de área $\boldsymbol{A_1 = \pi r^2}$ e o de raio $\boldsymbol{r_2}$, também tem de área $\boldsymbol{A_2 = \pi r^2}$**. Pela disposição dos círculos nota-se que** raio $\boldsymbol{r_1}$ **é maior que** raio $\boldsymbol{r_2}$, consequentemente $\boldsymbol{A_1 > A_2}$**.**

Para determinar área da coroa circular, basta subtrair a área do círculo menor ($\boldsymbol{A_2}$) da área do círculo maior ($\boldsymbol{A_1}$)**,** ou seja, a área da coroa circular é dada pela diferença das duas áreas. Assim:

$A_{coroa} = A_1 - A_2 = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^1 - r_2^2) \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{coroa} = \pi(r_1^2 - r_2^2)}}$

Esta é a expressão para determinar a área da coroa circular.

Exemplo:

Calcule a área de uma coroa circular cujo raio maior mede $13cm$. O comprimento do raio menor é $7cm$.

1. **Dados**

$\boldsymbol{r_1 = 13cm}$

$\boldsymbol{r_2 = 7cm}$

$\boldsymbol{\pi = 3,14}$

Pedido

$\boldsymbol{A_{coroa}}-?$

Resolução

Fórmula: $\boxed{A_{coroa} = \pi(r_1^2 - r_2^2)}$

$A_{coroa} = 3{,}14 \times [(13cm)^2 - (7cm)^2]$

$A_{coroa} = 3{,}14 \times (169cm^2 - 49cm^2)$

$A_{coroa} = 3{,}14 \times 120cm^2$

$A_{coroa} = 376{,}8cm^2$

Resposta: A área da coroa circular é $\boldsymbol{376,8cm^2}$

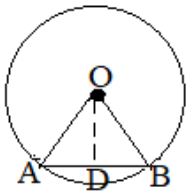
Caro aluno, chegamos ao fim da nossa lição de hoje. Tem alguma dúvida? Acredito que não! Caso tenha, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria, dos exercícios resolvidos e dos exemplos. Se a dúvida persistir, contacte, imediatamente, o seu tutor para receber apoio.

Agora é a momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios, no caderno, e caso tenha alguma dificuldade recorra aos apontamentos e às actividades.

Venda proibida

Exercícios

1. Calcule o perímetro e a área de um círculo de raio $4cm$.
2. O tronco circular de uma árvore tem perímetro de $157cm$. Qual é a medida do seu raio?
3. Calcule o comprimento do arco para $r = 3cm$ e $\alpha = 135°$.
4. Considere uma circunferência de centro O. Seja $A\hat{O}B = 60°$, $\overline{OA} = r = 6cm$.

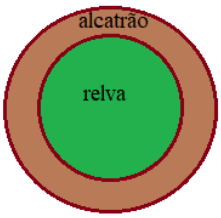


a) Quanto medem os ângulos A e B?

b) Quanto mede [OD]

5. Calcule a área de um sector circular correspondente a um ângulo ao centro de $18°$ e cujo raio mede $60dm$.

6. Uma praça de forma circular tem as seguintes medidas $80m$ de diâmetro total e $40m$ de diâmetro do relvado. Como mostra a figura. Determine a área da parte alcatroada. Expresse o resultado em hectares



Apresente o resumo da matéria desta lição no seu caderno. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

A medida de um ângulo é proporcional à medida do seu arco correspondente.

O comprimento de um arco é dado pela fórmula $\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times 2\pi r$

A área do sector circular é calculada na base da relação: $A = \frac{\alpha}{360°} \times \pi r^2$

A área da coroa circular é dada pela diferença das duas áreas de círculos correspondentes.

$A_{coroa} = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Venda proibida

Chave de correcção

1.a) O perímetro do círculo é igual a $P = 25{,}12cm$ e a área do círculo é igual a $A = 50{,}24cm^2$

2. A medida do raio de tronco é $r = 25cm$.

3. O comprimento do arco é $\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times 2\pi r = \frac{135^o}{360^o} \times 2 \times 3{,}14 \times 3cm = 7{,}065cm$

4. a) Os ângulos A e B medem 60° ($A = B = 60°$)

b) [OD] mede $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

5. A área de um sector circular é igual $565{,}2cm^2$.

6. A área da parte alcatroada é 3 $770m^2$ que corresponde a 0,3770 ha.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 25: Introdução ao estudo de Monómios

Introdução

Caro aluno, nesta lição, vai aprender o que são monómios, grau de um monómio, monómios semelhantes e a adição algébrica de monómios.

Tenha uma óptima aprendizagem!

Objectivos

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Identificar um monómio;
- Calcular o grau de um monómio;
- Adicionar monómios;
- Subtrair monómios.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos.

Introdução ao estudo de Monómios

Nas lições anteriores aprendeu equações e operações com os números reais. Nesta lição vamos dar continuidade com abordagem destes, tendo em conta as operações dos números reais acompanhadas com as diferentes variáveis.

Noção de monómios

Caro aluno, antes de tratarmos conteúdos desta lição, recordemos, alguns aspectos relacionados com a representação de números.

Sabe-se que na matemática um número pode ser representado por uma letra.

Exemplo:

A idade do João é o triplo da idade da irmã mais nova. Sabendo que a soma das idades é 24. Qual é idade de cada um?

Para resolver este problema tem que se definir uma letra para representar a idade da irmã mais nova, neste caso, escolheu-se a letra $\boldsymbol{x}$. Assim:

A idade do João pode ser representa por $\boldsymbol{3x}$ e a idade da irmã apenas por $\boldsymbol{x}$.

Equacionando o problema teremos $\boldsymbol{3x + x = 24 \Leftrightarrow 4x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = 6}}$

Venda proibida

Então, o número **6** foi representado por $\boldsymbol{x}$ na resolução de problema porque era um número desconhecido.

Então, já percebeu quando é que um número pode ser representado por uma letra?

Claro! É isso mesmo, quando o número é desconhecido. Por isso, nas equações, as variáveis representam números desconhecidos.

Agora, consideremos os seguintes valores: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y^2}$ e $\boldsymbol{z^{10}}$, colocando-os, numa multiplicação, obtém-se: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \times (\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y^2} \times \boldsymbol{z^{10}}$.

Recorda-se que, o sinal de multiplicação (×) pode ser omisso colocando (.) ou escrevendo só o número acompanhado por uma variável sem sinal. Assim, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \times (\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y^2} \times \boldsymbol{z^{10}}$ pode ser escrita da seguinte maneira: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{xy^2z^{10}}$. A esta forma de representar a multiplicação dá-se o nome de **monómio.**

Exemplos de monómios:

$$\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{3x};\boldsymbol{4x};\ \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{t^2};-\frac{\boldsymbol{klr^{20}}}{\boldsymbol{2}};\ \boldsymbol{-24};\ \boldsymbol{+100};\boldsymbol{ax^2}$$

Na base dos exemplos acima descritos, pode-se afirmar que **monómio** é o produto (multiplicação) entre números, alguns dos quais podem ser representados por letras.

Componentes de monómio

Repare que no monómio $-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{xy^2z^{10}}$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é um número, a que se dá o nome de **parte numérica** ou **coeficiente**, $(\boldsymbol{xy^2z^{10}})$ é uma multiplicação de letras ou variáveis a que se dá o nome de **parte literal**. Assim:

Um monómio é composto por: **coeficiente** e **parte literal**.

Coeficiente é o número que se multiplica com as letras.

Caro aluno, para melhor compreender a constituição dos monómios, resolva o exercício.

Actividades

Identifique o coeficiente nos seguintes monómios:

a) $3x$ b) $\frac{1}{5}t^2$ c) $-\frac{klr^{20}}{2}$ d) -24

Caro aluno, com certeza conseguiu identificar que, no monómio:

Venda proibida

a) $\boldsymbol{3x}$, o coeficiente é 3;

b) $\frac{1}{5}\boldsymbol{t^2}$, o coeficiente é $\frac{1}{5}$

c) $-\frac{\boldsymbol{klr^{20}}}{2}$, o coeficiente é $-\frac{1}{2}$

d) $\boldsymbol{-24}$, o coeficiente é -24

Muito bem! Foi difícil identificar? Claro que não! se sim, não há problema, volte a ler e resolva a actividade de novo. Caso, a dificuldade permaneça, procure o seu tutor para ter apoio.

Grau de um monómio

Caro aluno! De certeza pode estar a questionar-se: o que é isso de grau de um monómio? De que se trata?

Para dar resposta a estes questionamentos, analisemos a parte literal do monómio: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{xy^2z^{10}}$

Na identificação de coeficiente, vimos que $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ indica **o coeficiente** e $\boldsymbol{xy^2z^{10}}$ indica a parte literal.

Repare que a variável $\boldsymbol{x}$, não tem nenhum número por cima, o que quer dizer, $\boldsymbol{x}$ na forma de potência tem expoente **1**.

Para a variável $\boldsymbol{y}$, tem expoente $\boldsymbol{2}$ e a variável $\boldsymbol{z}$ tem expoente $\boldsymbol{10}$. Mas as três variáveis formam a parte literal do monómio.

Somando os expoentes destas três variáveis $1 + 2 + 10 = 13$, teremos 13, este valor indica o grau do monómio. Assim pode se dizer que, o grau do monómio $-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{xy^2z^{10}}$ **é 13.**

Portanto, o grau de um monómio é a soma dos expoentes das variáveis que nele figuram. Para determinar o grau de um monómio, adiciona-se os expoentes das variáveis ou da parte literal.

Caro aluno, para melhor compreender como identificar o grau de um monómio, resolva o exercício.

Actividades

Para cada monómio, indique a parte literal e o respectivo grau.

a) $3x$ b) $\frac{1}{5}t^2$ c) $-\frac{klr^{20}}{2}$ d) -24

Bravo aluno! Conseguiu perceber que no monómio:

a) $3x$, a parte literal é $\boldsymbol{x}$ e o grau é **1;**

b) $\frac{1}{5}t^2$, a parte literal é $\boldsymbol{t^2}$ e o grau é **2;**

c) $-\frac{\boldsymbol{klr^{20}}}{2}$, a parte literal é $\boldsymbol{klr^{20}}$ e o grau é $\boldsymbol{22}$ porque $\boldsymbol{1 + 1 + 20 = 22;}$

d) -24, não tem a parte literal, o grau de monómio é 0.

Caro aluno, o grau de um monómio pode, também, ser definido em relação a uma das suas variáveis.

Venda proibida

Exemplos:

a) $-\frac{klr^{20}}{2}$ é um monómio de grau:

- **1** em relação à variável k ou l;
- **20** em relação à variável r.

b) $5a^2by^3$ é um monómio de grau:

- **2** em relação à variável a;
- **1** em relação à variável b
- **3** em relação à variável y
- **6** em relação à parte literal ou a todas variáveis.

Caro aluno, acredita-se que a abordagem feita sobre o grau de um monómio é suficiente. Agora, vamos passar para o tema seguinte desta lição.

Monómios semelhantes

Considere os monómios $-3y$; $4x$; $3y$; $-7x$; $2ay$, 8y e $\frac{5}{3}x$; repare que:

- $4x$; $-7x$ e $\frac{5}{3}x$ têm a parte literal comum.
- $-3y$; $3y$ e 8y têm a parte literal comum.

Dizem-se **monómios semelhantes,** respectivamente. Assim sendo:

Monómios semelhantes são aqueles que tem a mesma parte literal;

Agora, e se tiver a mesma parte numérica e literal, mas com sinais diferentes? Como os classificaria?

Caro aluno! Lembra-se que dois números com sinais contrários são simétricos. Então dois monómios com a mesma parte numérica e literal, mas com sinais contrários são chamados de monómios simétricos.

Exemplo:

$-3y$ e $3y$ são monómios com a mesma parte numérica e literal (monómios semelhantes), com sinais contrários, por isso são chamados **monómios simétricos.** Assim:

Monómios simétricos são monómios semelhantes com coeficientes simétricos.

Muito bem, estimado aluno, já tem noções básicas sobre o que é um monómio, a sua composição, grau de um monómio, monómios semelhantes e simétricos. Agora, passemos para as operações com o monómio, começando por:

Adição algébrica de monómios

Considere as expressões: **5** e **3**; $4x$ e $7x$ ou $3x$ e $5y$. Elas formam pares de monómios.

5 e **3**; $4x$ e $7x$ são pares de monómios semelhantes. A soma de cada par é:

- $5 + 3 = 8$; e
- $4x + (-7x) = 4x - 7x = -3x$

Repare que os resultados são outros monómios semelhantes aos anteriores. Porém:

Venda proibida

$\boldsymbol{3x}$ e $\boldsymbol{5y}$ formam um par de monómios não semelhantes e ao adicionar obtém-se $\boldsymbol{3x + 5y.}$ Para este caso, não é possível obter um monómio semelhante, uma vez que as partes literais dos monómios são diferentes. Então, nota-se que, a adição algébrica de monómios só é possível quando as partes literais são semelhantes ou seja: **a adição de monómios é possível quando os monómios são semelhantes**. Assim:

A soma de monómios semelhantes é outro um monómio semelhante cujo coeficiente é igual à soma algébrica dos coeficientes dos monómios dados.

Exemplos:

a) $2xy + 3xy + 4xy - 6xy = (2 + 3 + 4 - 6)xy = 3xy$

b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3}x - 3x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 3\right)x = \left(\underset{(3)}{\frac{1}{2}} + \underset{(2)}{\frac{1}{3}} - \underset{(6)}{\frac{3}{1}}\right)x = \left(\frac{3+2-18}{6}\right)x = -\frac{13}{6}x$

Caro aluno, chegamos ao fim da nossa lição de hoje. Tem alguma dúvida? Acredito que não! Caso tenha, faça uma revisão cuidadosa da matéria, dos exercícios resolvidos e dos exemplos. Se a dúvida persistir, contacte, imediatamente, o seu tutor para ter apoio.

Agora é a momento de testar os seus conhecimentos. Resolva os exercícios, no caderno, e caso tenha alguma dificuldade recorra aos apontamentos e às actividades.

Bom trabalho!

Venda proibida

Exercícios

1. Das expressões que se seguem, passe para o seu caderno aquelas que são monómios:

   $3 - x$; $-x$; 7; $5x^2y$; $\frac{1-x}{8}$; 4; $b + y$

2. Completa a tabela.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$\boldsymbol{-xy}$			
$\boldsymbol{\frac{4a^4x^3b}{3}}$			
	$\boldsymbol{-3}$	$\boldsymbol{x^2y^7}$	
	$\boldsymbol{12}$	----------	
$\boldsymbol{-6\sqrt{6}tb^2}$		$\boldsymbol{tb^2}$	

3. Determine o grau de cada monómio em relação à variável x.

a) $\boldsymbol{2a^2xy^4}$ b) $\boldsymbol{-5a\,t^2x^5y^4}$ c) $\boldsymbol{\frac{2}{5}ab^3x^2z^4}$ d) $\boldsymbol{-7ab^7y^3}$

4. Dos monómios que se seguem, indique os que são semelhantes.

$2x^3$; -8; $5x$; $2xy^2$; $3xy^4$; $-y^2x$; $\frac{2}{3}x^3$

5. Efectue

a) $\mathbf{3ab + 5ab + 7ab - 10ab}$ **b)** $\mathbf{23a^2b - 12a^2b + 1,3a^2b}$

c) $\mathbf{3x^2y + \frac{1}{3}\,x^2y - \frac{1}{2}\,x^2y}$ **d)** $\mathbf{-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\,y - \left(\frac{3}{4}\,x^2 - 5 + \frac{7}{2}y\right)}$

Apresente o resumo da matéria desta lição.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

Monómio é o produto (multiplicação) entre números, alguns dos quais podem ser representados por letras. Um monómio é composto pela **parte numérica** e **pela parte literal**.

Para determinar o grau de um monómio adiciona-se os expoentes da parte literal. O grau de um monómio pode ser definido em relação a uma das suas variáveis. Os monómios que têm a mesma parte literal chamam-se **monómios semelhantes**; e se tiverem os mesmos coeficientes, mas com sinais contrários são considerados monómios simétricos. A adição algébrica de monómios é considerada quando a parte literal for semelhante.

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. $-x$; 7; $5x^2y$; 4.

2.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$\mathbf{-xy}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{xy}$	**2**
$\mathbf{\frac{4a^4x^3b}{3}}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\mathbf{a^4x^3b}$	**8**
$\mathbf{-3x^2y^7}$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{x^2y^7}$	**9**
12	**12**	----------	----------
$\mathbf{-6\sqrt{6}tb^2}$	$\mathbf{-6\sqrt{6}}$	$\mathbf{tb^2}$	**3**

3. a) **1** b) **5** c) **2** d) ----------

4. $2x^3$ *e* $\frac{2}{3}x^3$; $2xy^2$ e $-y^2x$;.

5 a) $\mathbf{5ab}$ b) $\mathbf{12,3a^2b}$ c) $\mathbf{\frac{17}{6}\,x^2y}$ d) $\mathbf{-x^2 - 2y + 5}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 26: Multiplicação e divisão de Monómios

Introdução

Caro aluno, nesta lição, vai aprender a efectuar a multiplicação e divisão de monómios, bem como operar potências com monómios.

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Aplicar as propriedades da multiplicação;
- Efectuar a multiplicação de monómios;
- Efectuar a divisão de monómios;
- Efectuar a potenciação de monómios

A aprendizagem desta lição terá uma duração de 60 minutos

Multiplicação e divisão de Monómios

Na lição anterior aprendeu conceito de monómio, sua composição, determinar o grau de monómio, identificar monómios semelhantes, monómios simétricos, bem como a adição algébrica de monómios. Nesta lição vamos dar continuidade com abordagem de multiplicação, divisão e potenciação de monómios. Mas antes disso, copie para o seu caderno e resolva os exercícios que se seguem como forma de recordar os conteúdos já aprendidos.

Actividades

1. Completa a tabela.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$-6xy$			
$\frac{a^5by}{2}$			
	$\frac{2}{5}$	a^7y	
	12	----------	

2. Dados os monómios $-8; 4x; xy^2; 2x^3; -y^2x; 5x^2y^2; \frac{3}{2}x^3$,

a) Indique os que são semelhantes.

b) Indique os que são simétricos.

Venda proibida

3. Efectue

a) $2{,}3ax^2 + 4ax^2 - 7{,}2ax^2$ b) $-4x^2 + 3\,y - (7\,x^2 + 2y)$

Conseguiu resolver os exercícios? Se sim, está de parabéns, caso contrário, também não há problema. É só continuar e exercitar-se. E para certificar as soluções que obteve, confira as com as que se seguem:

Monómio	**Coeficiente**	**Parte literal**	**Grau**
$-6xy$	-6	xy	2
$\frac{a^5by}{2}$	$\frac{1}{2}$	a^5by	7
$\frac{2}{5}a^7y$	$\frac{2}{5}$	a^7y	8
12	12	----------	0

2. a) Os monómios semelhantes são: xy^2 e $-y^2x$; $\frac{3}{2}x^3$ e $2x^3$

b) Os monómios simétricos são: xy^2 e $-y^2x$

3.a) $2{,}3ax^2 + 4ax^2 - 7{,}2ax^2 = 13{,}5ax^2$

b) Para este exercício, lembre-se que a adição algébrica de monómios só é possível quando os monómios são semelhantes. Assim sendo $-4x^2 + 3\,y - (7\,x^2 + 2y)$ será feita por pares de monómios semelhantes. Então;

$$-4x^2 + 3\,y - (7\,x^2 + 2y) =$$
$$-4x^2 - 7\,x^2 + 3\,y - 2y =$$
$$(-4 - 7)x^2 + (3 - 2)y =$$
$$-11x^2 + y$$

A nossa revisão termina por aqui. Agora vamos a abordagem dos conteúdos desta lição:

Multiplicação e divisão de Monómios

Considere os monómios $5x^2y^3$ e $4x^5y^6$; ao multiplicarmos os dois monómios obteremos:

$(5x^2y^3).(4x^5y^6) = 5.x^2.y^3.4.x^5.y^6$

Aplicando a propriedade comutativa da multiplicação fica:

$(5x^2y^3).(4x^5y^6) = 5.x^2.y^3.4.x^5.y^6 = 5.4.x^2.x^5.y^3.y^6$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, tem-se:

$(5x^2y^3).(4x^5y^6) = 5.x^2.y^3.4.x^5.y^6 = 5.4.x^2.x^5.y^3.y^6 = 20.(x^2.x^5).(y^3.y^6)$

Venda proibida

Repare que na parte literal temos multiplicação de potências com a mesma base e expoentes diferentes: $\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$ Aplicando esta regra, obtém-se:

$(5x^2y^3).(4x^5y^6) = 5.x^2.y^3.4.x^5.y^6 = 5.4.x^2.x^5.y^3.y^6 = 20.(x^2.x^5).(y^3.y^6) = 20.x^7.y^9$

O que significa**:**

O produto de dois monómios é um outro monómio cujo **coeficiente é o produto dos coeficientes** e **a parte literal,** também**, é o produto das partes literais** dos factores. Assim:

$(5x^2y^3).(4x^5y^6) = 5.x^2.y^3.4.x^5.y^6 = 5.4.x^2.x^5.y^3.y^6 = \mathbf{20\,x^7y^9}$**,**

Caro aluno, para melhor compreensão, passe para o seu caderno, os exemplos que se seguem, na forma de actividades e resolva-as.

Actividades

Efectue as seguintes operações**:**

a) $\left(-\frac{2}{3}ab\right) \times (3a^2b)$ b) $\left(\sqrt{2}\,x^3yz^2\right) \times \left(\frac{2}{3}xy^3z\right)$

Aplicando as regras da multiplicação, na resolução destas actividades, obtém-se;

a) $\left(-\frac{2}{3}ab\right) \times (3a^2b) = \left(-\frac{2}{3}\right) \times 3 \times a \times b \times a^2 \times b = \left(-\frac{2\times3}{3}\right) \times (a \times a^2) \times (b \times b) = -2a^3b^2$

b) $\left(\sqrt{2}\,x^3yz^2\right) \times \left(\frac{2}{3}xy^3z\right) = \sqrt{2} \times\ x^3 \times y \times z^2 \times \frac{2}{3} \times x \times y^3 \times z$

$$= \left(\sqrt{2} \times \frac{2}{3}\right) \times (x^3 \times x) \times (y \times y^3) \times (z \times z^2) = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^4y^4z^3$$

Na base desta resolução, pode se afirmar que:

A multiplicação de dois monómios é um monómio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos factores e a parte literal é o produto das partes literais dos factores.

Caro aluno, depois da resolução de exercícios relacionados com a multiplicação, a questão que se coloca é: como se efectua a divisão de monómios? Será que as regras de divisão de potências também são validas para a divisão de monómios, tal como acontece com a multiplicação?

Para esclarecer estes questionamentos, consideremos os monómios: $\mathbf{8x^2y}$ e $\mathbf{3xy}$, ao dividirmos os dois monómios obteremos:

$$(8x^2y) \div (3xy) = \frac{8x^2y}{3xy} = \frac{8xxy}{3xy} = \frac{8x}{3}$$

Analisando a resolução, nota-se que na divisão de monómios, a regra da divisão de potências com a mesma base e expoentes diferentes, é também válida. Isto é: $\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

Venda proibida

Exemplos:

a) $\left(-\frac{1}{5}x^3\right) \div \frac{5}{2} = \left(-\frac{1}{5} \div \frac{5}{2}\right)x^3 = \left(-\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right)x^3 = -\frac{2}{25}x^3$

b) $(2x^4b^3) \div (-8x^2b) = \frac{2x^4b^3}{-8x^2b} = -\frac{1}{4}x^2b^2$

Assim sendo, pode se afirmar que:

A divisão de dois monómios é um monómio cujo coeficiente é o quociente dos coeficientes dividendo e divisor, e a parte literal é o quociente das partes literais que formam o dividendo e o divisor.

Terminada a abordagem da multiplicação e divisão dos monómios, passemos para último conteúdo desta lição.

Potenciação de monómios

Caro aluno, lembra-se que na multiplicação e divisão de monómios, as regras de potenciação também são válidas. Esta validade é extensiva para o cálculo de valor de uma potência.

Exemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}xy\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 x^3y^3 = \frac{1}{8}x^3y^3$

b) $\left(-\sqrt{5}\,x^3yz^4\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2.(x^3)^2.\,(y)^2(z^4)^2 = 5x^6y^2z^8$

Repare que no cálculo do valor de uma potência, aplica-se a seguinte regra de potência: $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

Assim, **a potência de um monómio** é igual à potência de cada um dos factores que o constituem.

Muito bem!

Caro aluno, chegamos ao fim da nossa lição de hoje. Acredita-se que tenha entendido os conteúdos abordados nesta lição. Caso não, volte a fazer uma revisão cuidadosa da matéria, dos exercícios resolvidos e dos exemplos. Se a dúvida persistir, contacte, imediatamente, o seu tutor para receber apoio.

Agora é a momento de testar os seus conhecimentos. Passe para o seu caderno, os exercícios que se seguem e resolva-os.

Exercícios

1. Calcule os seguintes produtos.

a) $(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \times (\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$ b) $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}\right) \times (-\mathbf{2}\boldsymbol{xy})$ c) $(\mathbf{3}\boldsymbol{abx})^{\mathbf{2}} \times \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}\right)$

Venda proibida

d) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3$ e) $(-5a^3b^2) \times (-9a^3b^2)$

2. Efectue e simplifique as seguintes operações.

a) $\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right) \div \left(\frac{1}{3}ab^2\right)$ b) $(-20x^3y^3) \div (-100y)$ c) $(-5ab^2)^2 \div (5ab^2)$

d) $\left(-\frac{5}{12}a^3b^2\right) \div \left(\frac{1}{3}ab^2\right)$ e) $(45x^7y^3) \div (15x^6y)$ f) $\left(-\sqrt{5}\,x^3yz^4\right)^2 \div x^3z^8$

3. Qual o monómio do produto de $3xy^2$ por $3x^2y$?

a) $-6xy^2$ b) $\frac{1}{3}x^3y^4$ c) $9y^2x^2$ d) $9y^3x^3$

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

A multiplicação de monómios é um monómio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos factores e a parte literal é o produto das partes literais dos factores.

A divisão de dois monómios é um monómio cujo coeficiente é o quociente dos coeficientes dividendo e divisor, e a parte literal é o quociente das partes literais que formam o dividendo e o divisor.

Na multiplicação e divisão de monómio são aplicadas as regras de potenciação: $\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$; $\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$; $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) $-12x^3$ b) $-x^3y^2$ c) $\frac{9}{2}a^3b^2x^4$ d) $-\frac{8}{27}x^6y^3$ e) $45a^6b^4$

2. a) $-a$ b) $\frac{1}{5}x^3y^2$ c) $5ab^2$ d) $\frac{5}{4}a^2$ e) $3xy^2$ f) $5x^3y^2$

3. d) $9y^3x^3$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 27: Sistema de equações lineares de duas incógnitas

Introdução

Caro aluno, nas lições anteriores aprendeu a resolver uma equação linear. Nesta, vai aprender como resolver duas equações de uma só vez.

Objectivos da lição

Ao terminar o estudo desta lição você deverá ser capaz de:

- Verificar se um par ordenado é solução de um sistema;
- Identificar sistemas equivalentes de equações.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

Introdução do sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Para iniciarmos o estudo desta lição, vamos rever o conceito de **equação linear**.

Nas lições anteriores definimos equação como sendo toda igualdade em que figura, pelo menos uma letra e que esta letra é chamada incógnita ou variável. A incógnita representa um valor desconhecido.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{x + 5 = 19}$ b) $3\boldsymbol{x + 1 = 2}$ c) $\boldsymbol{\frac{2}{5}x + 4 = 2x - 7}$

As equações lineares também são designadas por **equações de 1º grau.** Toda equação do 1º grau pode ser reduzida à forma $\boxed{\boldsymbol{ax + b = c}}$; onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números racionais e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Exemplos:

Na equação $x + 5 = 19$; temos $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = 5}$ e $\boldsymbol{c = 19}$; e equação $3x + 1 = 2$, temos $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 1}$ e $\boldsymbol{c = 2}$

Caro aluno, repare que:

A equação da alínea c) pode ser reduzida para a forma $\boldsymbol{ax + b = c}$, ora vejamos:

$$\frac{2}{5}x + 4 = 2x - 7 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x - 2x = -7 - 4 \Leftrightarrow \frac{2x - 10x}{5} = -11 \Leftrightarrow -\frac{8}{5}x + 11 = 0$$

Então veja, $\frac{2}{5}x + 4 = 2x - 7$ na forma reduzida fica $\boldsymbol{-\frac{8}{5}x + 11 = 0}$, onde, $\boldsymbol{a = -\frac{8}{5}}$, $\boldsymbol{b = 11}$ e $c = 0$. Ou seja, a equação reduzida ficou na forma $\boldsymbol{ax + b = 0}$. A esta forma dá-se o nome de **forma canónica** da equação linear.

Venda proibida

Além do conceito da equação linear**,** aprendeu ainda que, como determinar a **solução ou raiz de uma equação,** que é o número que, colocado no lugar da incógnita, a transforma numa igualdade verdadeira. Este valor pode ser obtido por meio de tentativas ou por meio de resolução de equações usando o princípio de equivalência.

Para melhor recordar esta matéria, copie para o seu caderno, as actividades que se seguem e resolva-as.

Actividades

1. Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Por meio de tentativa, encontre a solução da equação $x + 1 = 0$.

2. Dada a equação $3x + 1 = 2$. Aplicando o princípio de equivalência, encontre a solução da equação.

Então caro aluno, conseguiu encontrar as soluções das duas equações? Acredita-se que sim, mas para confirmar as soluções que teve, repare:

Para a equação $\boldsymbol{x + 1 = 0}$, a solução é $\boldsymbol{x = -1}$ e para a equação $\boldsymbol{3x + 1 = 2}$, a solução é $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$

Muito bem, feita revisão sobre conceito da equação linear e solução de uma equação, vamos passar para os conteúdos da nossa lição.

Conceito de sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Consideremos o seguinte problema:

O João pensou em dois números cuja soma destes é 3 e a adição do dobro de um deles com o outro é 5. Em que números pensou o João?

Analisando os dados deste problema, encontramos duas condições, que podemos representar da seguinte forma:

1ª Condição: A soma dos dois números é 3

2ª Condição: A adição do dobro de um deles com o outro é 5

Designando, por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ os números desconhecidos; e traduzindo as duas condições, em linguagem matemática, teremos as seguintes equações:

$x + y = 3$

$2x + y = 5$

Venda proibida

Como se pode observar, as duas condições são equações lineares a duas incógnitas, formando um sistema de equações que se pode representar do seguinte modo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

A este conjunto de duas equações lineares dá-se o nome de **sistema de duas equações lineares a duas incógnitas.** Ao determinar os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ deve-se ter em conta que estes devem satisfazer as duas equações ao mesmo tempo.

Para tal, procuremos determinar a solução das duas equações, por meio de tentativa:

Para a equação $\boldsymbol{x + y = 3}$**,** tem-se como pares ordenados que a satisfazem:

$(0; 3) \Longrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow 0 + 3 = 3$

$(1; 2) \Longrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow 1 + 2 = 3$

$(2; 1) \Longrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3$

$(3; 0) \Longrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow 3 + 0 = 3$

Para a equação $\boldsymbol{2x + y = 5}$, tem-se como pares ordenados que a satisfazem

$(2; 1) \Longrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2 \times 2 + 1 = 5 \Leftrightarrow 4 + 1 = 5$

$(1; 3) \Longrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2 \times 1 + 3 = 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5$

$(0; 5) \Longrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow 2 \times 0 + 5 = 5 \Leftrightarrow 0 + 5 = 5$

Caro aluno, ao observar os pares que satisfazem a cada uma das equações, nota-se que existe um par que satisfaz as duas equações em simultâneo. Conseguiu descobrir qual é esse par? Se conseguiu está de parabéns, caso ao contrário, da próxima vez, tente esforçar-se, vai conseguir, pois, você tem capacidade para enfrentar esse tipo de desafio.

Voltando para o tema em análise, é possível notar que o par $(\mathbf{2}; \mathbf{1})$ Satisfaz as duas equações. Portanto, $(\mathbf{2}; \mathbf{1})$ **é a solução deste sistema de equações lineares a duas e incógnitas.**

Na base desta descrição e análise, pode se definir:

Sistema de duas equações lineares como um conjunto de equações que devem ser satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas.

A solução de um sistema de duas equações a duas incógnitas é um par de números que seja solução simultânea, de ambas equações.

Caro aluno, conseguiu compreender o que é um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas? E o que é a solução de um sistema de duas equações? Para poder dar a resposta com segurança, copie para o seu caderno e resolva o seguinte exercício.

Venda proibida

Actividades

Verifique se o par $(1;-3)$ é solução dos seguintes sistemas de equações.

a) $\begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x+y=1 \\ y=2x-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ y=2x-5 \end{cases}$

Caro aluno, conseguiu verificar se o par de soluções dado satisfaz as três equações? Certo! De facto, o par só satisfaz as alíneas a) e c).

Quando dois sistemas de duas equações têm a mesma solução dizem-se **equivalentes.**

Caro aluno, sabia que:

Um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas pode ser reduzido a forma canónica $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$; onde $a; b;\ a'\ e\ b'$ são coeficientes das incógnitas e c **e** c' termos independentes.

Agora, o desafio é como resolver esse tipo de sistema? Veja como se reduz.

Exemplo:

Reduza à forma canónica o seguinte sistema: $\begin{cases} x-2y=y+1 \\ x-y=-x-3 \end{cases}$

Resolução

$\begin{cases} x-2y=y+1 \\ x-y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-y=1 \\ x-y+x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Dadas as equações $y-3x=1$ e $y-x=-1$, verifique se o par $(-1;-2)$ é solução de ambas equações?

2. Verifique se o par $(1;-1)$ é solução dos sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x+3y=11 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

3. Indique os sistemas de equações equivalentes do exercício anterior.

4. Reduza à forma canónica os seguintes sistemas.

Venda proibida

a) $\begin{cases} 2(x-y)+5=y \\ 18-x-y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=\frac{x-y}{2} \\ -x-y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6-\frac{x+2}{3}=y \\ 2(x-y)+5=y \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6+\frac{x}{3}-\frac{y+1}{2}=x \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=1 \end{cases}$

Apresente o resumo da matéria desta lição. Isso permitirá consolidar a sua compreensão.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

Sistema de duas equações lineares é um conjunto de equações que devem ser satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas. A solução de um sistema de duas equações a duas incógnitas é um par. Quando dois sistemas de duas equações têm a mesma solução dizem-se **equivalentes.**

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. O par $(-1;-2)$ é solução de ambas equações.

2-a) Não é solução b) É solução c) É solução

3. Os sistemas das alíneas b) e c) são equivalentes.

4. a) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ x+y=20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-3y=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y=16 \\ 2x-3y=-5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -4x-3y=-33 \\ x+5y=6 \end{cases}$

Venda proibida

LIÇÃO Nº 28: Resolução de sistemas de equações lineares a duas incógnitas

Introdução

Caro aluno, na lição anterior aprendeu o conceito do sistema de duas equações lineares a duas incógnitas. Nesta lição, vai continuar a ver esta matéria, concretamente os métodos usados para resolver um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Objectivos da lição

Ao terminar esta lição você deverá ser capaz de:

- Resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método de substituição;
- Resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método de redução aos coeficientes simétricos (adição ordenada).

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 60 minutos no mínimo.

Métodos de resolução de sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Para iniciarmos o estudo desta lição, consideremos o seguinte problema:

Tina passeava pelo calçadão da praia quando avistou uma barraca que vendia biscoitos e água de coco. Num cartaz havia as seguintes sugestões de pedidos:

3 Copos de água de coco + 2 biscoitos = $30Mt$

2 Copos de água de coco + 1 biscoitos = $17Mt$

Tina ficou interessada em saber o preço unitário do biscoito e da água de coco. Designando, por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ os preços unitários da água de coco e do biscoito respectivamente, obtendo as seguintes equações:

$3x + 2y = 30$

$2x + y = 17$

Como se pode observar, as duas condições são equações lineares a duas incógnitas, formando um sistema de equações que se pode representar do seguinte modo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

Caro aluno, estamos perante um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas e lembre-se que ao determinar os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$,como solução do sistema, deve-se ter em conta que o par ordenado obtido, deve satisfazer as duas equações ao mesmo tempo. Para tal, procuremos determinar a solução das duas equações.

Venda proibida

Existem vários métodos de resolução, entre os quais o mais tradicional que é o método de tentativa, mas este é prático quando as equações têm uma variável. Neste caso, são duas equações com duas variáveis cada. E a solução deve ser dada por um par ordenado $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$**.** Como calcular este par ordenado?

Para calcular este par usaremos um método designado por:

Método de substituição

Caro aluno, lembra-se que para resolver uma equação literal, escolhe-se a incógnita e em ordem a ela resolve-se a equação, considerando as outras variáveis como se fossem números conhecidos (parâmetros). Para melhor lembrança, resolva o seguinte exercício.

Venda proibida

Actividade

Resolva em ordem a $\boldsymbol{x}$ a seguinte equação: $\boldsymbol{3x - 2 = y}$.

Acredita-se que ao resolver esta equação em ordem a $\boldsymbol{x}$ procedeu-se da seguinte forma:

$$\boldsymbol{3x - 2 = y \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y + 2}{3}}$$

Aplicando esta forma de resolução neste sistema de duas equações lineares a duas incógnitas nota-se que:

No sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$; ao resolvermos uma das equações em ordem a uma das variáveis, neste caso a $\boldsymbol{y}$ obteremos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 30 - 3x \\ y = 17 - 2x \end{cases}$$

Ao substituirmos na primeira equação, a variável $\boldsymbol{y}$ pela expressão obtida na segunda equação quando isolamos o $\boldsymbol{y}$, obteremos:

$$\begin{matrix} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 30 - 3x \\ y = 17 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(17 - 2x) = 30 - 3x \\ _____ \end{cases}$$

Repare que, agora, o nosso sistema de equações ficou com uma equação linear a uma incógnita (**variável $\boldsymbol{x}$**), o que torna fácil para determinarmos, primeiro, o valor de $\boldsymbol{x}$. Então vamos a isso.

$$\begin{matrix} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 30 - 3x \\ y = 17 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(17 - 2x) = 30 - 3x \\ _____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34 - 4x = 30 - 3x \\ _____ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 3x = 30 - 34 \\ _____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -4 \\ _____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ _____ \end{cases}$$

Obtido o valor de $\boldsymbol{x}$, já podemos substituir na segunda equação a variável $\boldsymbol{x}$ pelo seu valor e de seguida determinarmos o valor da variável $\boldsymbol{y}$. Então vamos prosseguir com a substituição.

$$\begin{cases} x = 4 \\ 2x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2 \times 4 + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 8 + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 17 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$$

Assim obtemos o par ordenado que satisfaz as duas equações, isto é, a solução do sistema de duas equações lineares às duas incógnitas. Portanto, o par $(\mathbf{4}; \mathbf{9})$ **é a solução do sistema.**

Então, se $(\mathbf{4}; \mathbf{9})$ é a solução do sistema, falta comprovar nas respectivas equações se de facto estes valores a satisfazem ou não. Mas como se faz isso?

É muito simples, basta substituir os valores do par $(\mathbf{4}; \mathbf{9})$, nas respectivas variáveis, nas duas equações. Ora vejamos:

$$\begin{matrix} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 4 + 2 \times 9 = 30 \\ 2 \times 4 + 9 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 18 = 30 \\ 8 + 9 = 17 \end{cases}$$

Repare que as igualdades são verdadeiras, o que comprova, de facto, que o par ordenado $(\mathbf{4}; \mathbf{9})$ é a solução do sistema.

Assim, pode se afirmar que cada copo de água de coco custava $4Mt$ e cada biscoito custava $9Mt$.

Esta forma de resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas **dá-se o nome de método de substituição.**

Caro aluno, conseguiu compreender os passos seguidos neste método de resolução? Se compreendeu, está de parabéns, caso contrário, também, não faz mal, ainda vai a tempo, basta prestar muita atenção, na resolução dos sistemas de equações que se seguem. E para melhor recapitulação e aperfeiçoamento, vamos juntos, resolver os seguintes exercícios.

Actividades

Resolva os seguintes sistemas aplicando o método de substituição**.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 1} \\ \boldsymbol{2x - y = 3} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 3x + 1} \\ \boldsymbol{-2x + y = -5} \end{cases}$

Resolução

Vamos a isso! Começamos pelo $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 1} \\ \boldsymbol{2x - y = 3} \end{cases}$

1º Passo: Vamos escolher a variável que pretendemos resolver as equações a ordem dela. Qual é a sua escolha? Está bem, acredita-se que a sua escolha tenha sido a variável $\boldsymbol{x}$. então, teremos:

Venda proibida

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 2x=3+y \end{cases}$$

2º Passo: vamos substituir na segunda equação a variável $\boldsymbol{x}$, pela expressão obtida na primeira equação, quando isolamos a variável $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 2x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2(1+y)=3+y \end{cases}$$

3º Passo: vamos resolver a equação linear a uma incógnita obtida, neste caso a variável **é $\boldsymbol{y}$,**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 2x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2(1+y)=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2+2y=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2y-y=3-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2y-y=3-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ y=1 \end{cases}$$; o valor da variável **y** é **1**

4º Passo: vamos substituir a variável $\boldsymbol{y}$ pelo seu o val**or**$\boldsymbol{(1)}$**,** na primeira equação. E vamos determinar o valor da variável em falta, estamos a falar da variável $\boldsymbol{x}$**.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 2x=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2(1+y)=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2+2y=3+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2y-y=3-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2y-y=3-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x-y=3} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x-1=3} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x=3+1} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x=4} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{4}{2}} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ y=1 \end{cases}$$ O par $(2;1)$ é a solução do sistema.

Para comprovar que este par ordenado é a solução do sistema, vamos fazer a verificação. Como? Substituindo nas equações as variáveis pelos valores obtidos. Assim sendo:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1=1 \\ 2\times 2-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 4-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1=1 \\ 3=3 \end{matrix}$$

Dando continuidade com a resolução, vamos para o segundo sistema $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

Neste caso, primeiro vamos colocar as duas equações **na forma canónica,** pois a primeira não está.

$$\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$$

Depois de reduzir o sistema a forma canónica, podemos resolver uma das equações em ordem a uma das variáveis. Uma vez que no primeiro sistema escolhemos a variável $\boldsymbol{x}$, agora vamos escolher a variável $\boldsymbol{y}$.

Daqui para diante, é só seguir os mesmos passos até chegar a solução.

$$\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y=1+2x \\ +y=-5+2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

Venda proibida

$$\begin{cases} -(-5+2x) = 1+2x \\ \hline \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x = 1+2x \\ \hline \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2x = 1-5 \\ \hline \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = -4 \\ \hline \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \hline \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2x+y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2\times 1 + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ -2+y = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ y = -5+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$; O par $(1;-3)$ é a solução do sistema**.**

Verificando a solução no sistema obtém-se:

$$\begin{cases} x-y = 3x+1 \\ -2x+y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(-3) = 3\times 1+1 \\ -2\times 1+(-3) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3 = 3+1 \\ -2-3 = -5 \end{cases}$$

Caro aluno, a partir da resolução destes sistemas de equações, julgamos que tenha compreendido que o método de substituição consiste em determinar a solução das equações do sistema, em ordem de uma variável, considerando a outra como um número conhecido e depois substituindo-a numa das equações. De modo a determinar o valor da outra variável, obtendo assim, o par ordenado $(x;y)$ que define a solução do sistema.

Método da redução a coeficiente simétrico ou de adição ordenada

Como já foi referenciado, existem vários métodos para resolver sistemas de equações. Cada método tem o seu princípio. Agora vamos aprender como se resolve um sistema de equações usando o método de adição ordenada.

Para melhor distinguir as semelhanças bem como as diferenças dos métodos, usaremos os mesmos exemplos, anteriormente referenciados. Preste bem atenção a todos os passos.

Actividades

Considere os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 3x+2y = 30 \\ 2x+y = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y = 1 \\ 2x-y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y = 3x+1 \\ -2x+y = -5 \end{cases}$

Resolva-os, aplicando o método de adição ordenada.

a) Para resolver o sistema $\begin{cases} 3x+2y = 30 \\ 2x+y = 17 \end{cases}$, aplicando o método a adição ordenada procede-se da seguinte forma:

1º Passo: Reduzem-se os coeficientes de uma das variáveis a valores simétricos, aplicando os princípios de equivalência.

Venda proibida

Neste sistema $\begin{cases} 3x+2y=30 \\ 2x+y=17 \end{cases}$, vamos escolher a variável $\boldsymbol{y}$ e para termos valores simétricos em relação a variável $\boldsymbol{y}$, vamos multiplicar os termos da segunda equação $\boldsymbol{2x+y=17}$ por $\boldsymbol{(-2)}$, obteremos uma equação equivalente $\boldsymbol{-4x-2y=-34}$, e consequentemente, teremos um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas equivalente à primeira, onde os coeficientes da variável $\boldsymbol{y}$, são simétricos.

$$\begin{cases} 3x+2y=30 \\ [2x+y=17]\times(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=30 \\ -4x-2y=34 \end{cases}$$

2º Passo: Somam-se membros a membros, os termos correspondentes**. Por outras palavras,** vamos adicionar os temos semelhantes dois a dois, por forma a ter uma única equação.

$$\begin{cases} 3x+2y=30 \\ [2x+y=17]\times(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\cancel{2y}=30 \\ -4x-\cancel{2y}=34 \end{cases} \; (+)$$
$$-x+0=-4$$

Neste caso, a equação obtida é $\boldsymbol{-x+0=-4}$ que é o mesmo ter$\boldsymbol{-x=-4}$. É desta equação que teremos o valor da variável x; e resolvendo a equação obtém-se:

$$\begin{cases} 3x+2y=30 \\ [2x+y=17]\times(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\cancel{2y}=30 \\ -4x-\cancel{2y}=34 \end{cases} \; (+)$$
$$-x+0=-4 \Leftrightarrow -x=-4 \Leftrightarrow x=4$$

3º Passo: seguindo o mesmo procedimento, vamos determinar o valor da variável $\boldsymbol{y}$**.** Nesse contexto, teremos que determinar o coeficiente simétrico tendo em conta a variável $\boldsymbol{x}$**.** Assim sendo, vamos multiplicar os termos da primeira equação por $\boldsymbol{2}$ e os termos da segunda equação por $\boldsymbol{(-3)}$, obtendo deste modo um sistema de equações equivalente.

$$\begin{cases} [3x+2y=30]\times(2) \\ [2x+y=17]\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=60 \\ -6x-3y=-51 \end{cases}$$

4º Passo: adicionando os termos semelhantes membro a membro, obteremos, uma única equação, a qual será a base para obtermos o valor da vadiável $\boldsymbol{y}$**.**

$$\begin{cases} [3x+2y=30]\times(2) \\ [2x+y=17]\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{6x}+4y=60 \\ \cancel{-6x}-3y=-51 \end{cases} \; (+)$$
$$0+y=9 \Leftrightarrow y=9$$

Assim, a solução do sistema $\begin{cases} 3x+2y=30 \\ 2x+y=17 \end{cases}$ é o par ordenado $\boldsymbol{(4;9)}$

Uma vez que, esta solução já foi comprovada, na resolução de sistema de equações, usando o método de substituição, não há necessidade de comprovar. As soluções nos dois métodos coincidem.

Venda proibida

b) Para o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases}$, como primeiro passo, escolhemos a variável $\boldsymbol{x}$, e como na segunda equação, o coeficiente da variável $\boldsymbol{x}$ é $\boldsymbol{2}$, multiplicaremos os termos da primeira equação por $(\boldsymbol{-2})$, e obteremos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{[x-y=1]\times(-2)} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-2x+2y=-2} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases}$$

Adicionando os termos semelhantes membro a membro, obtém-se uma equação linear que nos dará o valor da variável $\boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} [x-y=1]\times(-2) \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=-2 \\ +\ 2x-y=3 \end{cases}$$
$$0+y=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=1}$$

Seguindo os mesmos procedimentos, multiplicaremos os termos da primeira equação por $(\boldsymbol{-1})$, de modo a termos coeficientes simétricos da variável $\boldsymbol{y}$. Assim:

$$\begin{cases} \boldsymbol{[x-y=1]\times(-1)} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-x+y=-1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases}$$

Adicionando os termos semelhantes membro a membro, obtém-se uma equação linear que nos dará o valor da variável $\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{[x-y=1]\times(-1)} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-x+y=-1} \\ \boldsymbol{+\ 2x-y=3} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{x+0=2 \Leftrightarrow x=2}$$

Assim, a solução do sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases}$ é o par ordenado $\boldsymbol{(2;1)}$

c) Neste sistema $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$, primeiro, teremos que reduzir o sistema à forma canónica, pois a primeira equação não está na forma canónica.

$$\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3x=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$$

Repare que o sistema $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ na forma canónica, por si mesmo, já fornece alternativa da variável com coeficiente simétrico, conseguiu descobrir? Certo é a variável $\boldsymbol{y}$, por isso o passo a seguir será adição ordenada.

Caro aluno, pode estar a questionar-se sobre a expressão "**adição ordenada**". Porque adição ordenada? O que significa adição ordenada?

Para não perdermos o foco da resolução, vamos terminar com a resolução. Quem sabe, até lá terá a resposta.

Venda proibida

Dando a continuidade da resolução, dizia que o sistema $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ na forma canónica fica

$$\begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$$

Uma vez que os coeficientes da variável y são simétricos, efectuaremos a adição de termos semelhantes, membro a membro, por forma a obter uma equação que nos dará o valor da variável $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} -2x-y=1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$$

$$-4x+0=-4 \Leftrightarrow -4x=-4 \Leftrightarrow x=1$$

Tendo calculado o valor da variável $\boldsymbol{x}$, vamos, de seguida calcular o valor da variável $\boldsymbol{y}$, procurando o valor com que multiplicaremos os termos semelhantes das duas equações de modo a ter coeficientes simétricos da variável $\boldsymbol{x}$ **.**

Olhando para os coeficientes da variável $\boldsymbol{x}$, nota-se que pode se multiplicar uma das equações por $(\boldsymbol{-1})$. Neste contexto, vamos multiplicar os termos apenas da primeira equação.

$$\begin{cases} [-2x-y=1]\times(-1) \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$$

Adicionando os termos semelhantes membro a membro, obtém-se uma equação linear que nos dará o valor da variável $\boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} [-2x-y=1]\times(-1) \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-1 \\ +(-2x+y=-5) \end{cases}$$

$$0+2y=-6 \Leftrightarrow 2y=-6 \Leftrightarrow y=-\frac{6}{2} \Leftrightarrow y=-3$$

Assim, a solução do sistema $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ é o par ordenado $(\boldsymbol{1};\boldsymbol{-3})$

Caro aluno, agora já pode explicar o significado de adição ordenada**.** Não se preocupe com uma resposta convincente. O importante é saber aplicar na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas.

Agora faça este exercício, no caderno.

Exercícios

1. Resolva os sistemas seguintes, aplicando o método de substituição.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{10}=2 \\ x+y=16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=7-x \\ 3x-12=4y \end{cases}$

Venda proibida

2. Resolva os sistemas seguintes, aplicando o método de adição ordenada.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 4 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{y}{2} + \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$

3. Equacione os seguintes problemas e resolva-o.

a) A diferença de dois números é 55 e o maior é 4 vezes igual a 26 vezes o mais pequeno. Quais são os números?

b) Dividiu-se um angulo de 69º em duas partes. Sabendo que uma é inferior em 3º ao dobro da outra, quanto mede cada um dos ângulos obtidos?

c) Há 18 anos a senhora Marta tinha a mesma idade que a filha Liliana. Sabendo que a soma da idade das duas é 52. Determine a idade de cada uma.

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

A resolução de sistema de duas equações lineares a duas incógnitas usando os métodos de substituição e a redução ao coeficiente simétrico designado por método de adição ordenada.

O método de substituição consiste em determinar a solução de sistema substituindo uma variável de cada vez. Este método é similar ao que se aplica na resolução de equações literais.

O método de redução ao coeficiente consiste em adicionar ordenamento às variáveis, determinando os coeficientes simétricos

Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1. a) o par $(1; 2)$é a solução do sistema
   b) o par $(6; 10)$é a solução do sistema.
   c) o par $(\frac{13}{3}; 1)$ é a solução do sistema

2. a) o par $(2; 1)$é a solução do sistema
   b) o par $(4; -6)$ é a solução do sistema.
   c) o par $(1; 0)$ é a solução do sistema

Venda proibida

3. a) $\begin{cases} x - y = 55 \\ 4x = 26 \end{cases}$ o par $\left(\frac{26}{4}; -\frac{97}{2}\right)$ é a solução do sistema. Os números são $\frac{26}{4}$ e $-\frac{97}{2}$

   b) $\begin{cases} x + y = 69° \\ x + 2y = 3° \end{cases}$ o par $(135; -66)$ é a solução do sistema.

   c) $\begin{cases} x - y = 18 \\ x + y = 52 \end{cases}$ o par $(35; 17)$ é a solução do sistema

   A mãe tem 35 anos e a filha tem 17 anos.

Venda proibida

LIÇÃO Nº 29: Métodos de resolução de sistemas de equações

Introdução

Caro aluno, na lição anterior aprendeu a resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas usando os métodos de substituição e de redução a coeficiente simétrico. Nesta, vai continuar esta matéria, especificamente a utilização simultânea dos dois métodos na resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

Objectivos da lição

Ao terminar o estudo desta lição o nosso você deverá ser capaz de:

- Resolver sistemas de equações lineares pelo método misto;

Para a melhor compreensão desta lição necessita de estudar durante 60 minutos no mínimo.

Resolução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método misto

Antes de abordarmos conteúdos relacionados com tema da lição, iniciarmos por resolver exercícios como forma de recapitular a matéria estudada na lição anterior. Para tal, copie os exercícios para o seu caderno e resolva-os.

Actividades.

Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases}$, aplicando:

1. Método de substituição**.**
2. Método de redução a coeficiente simétrico**.**

Caro aluno, conseguiu resolver a actividade? Se sim, está de parabéns, caso contrário, significa que não foi bem entendida a matéria discutida na lição anterior, por isso teve dificuldades para resolver. Muito bem, preste bem atenção nesta resolução, a ver se descobre o passo que não foi bem entendido.

Começamos por resolver o sistema $\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases}$, aplicando o método de substituição.

Venda proibida

Caro aluno, antes de mais nada é importante dizer que precisamos de conhecer a regra de resolução das equações literais pois esta é de grande importância na resolução de sistemas de equações. E a regra é:

Para resolver uma equação equações literal, escolhe-se a incógnita e em ordem a ela resolve-se a equação, considerando as outras variáveis como se fossem números conhecidos (parâmetros).

Neste caso, como primeiro passo teremos:

1º Passo: Escolher uma das equações e resolvemos em ordem a uma das suas variáveis. Nessa ordem, escolhemos a segunda equação e vamos resolvê-la em ordem a x, o que significa isolar a variável $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = \dfrac{4y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases}$$

Caro aluno, repare que já encontramos no primeiro passo a solução da segunda equação em ordem a $\boldsymbol{x}$, agora, devemos substituir, na primeira equação, o valor da variável $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{2y}$ e resolver a equação resultante. Então como segundo passo, teremos:

2º Passo: Substituir na outra equação a variável x pela solução encontrada no primeiro passo.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = \dfrac{4y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 \times 2y) + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8y + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{10} \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

Caro aluno, aqui já encontramos o valor numérico da variável $\boldsymbol{y}$**,** que **é 2 (** $\boldsymbol{y = 2}$**).** Devemos agora substituir variável $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{2}$ na segunda equação. Assim, no terceiro passo, teremos:

3º Passo: Encontrado o valor numérico para uma das variáveis, esta é por sua vez substituída de modo a que se encontre outro valor numérico.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = \dfrac{4y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 \times 2y) + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8y + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{10} \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Assim, encontramos os valores das duas variáveis, $\boldsymbol{x = 2}$ **e** $\boldsymbol{y = 1.}$ Estes formam o par ordenado $(\boldsymbol{2; 1})$ que é a solução do sistema. Mas, antes de declarar este par como solução do sistema é

Venda proibida

necessário, fazer a verificação, substituindo no sistema, as variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pelos valores encontrados. Então como quarto passo, teremos:

4º Passo: Verificação da solução

$$\begin{cases} \mathbf{4x - 10 = -2y} \\ \mathbf{2x = 4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{(4 \times 2) - 10 = -2 \times 1} \\ \mathbf{2 \times 2 = 4 \times 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{8 - 10 = -2} \\ \mathbf{4 = 4} \end{cases}$$

Repare que as igualdades são verdadeiras, o que comprova, de facto, que o par ordenado $(\mathbf{2}; \mathbf{1})$ é a solução do sistema.

b) Caro aluno, agora, vamos a resolução do mesmo sistema de equações, aplicando **o método de redução a coeficiente simétrico,** também conhecido por **adição ordenada.**

Antes da resolução**,** lembre-se que este método consiste em adicionar, ordenamento de coeficientes simétricos com a mesma variável com vista a encontrar o valor da incógnita $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, conforme os casos. Esta adição é feita com o objectivo de eliminar uma das incógnitas para se poder determinar o valor da outra incógnita.

Para este sistema $\begin{cases} \mathbf{4x - 10 = -2y} \\ \mathbf{2x = 4y} \end{cases}$ repare que as duas equações não estão na forma canónica, então como primeiro passo teremos:

1º Passo: Reduzir o sistema para a forma canónica.

$$\begin{cases} \mathbf{4x - 10 = -2y} \\ \mathbf{2x = 4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 10} \\ \mathbf{2x - 4y = 0} \end{cases}$$

Caro aluno, tendo em conta a regra de resolução das equações literais, teremos que escolher uma das variáveis e em ordem a ela, determinarmos o coeficiente simétrico. Para este caso, escolhemos a variável $\boldsymbol{x}$. O coeficiente da variável $\boldsymbol{x}$ na primeira equação é $\mathbf{4}$ e na segunda é $\mathbf{2}$. E para serem simétricos, precisamos de multiplicar os termos da segunda equação $\mathbf{2x - 4y = 0}$ por $\mathbf{(-2)}$**.** Assim, como o segundo passo teremos:

2º Passo: Reduzir os coeficientes de uma das incógnitas a valores simétricos.

$$\begin{cases} \mathbf{4x - 10 = -2y} \\ \mathbf{2x = 4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 10} \\ \mathbf{[2x - 4y = 0] \times (-2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 10} \\ \mathbf{-4x + 8y = 0} \end{cases}$$

Assim obtemos um sistema equivalente $\begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 10} \\ \mathbf{-4x + 8y = 0} \end{cases}$ cujos coeficientes da variável $\boldsymbol{x}$ são simétricos e ao adicionarmos, ordenadamente, os termos semelhantes das duas as equações, eliminaremos a variável $\boldsymbol{x}$ e teremos uma equação cuja incógnita é $\boldsymbol{y}$. Então, como, terceiro passo teremos:

Venda proibida

3º Passo: Adicionar ordenadamente, membro a membro, os temos semelhantes das duas equações, eliminando os coeficientes simétricos de uma das variáveis, obtendo assim uma equação com uma variável.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ [2x - 4y = 0] \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ +\ -4x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$0 + 10y = 10$$

Neste caso, a equação obtida é $\mathbf{0 + 10y = 10}$ que é o mesmo ter $\mathbf{10y = 10}$. É desta equação que teremos o valor da variável y. E como quarto passo teremos:

4º Passo: Resolver a equação obtida na adição ordenada para obter o valor numérico da variável que figura na equação.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ [2x - 4y = 0] \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ +\ -4x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$0 + 10y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{10} \Leftrightarrow y = 1$$

5º Passo: Seguindo os procedimentos do 2º e 3º passo, determina-se os coeficientes da outra variável, neste caso é $\boldsymbol{y}$.

Nesse contexto, teremos que determinar o coeficiente simétrico tendo em conta a variável $\boldsymbol{y}$**.** Assim sendo, vamos multiplicar os termos da primeira equação $\mathbf{4x + 2y = 10}$ por $(\mathbf{2})$ obtendo, deste modo um sistema de equações equivalente $\begin{cases} \mathbf{8x + 4y = 20} \\ \mathbf{2x - 4y = 0} \end{cases}$ cujo coeficientes da variável $\boldsymbol{y}$ são simétricos.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [4x + 2y = 10] \times (-2) \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ +\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$10x + 0 = 20$$

6º Passo: Seguindo os procedimentos do 4º passo, determina-se o valor numérico da outra variável, neste caso é $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} 4x - 10 = -2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [4x + 2y = 10] \times (-2) \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ +\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$10x + 0 = 20$$

$$\Leftrightarrow 10x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{10} \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, aplicando o método da adição ordenada, encontramos os valores das duas variáveis, $\boldsymbol{x = 2}$ **e** $\boldsymbol{y = 1}$**.** Estes formam o par ordenado $(\mathbf{2}; \mathbf{1})$ que é a solução do sistema.

Caro aluno, repare que usando métodos de resolução diferentes conseguimos chegar a mesma solução.

Venda proibida

Depois desta resolução, se acompanhou atentamente os passos seguidos nos dois métodos, certamente, conseguiu eliminar as dificuldades e descobriu onde precisa rever para melhor aperfeiçoamento na aplicação de cada método na resolução de sistemas de duas equações a duas variáveis.

Feita a revisão, é momento de passarmos para os conteúdos desta lição

Caro aluno, até aqui abordamos dois métodos para a resolução de sistemas de equações, o método de substituição e o método de adição ordenada. Usar apenas um destes métodos pode ser trabalhoso e demorado. Mas é possível combina-los de modo a simplificar a resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas qualquer.

A combinação destes dois métodos nos leva a um outro método de resolução, por isso, vamos na presente lição estudar um novo método de resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

Caro aluno, certamente pode estar a questionar-se, como se chama esse método? Como é feita essa combinação? Várias perguntas que podem surgir na sua mente neste momento, em fim…
Para matar essa curiosidade, acompanhe atentamente a abordagem que se segue.

Método misto

O método misto é a combinação do método de substituição e do método de adição ordenada. Este método consiste em aplicar numa primeira fase o método de adição ordenada para encontrar uma das variáveis e de seguida recorrer ao método de substituição para encontrar a outra variável.
Para entender melhor esta aplicação, consideremos, o seguinte problema, equacione-o e resolva:

Actividade

Na montra de uma confeitaria está escrito pague $110Mt$ e leve 3 bombons e 2 rebuçados ou pague $60Mt$ e leve 1 bombom e 3 rebuçados. Quanto custa cada bombom? E cada rebuçado?

Para equacionar este problema devemos:

1º Devemos antes de mais nada ler, entender de modo que saibamos o que nos dá o problema como dados e o que ele nos pede o problema;

2º Devemos equacionar o problema, isto é, transformar o problema num sistema de equações;

3º Resolver o sistema de equações recorrendo a qualquer um dos métodos abordados;

4º Extrair a solução;

Venda proibida

5º Responder o problema.

Assim sendo, vamos por em prática os passos acima mencionados. Depois de uma leitura cuidadosa:

1º Passo: Dados	Pedido
3 Bombons e **2** rebuçados pague-se $\mathbf{110}\boldsymbol{Mt}$.	Preço de cada bombom?
1 Bombom e 3 rebuçados paga-se $\mathbf{60}\boldsymbol{Mt}$.	E cada rebuçado?

2º Passo: Equacionando o problema

Seja "x" o custo do bombom e "y" o custo do rebuçado. As equações que descrevem o problema ficam:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110Mt \\ x + 3y = 60Mt \end{cases}$$

3º Passo: Resolver o sistema de equações recorrendo a qualquer um dos métodos abordados.

Neste caso:

I. Vamos usar o método de adição ordenada, para determinar o valor numérico da variável y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ x + 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ [x + 3y = 60] \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ -3x - 9y = -180 \end{cases}$$

$$0 - 7y = -70 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{(-70)}{(-7)}} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 10}$$

II. Vamos usar o método de substituição para determinar o valor numérico da variável x

$$x + 3y = 60 \Leftrightarrow \boldsymbol{x + 3 \times 10 = 60}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x + 30 = 60}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 60 - 30}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 30}$$

4º Passo: Extrair a solução

Verificação do resultado

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110Mt \\ x + 3y = 60Mt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 30 + 2 \times 10 = 110 \\ 30 + 3 \times 10 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 + 20 = 110 \\ 30 + 30 = 60 \end{cases}$$

O par ordenado $(\mathbf{30}; \mathbf{10})$ é a solução do sistema**.**

5º Passo: Responder o problema.

Resposta: Cada bombom custa 30Mt e cada rebuçado custa 10Mt.

Caro aluno, conseguiu compreender como é feita a combinação dos dois métodos? Já notou que os passos são mais curtos e simples! Para melhor compreensão vamos resolver mais um exemplo.

Venda proibida

Actividade

Resolva o seguinte sistema. $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=2\\ x+y=3\end{cases}$

I. Vamos usar o método de adição ordenada, para determinar o valor numérico da variável y.

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=2\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=2\right]\times(-2)\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-\frac{2}{2}\right)x-\left(\frac{2\times3}{4}\right)y=-4\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{3}{2}y=-4\\ x+y=3\end{cases}$$

$$0+\left(-\underset{(1)}{\frac{3}{2}}+\underset{(2)}{1}\right)y=-1\Leftrightarrow\left(\frac{-3+2}{2}\right)y=-1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}y=-1\Leftrightarrow-y=-2\Leftrightarrow y=2$$

II. Vamos usar o método de substituição para determinar o valor numérico da variável x

$$\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=2\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\times2\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{3}{2}=2\Leftrightarrow x+3=4\Leftrightarrow x=4-3\Leftrightarrow x=1$$

Verificação

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=2\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}2=2\\ 1+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2\\ 3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{2}=2\\ 3=3\end{cases}$$

O par ordenado $(\mathbf{2};\mathbf{1})$ é a solução do sistema**.**

Caro aluno, chegado o momento de avaliar o seu nível de compreensão e consolidação, copie para o seu caderno e resolva os seguintes exercícios e veja se percebeu a matéria tratada nesta lição.

Exercícios

1. Resolva os sistemas seguintes, aplicando o método misto.

a) $\begin{cases}3x+y=13\\ x-2y=2\end{cases}$

b) $\begin{cases}x-y=1\\ 2x-y=3\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{x}{3}+y=\frac{4}{3}\\ x-\frac{y}{2}=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}4x-5y=12\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\end{cases}$

e) $\begin{cases}x=y\\ x+3y=4\end{cases}$

f) $\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{y}{2}=2x\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{4}\end{cases}$

2. Resolva os seguintes problemas

a) Determine dois números, sabendo que a diferença é 11e que a soma da terça parte do aditivo com a quarta parte do subtractivo é 13.

Venda proibida

b) No fim de um dia, havia no caixa de uma loja 50Mt em moedas de 1MT e de 50 centavos. O dobro das moedas de 50 centavos era igual ao quádruplo da quantidade de moedas de 1M. Quantas moedas havia de cada valor?

A lição chegou ao fim. Agora apresente o seu resumo, no caderno.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

A resolução de sistema de duas equações lineares a duas incógnitas usando o método misto que consiste em aplicar numa primeira fase o método de adição ordenada para encontrar uma das variáveis e de seguida recorrer ao método de substituição para encontrar a outra variável.

Aprendeu ainda a equacionar problemas conducentes a sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas e os respectivos passos de resolução.

Parabéns**,** conseguiu resolver os exercícios acertadamente? Excelente trabalho! Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de correcção.

Chave de correcção

1. a) o par $(4; 1)$ é a solução do sistema

   b) O par $(2; 1)$ é a solução do sistema.

   c) O par $\left(\frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right)$ é a solução do sistema

   d) O par $\left(\frac{54}{23}; -\frac{12}{23}\right)$ é a solução do sistema

   e) O par $(1; 1)$ é a solução do sistema

   f) O par $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{3}\right)$ é a solução do sistema

2. a) Os números são 27 e 16.

   b) Havia na caixa 25 moedas de 1Mt e 50 moedas de 50 centavos.

Chegou ao fim da lição. Excelente trabalho!

Venda proibida

LIÇÃO Nº 30: Métodos de resolução de sistemas de equações

Introdução

Nesta lição, vai aprender a resolução gráfica de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas, bem assim, a resolução de problemas conducentes a sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas.

Objectivos da lição

Ao terminar o estudo desta lição o nosso aluno deverá ser capaz de:

- Resolver graficamente sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas;
- Interpretar problemas conducentes a sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas, usando tabelas e gráficos;
- Resolver problemas conducentes a sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas, usando tabelas e gráficos;
- Classificar os sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

Para a melhor compreensão desta lição você necessita de estudar durante 90 minutos no mínimo.

Resolução gráfica de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas pelo método misto – continuação

Antes de abordarmos conteúdos relacionados com tema da lição, iniciarmos por resolver exercícios como forma de recapitular a matéria estudada nas lições anteriores. Para tal, copie o exercício para o seu caderno e resolva-o.

Actividade

Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} x + 3y = 16 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$, aplicando o método misto:

Caro aluno, conseguiu resolver a actividade? Se sim, está de parabéns, caso contrário, significa que precisa de praticar um pouco mais na leitura e na exercitação. Creia que um pequeno esforço diário trará bons resultados na assimilação da matéria.

Agora, compare a sua resolução com a que se segue para certificar se está no bom caminho e o que precisa de melhorar.

Venda proibida

Resolução

Começamos por resolver o sistema $\begin{cases} x+3y=16 \\ 2x-3y=-5 \end{cases}$, aplicando o método de adição ordenada.

Caro aluno, repare que no sistema, os coeficientes da variável y são simétricos. Então só vamos efectuar a adição ordenada e determinar o valor numérico da variável x.

$$\begin{cases} x+3y=16 \\ 2x-3y=-5 \end{cases}$$

$$3x+0=11 \Leftrightarrow 3x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11}{3}$$

Tendo o valor numérico da variável x, vamos substituir esse valor numa das equações para determinar o valor numérico da variável y.

$$x+3y=16 \Leftrightarrow \frac{11}{3}+3y=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y=\underset{(3)}{16}-\underset{(1)}{\frac{11}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3y=\frac{48-11}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3y=\frac{37}{3} \Leftrightarrow y=\frac{37}{3\times 3} \Leftrightarrow y=\frac{37}{9}$$

Tendo os valores numéricos das variáveis $x=\frac{11}{3}$ e $y=\frac{37}{9}$, vamos fazer a verificação para comprovar se este par ordenado constitui solução do sistema.

Verificação do resultado

$$\begin{cases} x+3y=16 \\ 2x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}+3\times\frac{37}{9}=16 \\ 2\times\frac{11}{3}-3\times\frac{37}{9}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}+\frac{37}{3}=16 \\ \frac{22}{3}-\frac{37}{9}=-5 \end{cases}$$

Depois de substituir os valores das variáveis x e y nas equações dos sistemas obteve-se duas igualdades verdadeiras o que comprova que o par ordenado $\left(\frac{11}{3};\frac{37}{9}\right)$ é a solução do sistema.

Caro aluno, já comparou os resultados? Como é que conseguiu chegar ao resultado seguindo conforme os passos? Muito bem, no caso de não ter conseguido chegar ao resultado, já sabe o que fazer, é só seguir as recomendações deixadas nas lições anteriores.

Feita a revisão, passemos para a abordagem dos conteúdos desta lição.

Resolução gráfica sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas

Venda proibida

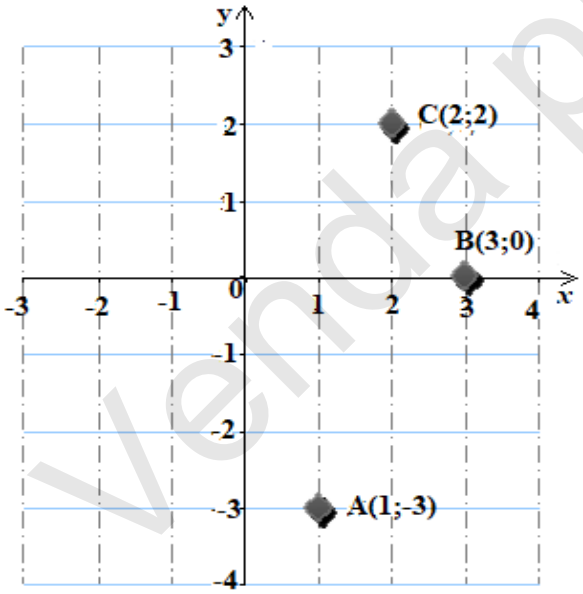
Caro aluno, até agora abordamos apenas métodos de substituição, adição ordenada e misto para a resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas. Estes métodos são designados por métodos analíticos. Nesta lição, vamos fazer o estudo do método gráfico para resolução de sistemas de duas equações lineares a com duas incógnitas. Mas antes, iniciaremos por fazer uma pequena revisão sobre o estudo de funções do primeiro grau, para melhor compreender a essência do método gráfico na resolução de sistemas de equações. Para tal, copie para o seu caderno e resolva os exercícios que se seguem:

Actividades

1. Represente no sistema cartesiano ortogonal (SCO) os seguintes pontos: $A(1;-3)$, $B(3;0)$ e $C(2;2)$
2. Represente graficamente a seguinte função $y = 3x - 2$.

Caro aluno, já terminou a resolução das actividades? Se a resposta é sim, então confira a sua resolução com a que se segue.

1.



Para o exercício 2, lembre-se, que uma função linear é uma recta, então basta apenas encontrar dois de seus pontos para poder representa-la. Assim sendo:

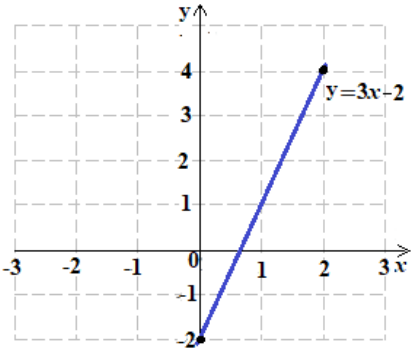
x	$y = 3x - 2$
0	-2
2	4

$$y = 3x - 2 \Leftrightarrow y = 3 \times 0 - 2 \Leftrightarrow y = 0 - 2 \Leftrightarrow y = -2$$

$$y = 3x - 2 \Leftrightarrow y = 3 \times 2 - 2 \Leftrightarrow y = 6 - 2 \Leftrightarrow y = 4$$

Determinados os dois pontos, segue-se a representação gráfica da recta correspondente à função.

Venda proibida



Caro aluno, com esta actividade, certamente conseguiu recordar-se que para representar os pontos plano referencial ou cartesiano é necessário traçar duas rectas perpendiculares designados por eixos. O eixo horizontal representa os valores de x e é designado por eixo das abcissas, e o eixo vertical representa os valores do y e é designado por eixo das ordenadas. Na intersecção dos eixos marca-se o ponto O, que representa a origem referencial.

Conseguiu recordar-se, ainda, que qualquer ponto no plano é representado por um par ordenado $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$.

Para representar uma função linear no sistema cartesiano ortogonal (SCO), basta ter dois pontos calculados a partir da expressão ou equação da função dada.

Caro aluno, com esta actividade, deve já, ter notado que os sistemas por nós estudados, têm duas equações e duas incógnitas. Cada uma das equações pode ser representada no sistema cartesiano ortogonal (SCO) na forma de uma recta.

O método gráfico consiste em representar no mesmo sistema cartesiano ortogonal as duas equações. A solução do sistema será o ponto de intersecção das rectas.

Actividade

Para melhor perceber a essência deste método vamos resolver, juntos, os sistemas que se seguem:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 2x = 4y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 4 = 2y \end{cases}$

Começando pelo sistema:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 2x = 4y \end{cases}$

Como primeiro passo, vamos reduzir as duas equações à forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, isolando em ambas equações a variável y.

Venda proibida

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 10 - 4x \\ 4y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10 - 4x}{2} \\ y = \dfrac{2x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

Caro aluno, repare que ao isolar a variável $\boldsymbol{y}$ nas duas equações, obtém-se duas funções lineares provenientes de equações do sistema dado.

No segundo passo, vamos fazer a representação gráfica das duas funções encontradas no mesmo S.C.O., mas, antes da representação gráfica, vamos determinar, pelo menos dois pontos para cada função linear.

I. Para $y = 5 - 2x$ obtém-se

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 5 - 2x}$
0	$\mathbf{5}$
3	$\mathbf{-1}$

$$\boldsymbol{y = 5 - 2x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5 - 2 \times 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5 - 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5}$$

$$\boldsymbol{y = 5 - 2x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5 - 2 \times 3} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5 - 6} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -1}$$

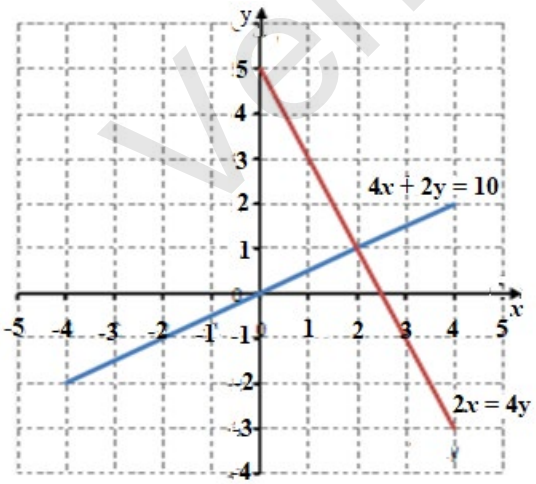
II. Para $y = \frac{1}{2}x$ obtém-se

x	$y = \dfrac{1}{2}x$
0	0
3	$\dfrac{3}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \times 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \times 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$$

Tendo determinados os pontos para cada função, segue a representação gráfica das funções no mesmo S.C.O.



No terceiro passo, vamos identificar a solução do sistema, que é o par ordenado que indica a intersecção das duas rectas.

Venda proibida

Caro aluno, repare que as duas rectas intersectam-se no ponto onde as coordenadas no eixo das abcissas é $\boldsymbol{x = 2}$ e no eixo das ordenadas é $\boldsymbol{y = 1}$**.** Por outras palavras, a intersecção das duas rectas fornece as coordenadas do ponto comum das duas equações do sistema. Assim, o par ordenado $(\mathbf{2}; \mathbf{1})$ é a solução do sistema.

Um sistema com uma solução ou com estas características, ou seja, quando um sistema tem um só par de solução, diz-se que o sistema é **possível** e **determinado**

b) Para o sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$, temos:

1º Passo, reduzir as duas equações à forma $\boldsymbol{y = ax + b}$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

2º Passo, fazer representação gráfica das duas funções encontradas na mesmo S.C.O. antecedida pela determinação de, pelo menos dois pontos para cada função linear.

I. Para $y = -2x + 3$ obtém-se

$\boldsymbol{x}$	$y = -2x + 3$
0	3
1	1

$$y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -2 \times 0 + 3 \Leftrightarrow y = 0 + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

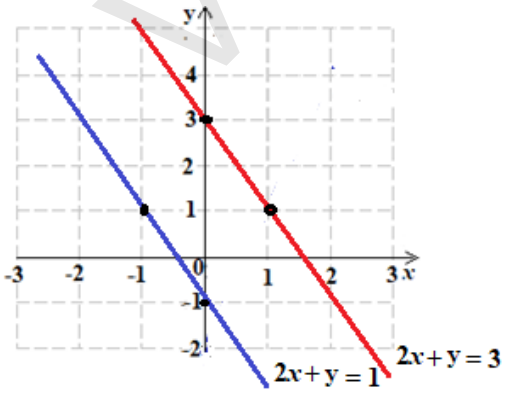
$$y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -2 \times 1 + 3 \Leftrightarrow y = -2 + 3 \Leftrightarrow y = 1$$

II. Para $y = -2x - 1$ obtém-se

$\boldsymbol{x}$	$y = -2x + 1$
0	-1
$\boldsymbol{-1}$	1

$$y = -2x - 1 \Leftrightarrow y = -2 \times 0 - 1 \Leftrightarrow y = 0 - 1 \Leftrightarrow y = -1$$

$$y = -2x - 1 \Leftrightarrow y = [-2 \times (-1)] - 1 \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1$$



Caro aluno, repare que as duas rectas são paralelas, portanto, não tem pontos de intersecção. Neste caso, estamos perante de um sistema que não tem solução, isto é, não tem nenhum par de solução, é um **sistema impossível.**

Venda proibida

Para comprovar esta afirmação, vamos resolver o sistema usando o método misto.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ [2x+y=1]\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ -2x-y=-1 \end{cases}$$

$$0+0=2 \Leftrightarrow 0=2$$

Esta resolução mostra que o sistema não tem solução, **é impossível**.

c) Finalmente, para o sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-4=2y \end{cases}$ temos:

1º Passo, reduzir as duas equações à forma $\boldsymbol{y=ax+b}$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-4=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y=2-x \\ -2y=-2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ y=x-2 \end{cases}$$

Caro aluno, repare que ao reduzir as duas equações para a forma $\boldsymbol{y=ax+b}$, obtemos duas funções com termos semelhantes. E agora, como será a representação gráfica?

2º Passo, fazer representação gráfica das duas funções encontradas na mesmo S.C.O. antecedida pela determinação de, pelo menos dois pontos para cada função linear.

I. Para $y=x-2$ obtém-se:

x	$y=x-2$
0	3
3	1

$$y=x-2 \Leftrightarrow y=0-2 \Leftrightarrow y=-2$$

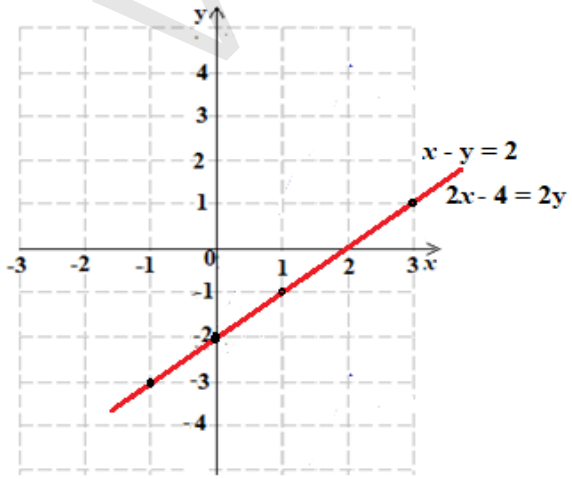
$$y=x-2 \Leftrightarrow y=3-2 \Leftrightarrow y=1$$

II. Para $y=x-2$ obtém-se:

x	$y=x-2$
−1	−3
1	−1

$$y=x-2 \Leftrightarrow y=-1-2 \Leftrightarrow y=-3$$

$$y=x-2 \Leftrightarrow y=1-2 \Leftrightarrow y=-1$$



Venda proibida

Caro aluno, repare que na redução das duas equações para a forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, obtivemos duas funções com termos semelhantes., consequentemente, as duas rectas são coincidentes. Logo, as coordenadas de todos os pontos da recta são soluções do sistema. Isso significa que, a solução é indeterminada, ou seja. O sistema admite infinitos pares ordenados de soluções. Assim, este sistema é considerado **possível** e **indeterminado**.

Vejamos quando a resolução do sistema aplicando o método misto, o que acontece:

$$\begin{cases}[x - y = 2] \times (-2) \\ 2x - 4 = 2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x + 2y = -4 \\ 2x - 2y = 4\end{cases}$$

$$0 + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Esta resolução mostra que o sistema admite várias soluções, **é indeterminado.**

Caro aluno, depois desta explanação e resolução, certamente, já se sente capaz de resolver sistemas de equações aplicando o método de resolução gráfica. Para pôr em prática este conhecimento, copie para o seu caderno e resolva os exercícios como forma de avaliar o nível da assimilação da matéria aborda da nesta lição. Depois da resolução, confira as suas respostas com a chave de correcção.

Exercícios

1. Resolva os sistemas abaixo pelo método gráfico.

   a) $\begin{cases}x - y = -2 \\ x - 2y = 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4\end{cases}$ d) $\begin{cases}x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0\end{cases}$

2. Classifique cada um dos sistemas de duas equações do exercício 1.

3. Verifique se cada par ordenado é ou não solução do sistema apresentado em cada alínea.

   a) $\begin{cases}\boldsymbol{x + 3y = 11} \\ \boldsymbol{2x - y = 1}\end{cases}$ $\boldsymbol{(2; 3)}$

   b) $\begin{cases}\boldsymbol{x + y = 0} \\ \boldsymbol{x - y = 2}\end{cases}$ $\boldsymbol{(1; -1)}$

   c) $\begin{cases}\boldsymbol{x + y = 0} \\ \boldsymbol{2x - y = 3}\end{cases}$ $\boldsymbol{(1; -1)}$

   d) $\begin{cases}\frac{2-x}{5} + y = \frac{3}{2} \\ 2y - 3x = 5y - \frac{x}{2}\end{cases}$ $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$

4. Dentre os sistemas de equações do exercício 3, indique dois que sejam equivalentes.

5. Resolva os problemas:

   5.1. O perímetro de um triângulo isósceles é $23cm$. Sabendo que a base mede menos $4cm$ do que cada um dos outros lados, quanto medem os lados do triângulo?

Venda proibida

5.2. Três camisas e cinco gravatas custam 4600Mt. Duas camisas e três gravatas custam 3000Mt. Quanto custa cada camisa e cada gravata?

Apresente o resumo da matéria desta lição.

Resumo da Lição

Caro aluno, nesta aula aprendeu que:

O método gráfico consiste em representar no mesmo sistema cartesiano ortogonal as duas equações. A solução do sistema será o ponto de intersecção das rectas.

Na representação gráfica dos sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas:

No sistema possível determinado, as duas rectas são concorrentes, têm um ponto de intersecção e uma única solução.

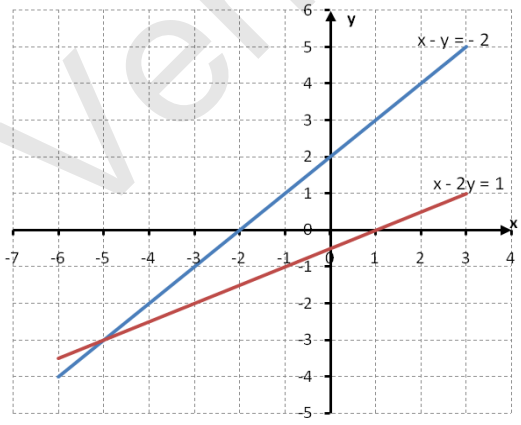
No sistema possível indeterminado, as duas rectas são coincidentes, todos pontos das rectas podem ser solução, por isso admite infinitas soluções.

No sistema impossível determinado, as duas rectas são paralelas, não têm nenhum ponto de intersecção por isso não têm solução.

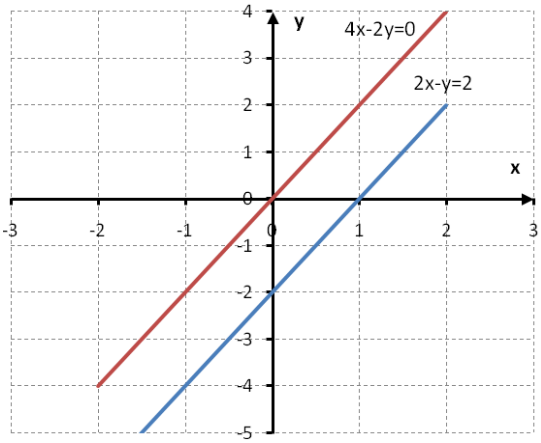
Agora compare as suas soluções com as que lhe são propostas na Chave de Correcção.

Chave de correcção

1.a)

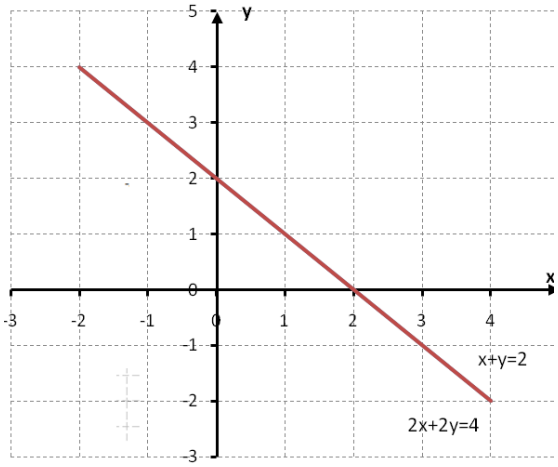


b)

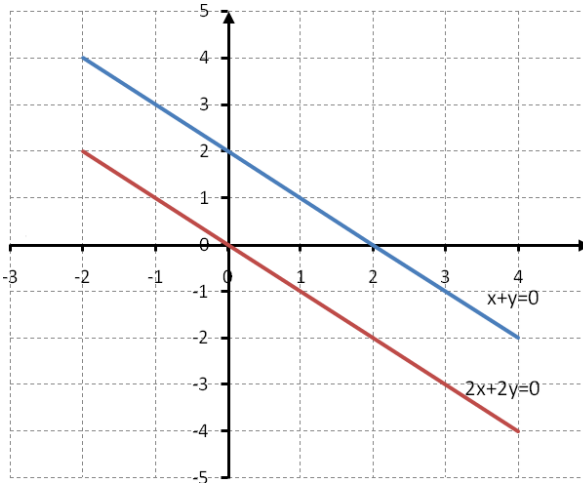


Venda proibida

c)



d)



2. a) Sistema possível
   b) Sistema impossível
   c) Sistema possível e indeterminado.
   d) Sistema impossível

3. É solução a), b) e c) ; não é solução d)

4. Os sistemas equivalentes são b) e c)

5.1. Os lados do triângulo medem $5cm$ e $9cm$.

5.2. Cada camisa custa $1200Mt$ e cada gravata custa $200Mt$.

Venda proibida

TESTE DE PREPARAÇÃO

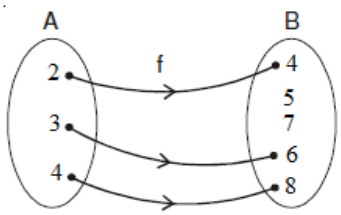
1. Das afirmações a baixo, indique com **V** as verdadeiras e com **F** as falsas:

a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_0^-$_____ d) $\mathbb{Z}_0^+ \epsilon \mathbb{R}$_____ g) $-\frac{91}{4} \in \mathbb{R}_0^+$_____

b) $\mathbb{Q}_0^+ \supset \mathbb{R}_0^+$ _____ e) $+\sqrt{10} \notin \mathbb{R}^-$_____ h) $-\sqrt{5} \subset \mathbb{R}^-$_____

c) $\mathbb{R} \supset \left\{-1; -\frac{\pi}{2}\right\}$_____ f) $\mathbb{Q}_0^- \not\subset \mathbb{R}^+$_____

2. Considere a função f representada por dois conjuntos a seguir:



a) Indique o domínio da função.

b) Indique o conjunto de chegada.

c) Indique o contradomínio da função.

3. Dados os seguintes conjuntos:

$\mathbf{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $\mathbf{B} = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Definiu-se a função A em B tal que $g(x) = 2x$.

a) Determine o contradomínio de $g(x)$.

b) Assinale com "**V**" as afirmações verdadeiras e "**F**" as afirmações falsas:

i. A função g é bijectiva, porque o domínio e contradomínio são diferente.

ii. A função g é injectiva porque cada elemento do domínio corresponde a um e um só elemento do contradomínio.

iii. A função g é bijectiva porque é injectiva e não sobrejectiva em simultâneo.

c) Indique o coeficiente angular da função.

d) Diga se a função é crescente ou é decrescente.

4. Dados os conjuntos, $A = [-2, 3]$ e $B =]2, 5]$, determine:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

5. Dada a inequação: $5 - 3(x - 1) > \frac{1}{2}$. Resolva-a e represente o conjunto solução sob intervalo numérico e por compreensão.

6. Dado o sistema: $\begin{cases} 4(x-2) + 3(y-1) = 0 \\ 5(x-2) - 3(y-1) = 0 \end{cases}$

a) Resolva-o;

b) Classifique o sistema quanto a natureza das soluções.

Venda proibida

Chave de correcção

1.

a) F b) F c) V d) F e) V f) V g) F h) F

2. a) $Df: \{2, 3, 4\}$ b) $\{4, 5{,}6, 7, 8\}$ c) $\{4, 6, 8\}$

3. a) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$ b) i) F ii) V iii) F c) Coeficiente $a = 2$

d) A função é crescente, pois o coeficiente angular $\boldsymbol{a}$ é maior que 0 isto é $a > 0$.

4. a) $]2, 3]$ b) $[-2, 5]$

5. Solução representada sob intervalo numérico: $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$;

Solução representada por compreensão: $x \in \mathbb{R}: x < \frac{5}{2}$.

6. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ b) Sistema possível determinado.

Venda proibida

Bibliografia

Amaral, a. J., & Nhalungo, C. (2004). *As maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Chuquela, N. J., & Langa, N. (2008). *Matemática.* Maputo: Plural Editores.

Gelson Iezzi & Samuel Hazzan, (2004). Fundamentos de Matemática Elementar – Conjuntos e funções – Vol.1 8ª edição SP Atual editora.

Giovane José Rui & Bonjorno José Roberto (1992). Matemática 1º e 2º grau, S. Paula, Editora FTD S.A.

Guibundana, D., & Sapatinha, J. C. (2009). *Saber Matemática.* Maputo: Logman Moçambique Lda.

Langa, H., & Chuquela, N. J. (2010). *Matemática.* Maputo: Plural editora.

Nhezi Ismael *Cassano (*2005). M10 Matemática 10ª classe*,* Lda, Moç.Texto Editores,

Sapantinha, J. C., & Guibundana, D. H. (2010). *saber Matemática.* Maputo: Longman Moçambique.

Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números.* Maputo: Texto Editores.

Venda proibida

IEDA