REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

Venda Proibida
Distribuição
Gratuita

8ª Classe

Matemática

Caderno de Apoio à Aprendizagem

INDE

INSTITUTO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Maputo, Dezembro de 2024

FICHA TÉCNICA

Título:	*Caderno de Apoio à Aprendizagem de Matemática - 8ª Classe*
Coordenação	Lourenço Magaia (INDE) & Silvestre Dava (DINES)
Elaboradores:	Helena Simione (INDE) & Anselmo Chuquela (DINES)
Revisores científicos:	António A. Chichongue (UniSave) & Alexandrina U. Macamo (UP)
Revisor linguístico:	Jaime António Mondlane (UEM)
Arranjos gráficos e Layout:	Hortêncio Belunga Tembe (INDE) & Manuel Mussa Biriate (DINES)
Impressão e acabamentos:	MINEDH
Tiragem:	
Ano:	2024

PREFÁCIO

Caro(a) aluno(a),

Apresentamos o Caderno de Apoio à Aprendizagem, uma ferramenta valiosa elaborada para enriquecer o teu processo de aprendizagem. Esta iniciativa surge da necessidade de fornecer suporte adicional no contexto em que não dispomos do livro do aluno da 8ª classe.

Este caderno aborda diversos conteúdos programáticos, oferecendo uma variedade de actividades cuidadosamente elaboradas para complementar o teu percurso estudantil. Ao longo das suas diferentes secções, encontrarás:

- Conteúdos de cada Unidade Temática que te vão proporcionar uma visão global e concisa dos conteúdos programáticos;
- Um conjunto diversificado de actividades concebidas para reforçar o entendimento e a aplicação prática dos conceitos aprendidos em sala de aula;
- Soluções e sugestões de soluções, o que poderão facilitar a tua aprendizagem de conteúdos abordados.

Ressaltamos que este caderno foi concebido para responder à falta do livro do aluno. Desta forma, o mesmo visa proporcionar um suporte complementar ao teu processo de aprendizagem ao longo do ano lectivo.

Estamos confiantes que este caderno será um recurso valioso no desenvolvimento das tuas habilidades e conhecimentos.

Os Elaboradores

INDICE

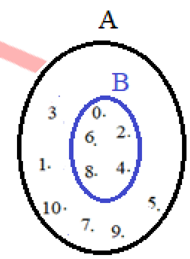
1. Introdução à teoria de conjuntos

1.1 Relação entre conjuntos: Subconjunto

Diz-se que um conjunto é subconjunto de outro conjunto, quando todos os elementos do segundo conjunto pertencem ao primeiro conjunto.

Exemplo:

A partir do diagrama de venn ao lado pode se notar que todos os elementos do conjunto B pertencem ao conjunto A, isto é:



$0 \in A$	$2 \in A$	$4 \in A$	$6 \in A$	$8 \in A$
$0 \in B$	$2 \in B$	$4 \in B$	$6 \in B$	$8 \in B$

Assim, o conjunto B é subconjunto de A

1.2 Relação de inclusão: está contido e não está contido, contém e não contém

A relação de inclusão é usada para indicar se um determinado conjunto **está contido (**$\subset$) ou **não está contido (**$\not\subset$) em um outro conjunto e se um determinado conjunto **contém (**$\supset$) ou **não contém (**$\not\supset$) o outro conjunto.

Se todos os elementos de um conjunto (o segundo) pertence a outro conjunto (o primeiro), então o segundo conjunto está contido no primeiro conjunto ou o primeiro conjunto contém o segundo conjunto.

Exemplo:

Considere os conjuntos P = $\{a; d\}$; Q = $\{a;\ b;\ c\}$ e T = $\{a;\ b\}$.

A partir dos conjuntos dados acima podemos notar que:

1. Todos os elementos do conjunto **T** pertencem ao conjunto **Q**, logo o conjunto **T está contido** no conjunto **Q**. Simbolicamente, escreve-se:
   $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Q}$ Lê-se **"**o conjunto **T está contido** no conjunto **Q"** ou
   $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{T}$ Lê-se **"**o conjunto **Q contém** o conjunto **T"**

2. No conjunto **P** existe um elemento (d) que não pertence ao conjunto **Q**, logo o conjunto **P não está contido** no conjunto **Q**. Simbolicamente, escreve-se:
   P $\not\subset$ Q e lê-se "o conjunto **P não está contido** no conjunto **Q"** ou
   $\boldsymbol{Q} \not\supset \boldsymbol{P}$ e lê-se "o conjunto **Q não contém** o conjunto **P"**

NOTA: Os simbolos $\subset$; $\supset$; $\not\subset$ e $\not\supset$ são usados para indicar a relação entre conjuntos.

1.3 Noção de igualdade de conjuntos e conjunto universal

1.3.1 Igualdade de conjuntos

Dois ou mais conjuntos são iguais quando apresentam os mesmos elementos, em qualquer ordem.

Exemplo:

Dados os conjuntos $\mathrm{A} = \{a;\ b;\ c\}$ e $\mathrm{B} = \{c;\ b;\ a\}$

Os elementos do conjunto A são iguais aos elementos do conjunto B. Simbolicamente a igualdade entre conjuntos fica definida como: $\boldsymbol{A = B}$.
Esta igualdade pode ser interpretada como dupla inclusão: $\boldsymbol{A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset A}$**.**

1.3.2 Conjunto universal

Chama-se conjunto universo ou universal, ao conjunto constituido por todos os elementos que devem ser considerados como tendo a mesma característica e representa-se por **"U".**

Exemplos:

1. Conjunto formado por todas as províncias de Moçambique. Este conjunto é composto pelas províncias de Niassa, Cabo delgado, Nampula, Tete, Zambézia, Manica, Sofala, Inhambane, Gaza, Maputo-província e Maputo-cidade. Tomando em consideração que este conjunto representa todas as províncias de Moçambique, pode-se afirmar que este conjunto representa o conjunto universo das províncias de Moçambique.
2. O conjunto $\mathbb{Z}$ é considerado universal em relação aos conjuntos
   $P = \{números\ inteiros\ \ maiores\ que\ zero\ \ \}$ e
   $H = \{números\ inteiros\ não\ positivos\}$.

1.4 Noção de conjunto finito

Dado o conjunto das vogais: $\mathrm{V} = \{a;\ e;\ i;\ o;\ u\}$. Este conjunto começa com a letra $\boldsymbol{a}$ e termina com a letra $\boldsymbol{u}$**.** A este tipo de conjuntos que tem princípio e fim, ou seja, que tem um número limitado dos seus elementos, chama-se **conjunto finito.**

Exemplos:

$\mathrm{A} = \{\text{números pares positivos menores que } 12\} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \{\,2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$
$\mathrm{B} = \{\text{números inteiros entre} -1 \text{ e} -5\} \Leftrightarrow \mathrm{B} = \{-4;\ -3;\ -2\}$

2. Operações com conjuntos

2.1 Reunião ou união de conjuntos

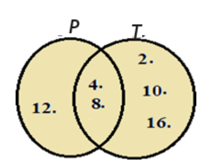
A reunião ou união de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos elementos que pertencem ao conjunto **A** ou **B**. Para indicar a união de dois conjuntos usa-se o símbolo ∪.

Exemplo:

Dado os conjuntos $P = \{4;\ 8; 12\}$ e $T = \{2;\ 4;\ 8; 10; 16\}$
$P\ \cup T = \{2;\ 4; 8;\ 10;\ 12;\ 16\}$

Lê-se **P** reunião com **T**

Diagrama de Venn

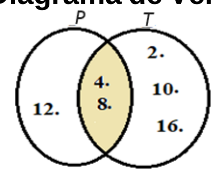


PUT

2.2 Intersecção de conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos comuns dos conjuntos A e B. Para indicar a intersecção de dois conjuntos usa-se o símbolo ∩**.**

Exemplo:

Dado os conjuntos $P = \{4;\ 8;\ 12\}$ e $T = \{2;\ 4;\ 8;\ 10;\ 16\}$ $P \cap T = \{4; 8\}$ → Lê-se **P** intersecção com **T**	**Diagrama de Venn**  $\boldsymbol{P \cap T}$

Nota que só foi pintada a parte da intersecção (parte comum dos dois diagramas).

Exercícios resolvidos

1. Dado os conjuntos $\mathrm{A} = \{0; 1; 2;\ 3\}$ **e** $\mathrm{B} = \{3; 2; 1; 0\}$, indica com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas:
   a) $A \in B$ _____ c) $B \subset A$ _____
   b) $3\ \in A$ ______ d) $A \subset B$ ______

Resolução:

a) $A \in B$ F	**F**, pois, a relação de pertença funciona para um elemento de um conjunto e não para dois conjuntos.
b) $3\ \in A$ V	**V** pois 3 faz parte do conjunto A.
c) $B \subset A$ V	**V**, pois, todos elementos do conjunto B também são elementos do conjunto A.
d) $A \subset B$ V	**V**, pois, todos elementos do conjunto A também são elementos do conjunto B.

2. Dados os seguintes conjuntos A e B, determina $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ e $A\ \cap B$

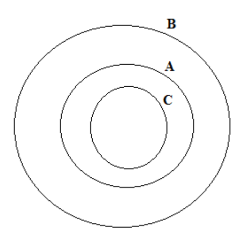
a) A=$\{1; 4; 5; 6\}$ e B= $\{1; 5; 8; 9\}$
b) A= $\{a\,; b\,;\ c\,; d\}$ e B= $\{a\,; c\,; e\}$
c) A= $\{x \text{ é } número\ natural\}$ e B= $\{\ x \text{ é } número\ impar\}$

Resolução:

a) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ = \{1;\ 4;\ 5; 6; 8;\ 9\}$ e $A\ \cap B\ = \{1; 5\}$
b) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ = \{a; b;\ c; d;\ e\}$ e $A\ \cap B\ = \{a;\ c\}$
c) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ = \{x \text{ é } número\ natural\}$ $A\ \cap B\ = \{\ x \text{ é } número\ impar\}$

Exercícios de aplicação

1. No diagrama seguinte A, B e C são três conjuntos não vazios. Indica com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas em cada um dos seguintes casos:
   $a) A \subset B$ $b)\ C \subset B$ $c)\ B \subset A$ $d)\ A \subset C$
   $e)\ B \not\subseteq A$ $f\,) A \not\subset C$ $g) B \supset A$ $h)\ A \not\supseteq B$



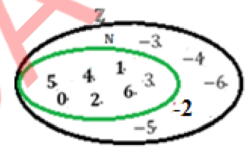
2. Dados os seguintes conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {2, 3, 4, 5, 6}, determina $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ e $A\ \cap B$.

3. Sendo $A = \{0; 1; 2; 3\}\ e\ B = \{0; 2; 3; 5\}$ e C= $\{\text{números pares menor que } 10\}$ e D=$\{\text{números ímpares compreendidos entre 4 e 10}\}$. Determina: a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $A \cup D$ d) $A \cap B$ e) $B \cap D$ f) $C \cap D$

2. Números racionais

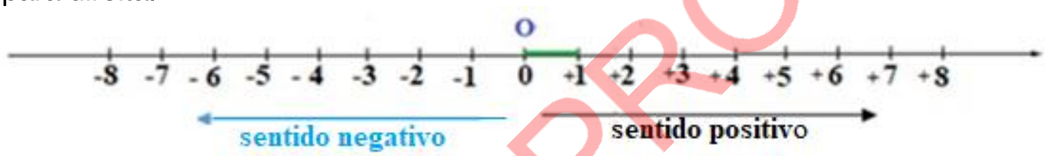
2.1 Revisão de números inteiros

Conjunto dos números inteiros relativos é o conjunto formado pelos números negativos, o zero e os números positivos e é representado por letra $\mathbb{Z}$.
Exemplo:
$\mathbb{Z} = \{.....-6;\ -5;\ -4; -3;\ -2;\ -1;\ 0; +1;\ +2;\ +3; +4;\ +5; +6......\}$



2.1.1 Representação de números inteiros na recta graduada

Os números inteiros podem ser representados por pontos na recta graduada. Nesta representação, a distância entre dois números consecutivos é sempre a mesma e a sua ordem crescente é da esquerda para direita.



2.1.2 Números simétricos

Dois números que estejam representados na recta numérica e que se encontrem à mesma distância da origem dizem-se simétricos.
Exemplos:
a) O número zero é simétrico de si próprio
b) O número $-\mathbf{2}$ é simétrico de $+\mathbf{2}$;
c) O número $+\mathbf{1}$ é simétrico de $-\mathbf{1}$;
d) O número $-\mathbf{24}$ é simétrico de $+\mathbf{24}$;

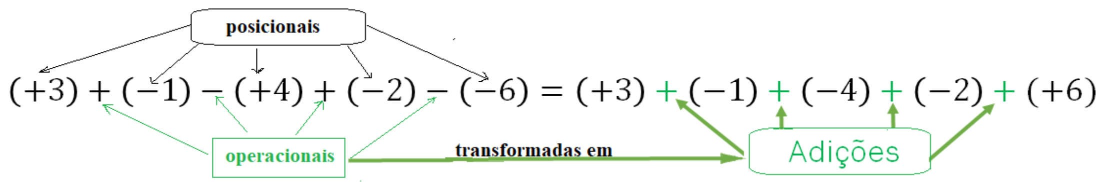
2.1.3 Módulo ou valor absoluto de um número

O valor absoluto, ou módulo de um número ***n***, é a distância desse número ao zero na recta graduada e representa-se por **|*n*|.**
Exemplos:
a) O valor absoluto de $\mathbf{2}$ é $\mathbf{2}$, isto é, $|+\mathbf{2}| = \mathbf{2}.$
b) O valor absoluto de $-\mathbf{4}$ é $\mathbf{4}$, isto é, $|-\mathbf{4}| = \mathbf{4}$.
Nota: Dois números simétricos têm mesmo valor absoluto.

2.1.4 Adição algébrica e simplificação da escrita em $\mathbb{Z}$

Adição algébrica refere-se às expressões numéricas em que aparecem adição e subtracção.

Em $\mathbb{Z}$, os sinais + e – têm duas interpretações: Como **sinais posicionais** que são colocadas entre os parêntesis e indicam a posição do número relativamente ao zero e como **sinais operacionais** que são



colocados entre os números e indicam as operações da adição e da subtracção.
Exemplo:
Para efectuar uma adição algébrica, primeiro converte-se todos **sinais operacionais** em **adição**, depois, se efectua a respectiva operação.

Exemplo:

Adição algébrica	Simplificação da escrita
$(+3)+(-1)-(+4)+(-2)-(-6)$ $=(+3)+(-1)+(-4)+(-2)+(+6)$ $=(+2)+(-4)+(-2)+(+6)$ $=(-2)+(-2)+(+6)$ $=(-4)+(+6)$ $=(+2)$	(+3)+(-1)-(+4)+(-2)-(-6) = 3-1-4-2+6 = 2-4-2+6 = -2-2+6 = -4+6 = 2 • Dois sinais contrários dão origem a um só sinal " – ". • Dois sinais iguais dão origem a um só sinal " + ".

Nota:
- Se uma expressão tiver um parêntese precedido do sinal " **+** ", suprime-se o sinal e o parêntese, mantendo-se os sinais das parcelas no interior de parêntese.

Exemplo:
$9+(-5+4-3)=9\mathbf{-5+4-3}=4+4-3=8-3=5$
- Se uma expressão tiver um parêntese precedido do sinal " **−** ", suprime-se o sinal e o parêntesis, trocando-se todos os sinais do interior deste.

Exemplo:
$-10-(-9+4-2)=-10\mathbf{+9-4+2}=-1-4+2=-5+2=-3$

2.1.5 Expressões numéricas envolvendo todas as operações em $\mathbb{Z}$

Expressões numéricas são expressões que envolvem operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão, incluindo parênteses.

Exemplo:
$$5-\{4+[18\div 3-4\times(6-2)+5]\}$$

Ordem das operações numa expressão numérica
- **Primeiro:** efectuar todas as operações dentro dos parênteses curvos ( );

- **Segundo:** efectuar todas as operações dentro dos parênteses rectos [ ] ;
- **Terceiro**: efectuar todas as operações dentro das chavetas { }.

No que diz respeito à adição, subtracção, multiplicação e divisão, prioriza-se as multiplicações e as divisões e no fim as adições e as subtracções.

Exemplo:
Considera a expressão dada: $5 - \{4 + [18 \div 3 - 4 \times (6 - 2) + 5]\}$
Para resolvê-la, segue-se os seguintes passos:

$5 - \{4 + [18 \div 3 - 4 \times (6 - 2) + 5]\} =$ $= 5 - [4 + (18 \div 3 - 4 \times 4 + 5)]$	**1º Passo:** Efectua-se o que está dentro de parentes curvos $(6 - 2)$
$= 5 - (4 + 6 - 16 + 5)$	**2º Passo:** efectua-se a divisão $(18 \div 3)$ e multiplicação (4×4). Nota que chavetas tornaram parênteses rectos e parênteses rectos em curvos.
$= 5 - 4 - 6 + 16 - 5$	**3º Passo:** Desembaraça-se os parentes curvos
$= 1 - 6 + 16 - 5$ $= -5 + 16 - 5$ $= 11 - 5$ $= 6$	**4º Passo:** Efectua-se as operações, seguindo a ordem em que aparecem.

Exercícios resolvidos

1. Considera o conjunto $A = \left\{-3; -1; 0; \frac{1}{2}; 3; 7\right\}$. Indica, dos elementos de A, os que são:

Pergunta	Resposta
a) Números naturais;	$\{0; 7\}$
b) Números inteiros relativos;	$\{-3; -1; 0; 7\}$
c) Números inteiros negativos.	$\{-3; -1\}$

2. Efectua:

a) $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ — Negativo que precede parênteses muda o sinal do que está dentro de parenteses para seu simétrico, ou seja, menos com menos é mais.

b) $4 - (+2) = 4 - 2 = 2$ — Repete-se a regra aplicada na alínea a.

c) $-7 - (-3) = -7 + 3 = -4$ — Repete-se a regra aplicada na alínea a.

d) $-5 - (-5) = -5 + 5 = 0$ — Repete-se a regra aplicada na alínea a.

3. Efectua as seguintes expressões:

Expressão	Resolução
a) $[(-4) \times (-5) + 8 \div 2 - 12] =$	$[(-4) \times (-5) + 8 \div 2 - 12] =$ $= (20 + 4 - 12)$ $= 24 - 12$ $= 12$
b) $3 - \{2 + [6 \div 3 - 2 \times (9 - 2) + 3]\} =$	$3 - \{2 + [6 \div 3 - 2 \times (9 - 2) + 3]\} =$ $= 3 - [2 + (2 - 2 \times 7) + 3]$ $= 3 - (2 + 2 - 14) + 3$

	$= 3 - 2 - 2 + 14 + 3$ $= 1 - 2 + 14 + 3$ $= -1 + 14 + 3$ $= 13 + 3$ $= 16$

Exercícios de aplicação-Parte I

1. Indica com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas:

a) $+3 \in Z$ _____ b) $-2 \in Z$____ c) $0 \in Z$ ______

d) $Z^+ \cup Z_0^- = Z$____ e) $Z \cap Z_0^+ = IN$___ f) $\left\{-5, \frac{1}{2}\right\} \subset Z$___

2. Completa os espaços em branco, de modo a obteres proposições verdadeiras:

a) | _____ | = |-12| b) | +5 | =______ c) | +12 | = ______ d) $|-2016|$= ______

3. Completa com os símbolos $>, <, =$ de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a) | +3 |_____| -5 | c) | +12 |_____| - 12 | e) +2 ______ 0 g) +5 _____|+5|

b) | +6 |_____| +2 | d) | -12 |_____ 6 f) (-5) _____ 0 h) -3________-3

4. Disponha por ordem crescente os elementos dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(-5); (+6); (+2); 0; (-3); (+1)\}$

b) $B = \{(+2); (-5); 0; (-4); (+6); (-8); (+10)\}$

5. Calcula as seguintes somas algébricas:

a) $(+5) + (-3) - (-5) - (+9) + (-2)$

b) $(-8) + (-9) - (-10)$

c) $(-14) + (-8) - (-9)$

d) $(-8) - (+7) + (-5) + (20)$

e) $(-8) - (+7) + (-5) - (20)$

f) $(-15) - (+7) - (-9) + (-13)$

g) $(+325) + (-125) + (-455) + (+335)$

h) $(+1980) + (-1945) - (+30)$

6.Calcula o valor numérico de cada uma das seguintes expressões:

a) $6 \div (-2) + 1$

b) $[8 \div (-4) - (-7)]$

c) $40 - [(-25) \div (-5)]$

d) $\{5 - [18 \div 6 + (-28) \div (-4)]\}$

e) $\{[7 - (-54) \div (-9)] + 2\}$

f) $\{-3 - [(-4) \cdot (-5) + 8 \cdot (+2) - 6]\}$

2.2 Conjunto dos números racionais

2.2.1 Noção de número racional

Número Racional é todo aquele que pode ser escrito sob forma de fracção de termos inteiros com denominador diferente de zero.

Conjunto de números racionais é o conjunto formado pelos números fraccionários que podem ser reduzidos a forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, em que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Este conjunto é formado pelos números inteiros relativos incluindo as fracções de termos inteiros e é representado pela letra $\mathbb{Q}$.

Simbolicamente escreve-se:

$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\right\}$ ou $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{fracções\ de\ termos\ inteiros\}$

Exemplo:

$\left\{-5;\ -\frac{3}{4};\ 0;\ \frac{1}{2};2;\ \frac{5}{2}\right\}$

Constituem subconjuntos de $\mathbb{Q}$ os seguintes conjuntos: $\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$; $\mathbb{Q}_0^+$; $\mathbb{Q}_0^-$.

Subconjuntos de $\mathbb{Q}$	**Exemplos:**
$\mathbb{Q}^+$ Conjunto dos números racionais positivos;	$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{5}{2}; \ldots\right\}$
$\mathbb{Q}^-$ Conjunto dos números racionais negativos;	$\mathbb{Q}^- = \left\{-5; -\frac{3}{4}; \ldots\right\}$
$\mathbb{Q}_0^+$ Conjunto dos números racionais não negativos;	$\mathbb{Q}_0^+ = \left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{5}{2}; \ldots\right\}$
$\mathbb{Q}_0^-$ Conjunto dos números racionais não positivos.	$\mathbb{Q}_0^- = \left\{-5; -\frac{3}{4}; 0; \ldots\right\}$

São também subconjuntos do conjunto dos números racionais o conjunto dos números naturais **($\mathbb{N}$),** o conjunto dos números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$) incluindo os seus subconjuntos.

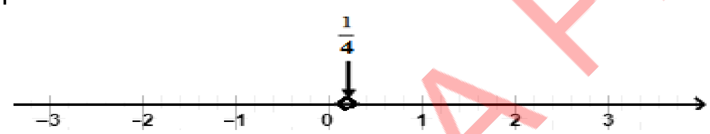
2.2.2 Representação de números racionais na recta graduada

Na 7ª classe vimos como fazer a representação dos números inteiros na recta graduada. Agora vamos representar números fraccionários na recta graduada, uma vez que todos os elementos do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, podem ser escritos na forma de fracção.

Exemplo:

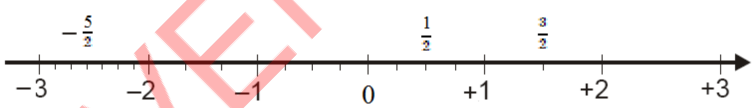
Considera a fracção $\frac{1}{4}$ onde deve ficar?

Sabemos que esta fracção pode ser também representada na forma decimal por $0{,}25$. Portanto na recta graduada $\frac{1}{4} = 0{,}25$ que corresponde a quarta parte de 1. Assim $\frac{1}{4} = 0{,}25$ deve ficar na primeira quarta parte entre 0 e 1.



2.2.3 Relações entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

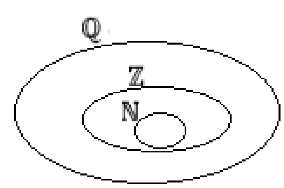
Observa a representação de números racionais , -3; $-\frac{5}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 2, na recta graduada



Olhando para a recta graduada, nota-se que nela estão representados números naturais, números inteiros e números racionais. Assim sendo, pode-se afirmar que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Simbolicamente escreve-se:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ lê-se $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{Q}$ ou

$\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ lê-se $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ contém $\mathbb{N}$.



Exemplo:

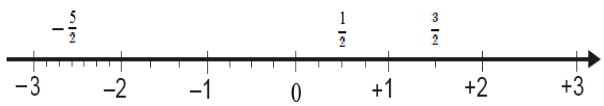
$-\mathbf{2}$ é inteiro e é racional, mas $\frac{3}{2}$ é racional e não é inteiro.

2.2.4 Comparação de números racionais

Para comparar números racionais basta representá-los numa recta graduada e verificar qual deles se situa mais à direita do outro.

Exemplo:

Compara as fracções: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$



Logo, podemos afirmar que $-\frac{5}{2} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

Nota:

- Qualquer número negativo é menor do que um número positivo;
- Zero é maior do que qualquer número negativo;
- Zero é menor do que qualquer número positivo;
- Para comparar números racionais, é importante:
  1. Verificar se os números são positivos ou negativos, isto é, se os pontos que os representam na recta graduada se situam mais para a direita ou para a esquerda da origem (zero).
  2. Verificar se as fracções têm denominadores diferentes. Caso tenham, antes de compará-las deve-se reduzir as fracções dadas ao mesmo denominador.

Exemplos:

Compara os seguintes números racionais.

a) $\frac{5}{3}$ e $-\frac{7}{3}$

Na comparação de duas fracções com mesmo denominador, é maior a fracção que tiver maior numerador. Porém como $-\frac{7}{3}$ tem sinal negativo, $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ é maior que $-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$. $\left(\frac{5}{3} > -\frac{7}{3}\right)$

b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

As fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ tem denominadores diferentes, assim, primeiro devemos reduzir ao mesmo denominador e de seguida comparar.

$\underset{(3)}{\frac{1}{2}}\ \ \underset{(2)}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$ logo $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$

2.2.6 Operações em $\mathbb{Q}$

2.2.6.1. Adição e Subtracção em $\mathbb{Q}$

Para adicionar ou subtrair números racionais procede-se da mesma forma que se operam os números inteiros.

Exemplos:

Calcula

a) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{(-7)+2}{3}=-\frac{5}{3}$

b) $\frac{10}{4}-\frac{6}{4}=\frac{10-6}{4}=\frac{4}{4}=1$

c) $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\underset{(3)}{\frac{1}{2}}+\underset{(2)}{\frac{4}{3}}=\frac{3+8}{6}=\frac{11}{6}$

d) $\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\underset{(4)}{\frac{2}{3}}+\underset{(3)}{\frac{1}{4}}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$

e) $-3+(-1{,}3)=-3-1{,}3=-4{,}3$

f) $-2{,}5+\frac{42}{10}=-2{,}5+4{,}2=1{,}7$

Propriedades da adição em $\mathbb{Q}$

As propriedades de adição em $\mathbb{Q}$ são as mesmas aplicadas em $\mathbb{Z}$.

Propriedade	**Exemplo.**
Propriedade comutativa da adição Para quaisquer dois números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$**,** tem-se: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$	• $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4+2}{5}=\frac{6}{5}$ ou $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$ • $4{,}3+2{,}7=7{,}0$ ou $2{,}7+4{,}3=7{,}0$
Propriedade associativa da adição Para quaisquer números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Q}$, tem-se: $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$	• $\frac{7}{2}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\left(\frac{\mathbf{7+5}}{\mathbf{2}}\right)+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$ • $\frac{7}{2}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}+\left(\frac{5+3}{2}\right)=\frac{7}{2}+\frac{8}{2}=\frac{15}{2}$
Existência do elemento neutro da adição Para qualquer número $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$, tem-se: $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$	• $\frac{4}{5}+\mathbf{0}=\frac{4}{5}$ • $(-0{,}68)+\mathbf{0}=(-0{,}68)$
Existência do elemento simétrico Dado um número $\boldsymbol{a}$**,** não nulo, existe um único **número simétrico de** $\boldsymbol{a}$, que é $-\boldsymbol{a}$, tal que: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$	• $\frac{7}{10}+\left(-\frac{7}{10}\right)=\left(-\frac{7}{10}\right)+\frac{7}{10}=0$ • $(-0{,}15)+0{,}15=0{,}15+(-0{,}15)=0$

2.2.6.2 Adição algébrica e simplificação da escrita

Uma adição algébrica é uma expressão constituída por adições e subtracções.

Exemplo:

$\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)=$

Para determinar o valor numérico de uma expressão algébrica, primeiro temos que transformar a expressão numa outra, de adição sucessiva, obedecendo as regras dos sinais.

Exemplo:

$$\left(+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)+\left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)-\left(+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)=\left(+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)+\left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)+\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)=\frac{\mathbf{3-5-1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{-2-1}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}$$

2.2.6.3 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

As regras indicadas para a multiplicação de números inteiros ($\mathbb{Z}$) aplicam-se, também, para a multiplicação de números racionais ($\mathbb{Q}$). O produto entre dois números racionais será:

- **Positivo -** se ambos os números forem positivos ou se ambos os números forem negativos **(mesmo sinal).**

Exemplos:
Calcula

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)\times\left(+\frac{3}{4}\right)=\frac{(+2)\times(+3)}{(+3)\times(+4)}=+\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

b) $(+2{,}1)\times(+4{,}2)=+8{,}82$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{(-3)\times(-7)}{(+2)\times(+4)}=+\frac{21}{8}$

d) $(-3)\times(-1{,}7)=+5{,}1$

- **Negativo -** se um dos números for negativo e o outro número for positivo (**sinais contrários**).

Exemplos:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{(-1)\times(+3)}{(+3)\times(+2)}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

b) $(-2)\times\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

c) $3\times\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{(+3)\times(-1)}{(+1)\times(+7)}=-\frac{3}{7}$

d) $(-0{,}8)\times(+1{,}7)=-1{,}36$

2.2.6.4 Propriedades da multiplicação em $\mathbb{Q}$

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ goza das mesmas propriedades da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Propriedade	**Exemplos:**
Comutativa da multiplicação Para quaisquer dois números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}\in\mathbb{Q}$: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$	• $\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{3}{10}$ • $4\times(-3{,}1)=(-3{,}1)\times 4=12{,}4$
Associativa da multiplicação Para quaisquer números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}\in\mathbb{Q}$: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$	• $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\times 6\right]\times\frac{5}{7}=\left(-\frac{12}{5}\right)\times\frac{5}{7}=-\frac{12}{7}$ • $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left[6\times\frac{5}{7}\right]=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{30}{7}=-\frac{60}{35}=-\frac{12}{7}$
Existência do elemento neutro da multiplicação: $\boldsymbol{a}\times\mathbf{1}=\mathbf{1}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ para qualquer número $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Q}$:	• $\frac{6}{11}\times 1=1\times\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$ • $(-5{,}37)\times 1=1\times(-5{,}37)=-5{,}37$
Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e em relação à subtracção • $\frac{3}{7}\times\left[\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}\right]=\frac{3}{7}\times\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}=\left(-\frac{6}{35}\right)+\frac{12}{35}=-\frac{6}{35}$ Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição • $\frac{2}{9}\times\left[\left(-\frac{1}{6}\right)-\frac{4}{6}\right]=\frac{2}{9}\times\left(-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{9}\times\left(-\frac{4}{6}\right)=\left(-\frac{2}{54}\right)-\left(-\frac{8}{54}\right)=-\frac{2}{54}+\frac{8}{54}=\frac{6}{54}=\frac{1}{9}$ Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção	

Além destas propriedades, na multiplicação existe outras propriedades designadas por:

Propriedade	**Exemplos:**
Existência do elemento absorvente $\boldsymbol{a}\times 0=0\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ para qualquer número $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Q}$.	• $\left(-\frac{5}{13}\right)\times 0=0\times\left(-\frac{6}{11}\right)=0$ • $(-5{,}37)\times 0=0\times(-5{,}37)=0$
Existência do elemento oposto ou inverso $\boldsymbol{a}\times\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}=\mathbf{1}$ para qualquer número, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Q}$, excluindo 0.	• $\left(-\frac{12}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{12}\right)=1$ • $(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

NOTA:
Todos os números racionais diferentes de zero têm o oposto multiplicativo (inverso ou recíproco).
A multiplicação de um número racional pelo seu inverso, é sempre igual a 1.

2.2.6.5 Divisão em $\mathbb{Q}$

Para dividir dois números racionais, multiplica-se o dividendo pela fracção inversa do divisor.
Exemplos:

a) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1\times5}{2\times3} = \frac{5}{6}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{(-3)\times(-5)}{(+2)\times(+4)} = +\frac{15}{8}$

c) $(-3) \div \left(-\frac{2}{7}\right) = (-3) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{(-3)\times(-7)}{1\times(+2)} = +\frac{21}{2}$

d) $\frac{1}{2} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{(+1)\times(-5)}{(+2)\times(+3)} = -\frac{5}{6}$

NOTA:
Como a divisão se transforma em multiplicação as regras dos sinais são as mesmas da multiplicação.
A divisão por zero só existe quando o zero é dividendo e quando é divisor não é possível porque não existe o inverso de zero.

Exemplos:

a) $0 \div 3 = 0 \times \frac{1}{3} = 0$

b) $\frac{3}{0} = 3 \div 0 = 3 \times \text{inverso de zero que não existe}$. Logo $3 \div 0$ é impossível.

2.2.6.6 Expressões numéricas em $\mathbb{Q}$

As regras indicadas para resolver expressões numéricas em $\mathbb{Z}$ são válidas em $\mathbb{Q}$.
Exemplo:
Calcula o valor numérico da seguinte expressão: $5 - \left\{0,5 + \left[6 - 4 \times \left(2^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\}$
Para calcular o valor numérico da expressão acima dada segue-se os seguintes passos:

$5 - \left\{0,5 + \left[6 - 4 \times \left(2^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\} =$ $= 5 - \left\{0,5 + \left[6 - 4 \times \left(\underset{(2)}{4} - \underset{(1)}{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\}$	**1º Passo**: resolve-se o que está dentro de parênteses curvos$\left(2^2 - \frac{1}{2}\right)$. E dentro de parenteses prioriza se a potência $2^2 = 4$.
$= 5 - \left\{0,5 + \left[6 - 4 \times \left(\frac{8-1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\}$ $= 5 - \left[0,5 + \left(6 - 4 \times \frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right)\right]$ $= 5 - \left[0,5 + \left(6 - \frac{28}{2} - \frac{1}{3}\right)\right]$ $= 5 - \left[0,5 + \left(6 - 14 - \frac{1}{3}\right)\right]$	**2º Passo:** Os parênteses curvos desapareceram e os parênteses rectos transformaram-se em curvos as chavetas em parênteses rectos. Resolve-se o que está dentro de parênteses curvos, dando prioridade à multiplicação. Calcular o *m.m.c* para reduzir as fracções ao mesmo denominador
$= 5 - \left[0,5 + \left(\underset{(3)}{\frac{6}{1}} - \underset{(3)}{\frac{14}{1}} - \underset{(1)}{\frac{1}{3}}\right)\right]$ $= 5 - \left[0,5 + \left(\frac{18 - 42 - 1}{3}\right)\right]$	**3º Passo:** Resolve-se o que está dentro de parênteses rectos, reduzindo, antes, as fracções ao mesmo denominador
$= 5 - \left[0,5 + \left(-\frac{25}{3}\right)\right]$ $= 5 - \left[\underset{(3)}{\frac{5}{10}} + \left(-\underset{(10)}{\frac{25}{3}}\right)\right]$	**4º Passo:** os parênteses rectos transformaram-se em curvos e efectua-se a operação. Neste caso é subtracção.

$= 5 - \left[\frac{15 + (-250)}{30}\right]$ $= 5 - \left(-\frac{235}{30}\right)$ $= \underset{(30)}{\frac{5}{1}} - \left(-\underset{(1)}{\frac{235}{30}}\right)$ $= \frac{150}{30} - \left(-\frac{235}{30}\right)$ $= \frac{385}{30} = \frac{77}{6}$	

Exercícios resolvidos

1. Efectua as seguintes operações em $\mathbb{Q}$.

Operação	Resolução
a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$	a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \underset{(3)}{\frac{3}{4}} + \underset{(4)}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9+4}{12} = \frac{13}{12}$
b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$	b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \underset{(1)}{\frac{1}{4}} - \underset{(2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$
a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}$	c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + (\frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{9}{2}$

2. Calcula o valor numérico das seguintes expressões:

Expressão	Resolução
a) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$	$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6} - \frac{2}{9} = \frac{6-4}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$
b) $\frac{2}{3} \div \frac{2}{7}$	$\frac{2}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{3}$
c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} - \frac{2}{9} = \frac{6-4}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$
d) $0{,}5 \times (0{,}3 - 0{,}4)$	$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{10} - \frac{4}{10}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{1 \times 1}{2 \times 10} = -\frac{1}{20}$
e) $1{,}5 \div 0{,}2$	$\frac{15}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{15}{10} \times \frac{10}{2} = \frac{15}{2}$

Exercícios de aplicação - Parte II

1. Efectua as operações seguintes:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{3}$

c) $(-\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{3})$

d) $2 + \frac{1}{3}$

e) $0{,}25 + \frac{1}{2}$

f) $\frac{3}{5} + 2{,}5$

2. Efectua as seguintes operações, aplicando as propriedades.

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}$

d) $0{,}25+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

e) $-\frac{3}{5}-\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{15}\right)$

f) $\left[0{,}4+(-0{,}5)+\left(\frac{6}{10}\right)\right]+\left[\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)\right]$

3. Calcula o valor das expressões numéricas seguintes:

a) $\frac{1}{3}\times 4+\frac{2}{3}$

b) $9\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\div\frac{2}{4}$

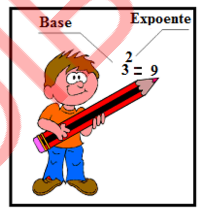
d) $\frac{2}{5}+\frac{6}{4}\div\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\times\frac{8}{10}$

e) $\frac{3}{4}\div\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}$

f) $\frac{9}{4}+\left(\frac{1}{3}+2\frac{1}{5}\div\frac{11}{10}\right)-\frac{9}{4}\times\frac{6}{3}$

2.1.7 Potenciação em $\mathbb{Q}$

2.1.7.1 Revisão de potências



Potência é produto de factores iguais.

Exemplos:

a) $3^2 = 3\times 3 = 9$

b) $(0{,}2)^3 = 0{,}2\times 0{,}2\times 0{,}2 = 0{,}008$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

O valor de uma potência em $\mathbb{Q}$ depende do expoente.

- Se uma potência em $\mathbb{Q}$, tiver base negativa e expoente **par**, o valor da potência será **positivo**

Exemplos:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{81}{256}$

- Se uma potência em $\mathbb{Q}$ tiver base negativa e expoente **ímpar**, o valor da potência será **negativo**, isto é, terá o sinal da base**.**

Exemplos:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{243}$

2.2.7.2 Adição e subtracção com potências de base racional e expoente natural

Na adição e subtracção de potências, primeiro calcula-se o valor de cada potência e em seguida a adição ou subtracção.

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{4+1}{9} = \frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}-\frac{1}{4} = \frac{27\times 1}{8\times 1}-\frac{1\times 2}{4\times 2} = \frac{25}{8}$

2.2.7.3 Potência de base positiva e expoente inteiro (positivo, negativo e zero)

Base racional e expoente positivo

Quando a base for um número racional positivo e o expoente for inteiro positivo, o valor da potência será positivo. Simbolicamente escreve-se:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{+n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\ldots\times\frac{a}{b}}_{\text{n factores}}$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

b) $2^{+4}=2^{4}=2\times2\times2\times2$
$=16$

c) $(0{,}3)^{3}=0{,}3\times0{,}3\times0{,}3$
$=0{,}027$

2.2.7.4 Base racional e expoente negativo

Uma potência de base racional e o expoente negativo é igual a potência de expoente simétrico e a base é o número inverso da base da potência dada. Isto é, a base será a troca de numerador com denominador, e o expoente passa a ser positivo. Simbolicamente teremos:

$\boldsymbol{I.\ a^{-n}=\frac{1}{a^{n}};\ a\neq0}$

Exemplos:

a) $3^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

c) $(0{,}2)^{-3}=\left(\frac{1}{0{,}2}\right)^{3}=\frac{1}{0{,}2}\times\frac{1}{0{,}2}\times\frac{1}{0{,}2}=\frac{1}{0{,}008}$

II. $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{+n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n};\ a\neq0\ \text{e}\ b\neq0}$

Exemplos:

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{1}\right)^{4}=3^{4}=3\times3\times3\times3=81$

2.2.7.5 Base racional e expoente zero

Uma potência de base racional e o expoente 0, o valor da potência é sempre igual a 1.

Simbolicamente escreve-se: $\boldsymbol{a^{0}}=1;\ \boldsymbol{a\neq0}$

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{0}=1$ **b)** $(0{,}2024)^{0}=1$ **c)** $\left(-\frac{5}{23}\right)^{0}=1$

2.2.7.4 Regras de operações com potências de base racionais e expoente natural

Multiplicação	**Divisão**
Potências com a mesma base e expoentes diferentes Mantém-se a mesma base e adicionam-se ou subtraem-se os expoentes.	
Multiplicação: $\boldsymbol{a^{n}\times a^{m}=a^{n+m}}$	**Divisão:** $\boldsymbol{a^{n}\div a^{m}=a^{n-m}}$
Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$	**Exemplo:** $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\div\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$
Potências com mesmo expoente e bases diferentes Mantém-se o mesmo o expoente e multiplicam-se ou dividem-se as bases	
Multiplicação: $\boldsymbol{a^{m}\times b^{m}=(a\times b)^{m}}$	**Divisão:** $\boldsymbol{a^{m}\div b^{m}=(a\div b)^{m}}$
Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2\times1}{3\times3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{9}\right)^{3}$ $=\frac{8}{729}$	**Exemplo:** $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\div\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\div\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}\right)^{3}=2^{3}=8$

2.2.7.5 Notação científica

Notação Científica é uma forma de escrever números racionais de forma mais simplificada, usando potências de base dez (10).

Simbolicamente, um número em notação científica apresenta o seguinte formato:

$\boxed{\mathbf{N \times 10^n}}$ **N é** um **número racional** maior ou igual a 1 e menor que 10
$\boldsymbol{n}$ **é** um **número inteiro.**

Como se transforma um número em notação científica?

1º Passo: Escrever o número na forma decimal, com apenas um algarismo diferente de 0 a frente da vírgula;

2º Passo: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivermos que "deslocar" com a vírgula. Se ao deslocar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo;

3º Passo: Escrever o produto do número pela potência de 10.

Exemplos:

a) $30000 = 3 \times 10\,000 = 3 \times 10^4$

b) $0{,}0002 = 2 \times \frac{1}{10000} = 2 \times \frac{1}{10^4} = 2 \times 10^{-4}$

c) $202400000 = 2{,}024 \times 10^8$

d) $0{,}0000032 = 3{,}2 \times 10^{-6}$

NOTA:

a) $10^2 = 10 \times 10 = 100$

b) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

c) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$

d) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}001$

2.2.7.6 Raiz quadrada em $\mathbb{Q}$

Raiz quadrada de um número racional perfeito não negativo

Determinar raiz quadrada é efectuar uma operação inversa de determinar potência com expoente 2. Ao calcularmos a raiz quadrada de um número $\boldsymbol{a}$, queremos descobrir qual é o número $\boldsymbol{b}$ que elevado ao quadrado é igual a $\boldsymbol{a}$.

Simbolicamente: $\sqrt{a} = b \quad pois\ b^2 = a$; $\boldsymbol{a}$ –-- Radicando; $\boldsymbol{b}$--- Raiz e $\sqrt{\ }$ **-** Símbolo de radical

Exemplos:

a) $\sqrt{16} = 4$ pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ pois $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

c) $\sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3$ pois $1{,}3^2 = 1{,}69$

Exercícios resolvidos

1. Calcula o valor de cada potência

Potência		Resolução	Potência		Resolução
a)	$\left(\frac{1}{2}\right)^{+4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	d)	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
b)	3^3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$	e)	$(0{,}4)^{-3}$	$\left(\frac{1}{0{,}4}\right)^3 = \frac{1}{0{,}4} \times \frac{1}{0{,}4} \times \frac{1}{0{,}4} = \frac{1}{0{,}064}$
c)	$(0{,}4)^3$	$0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064$			

2. Efectua as seguintes operações

Operação	Resolução
a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{+2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{+3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5}$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{5} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$
c) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times(-3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^{6}$

Operação	Resolução
d) $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{+4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times 3^4 = \left(\frac{1}{2} \times 3\right)^{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$

Exercícios de aplicação- Parte III

1. O valor da expressão $(-1)^0 + (-6) : (-2) - 2^4$ é:

a) 20 b) -12 c) 19,5 d) 12

2. Simplificando a expressão $[2^9 \div (2^2 \cdot 2)^3]^{-3}$, obtém-se:

a) 2^{36} b) 2^{-30} c) 2^{-6} d) 1

3. Todo número inteiro x elevado a 1 é igual a:

a) Ele mesmo x b) 0 c) 1 d) 10

4. Calcula o valor numérico das seguintes expressões:

a) $5 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$ b) $(-7)^2 - 60$ c) $(-4)^2 + (-2)^4$

d) $\frac{3}{4} - (+7)^2$ e) $40 - (-2)^3$ f) $(-3)^2 + (-2)^3$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + (-5)^2$ h) $(-2)^5 + 21$ i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 - 7^0$

5. Aplicando as regras de potenciação, calcula:

a) $\frac{(-2)^5 \div (-2)^4 \times (-2)^7}{(2^2)^4}$ b) $(-1)^0 + (-6) \div (-2) - 2^4$ c) $[2^9 \div (2^2 \times 2)^3]^{-3}$

d) $2 \times [(-1)^6]^0 - [(-2)^0]^5$ e) $\left[\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2\right]^4 \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-8}$ f) $\frac{4^2}{\left[8^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0\right]}$

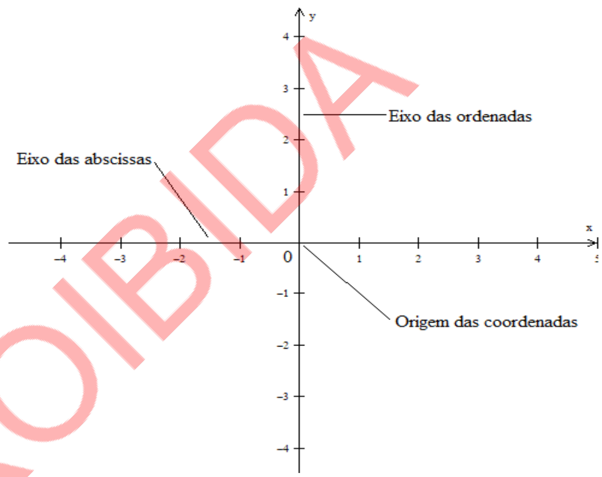
6. Determina:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{16}$ d) $\sqrt{0{,}04}$ e) $\sqrt{\frac{25}{49}}$

3. Funções Lineares

3.1.1 Coordenadas cartesianas- revisão

Considera-se sistema cartesiano ortogonal como sendo um conjunto de dois eixos perpendiculares, o eixo horizontal, chamado **eixo das abscissas (0x)**, o eixo vertical, chamado **eixo das ordenadas (0y)**. e a intersecção dos eixos é chamado de **origem das coordenadas**.



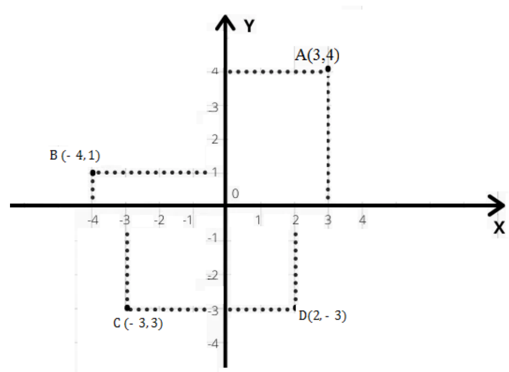
O sistema cartesiano ortogonal serve como ferramenta matemática para localização dos pontos no plano.

Um ponto qualquer, no Plano Cartesiano, é representado pelas suas coordenadas, formado por um par ordenado: a abscissa (x_p) e a ordenada (y_p). Assim, a notação de um ponto P é designado por: $P(x_p, y_p)$.

Exemplo:

Considera os pontos A, B, C e D representados no plano cartesiano ao lado.

- O ponto A, tem abcissa $x = 3$ e ordenada $y = 4$
- O ponto B, tem abcissa $x = -4$ e ordenada $y = 1$
- O ponto C, tem abcissa $x = -3$ e ordenada $y = -3$
- O ponto D, tem abcissa $x = 2$ e ordenada $y = -3$



3.1.2 Proporcionalidade directa

Uma grandeza $\boldsymbol{x}$ é directamente proporcional a uma grandeza $\boldsymbol{y}$ se existir um número $\boldsymbol{k}$ diferente de zero, de modo que: $\boldsymbol{x = k.y} \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$

Exemplo:

Peso das bananas em kg (x)	1	2	4
Custo em meticais (y)	20	40	80

Calculando a constante de proporcionalidade obtém-se:

$$k = \frac{x}{y} = \frac{1}{20} = \frac{2}{40} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$$

3.1.3 Proporcionalidade inversa

Duas variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são inversamente proporcionais se o produto entre elas for uma constante não nula. $\boldsymbol{x.y = k} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$

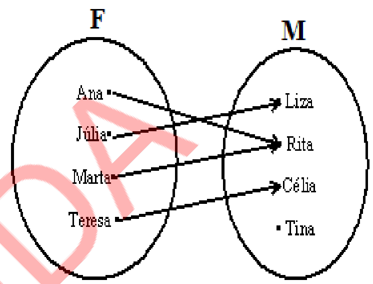
Exemplo:

Velocidade em Km/h (v)	5	10	30	60
Tempo em horas (t)	60	30	10	5

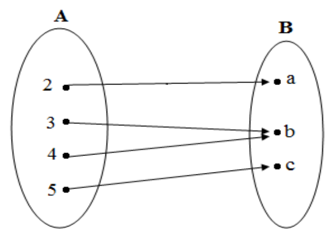
Calculando a constante de proporcionalidade obtém-se:
$k = x.y = 5 \times 60 = 10 \times 30 = 30 \times 10 = 60 \times 5 = 300$

3.2 Funções lineares

3.2.1 Definição do conceito de aplicação ou função como uma correspondência entre dois conjuntos



1. Considera os dois conjuntos representados por
$\mathbf{F} = \{\text{Ana; Júlia; Marta; Teresa}\}$ e $\boldsymbol{M} = \{\textbf{Liza; Rita; Célia; Tina}\}$
A relação de **F** para **M** é definida da seguinte forma:
"**F** é filha de **M**". Esta relação pode ser representada num **diagrama sagital** ou **diagrama de setas,** como mostra a seguir:
F é o conjunto de partida e **M** é o conjunto de chegada.
O conjunto $\{\textbf{Ana; Júlia; Marta; Teresa}\}$ é designado de **domínio da relação** e o conjunto $\{\textbf{Liza, Rita, Célia}\}$ é designado de **contradomínio da relação**.
Repara que as setas partem dos elementos do domínio e tem extremidades nos elementos do contradomínio.



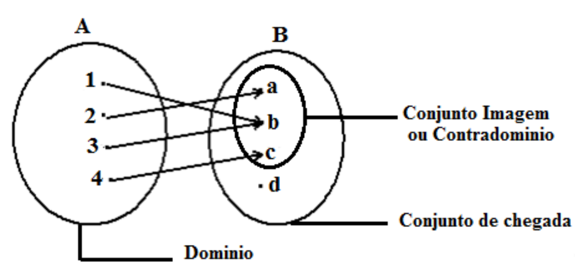
2. Considera, a seguir os conjuntos A e B representado ao lado:
Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se função (ou aplicação) de **A** em **B**, representada por $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, a qualquer relação que associa a cada elemento de **A**, um único elemento de **B**.
Portanto, para que uma relação de **A** em **B** seja uma função, exige-se que a cada elemento de **A** (objecto) esteja associado um único elemento de **B** (imagem).

3.2.2 Conceito de variável dependente e variável independente

Seja $\boldsymbol{x}$ os valores do domínio, e $\boldsymbol{y}$ os valores do contradomínio, pode-se ainda definir a função da seguinte maneira:
Se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma função de x.
A variável $\boldsymbol{x}$ é chamada **variável independente**.
O valor de $\boldsymbol{y}$, correspondente a determinado valor atribuído a $\boldsymbol{x}$ é chamado **imagem de $\boldsymbol{x}$** e é representado por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Portanto, a variável $\boldsymbol{y}$ é chamada **variável dependente**, porque $\boldsymbol{y}$ assume valores que dependem dos correspondentes valores de $\boldsymbol{x}$.

3.2.3 Domínio e conjunto imagem da função

Como já sabe, numa função podemos encontrar variável independente e variável dependente. Assim, o conjunto de valores que podem ser atribuídos a variável independente (x) é chamado **domínio da função** (Df), e o conjunto formado pelos valores que a variável dependente (y) assume é chamado **conjunto imagem da função** (Im) ou **contradomínio da função** $(D'f)$.



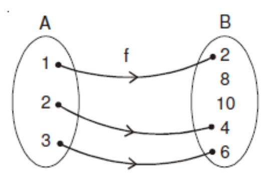
3.2.4 Classificação de funções ou aplicações

As funções ou aplicações podem ser classificadas em três tipos diferentes, dependendo do tipo de correspondência que se estabelece entre os elementos dos conjuntos: **Injectiva; Sobrejectiva e Bijectiva.**

1. Injectiva

Uma aplicação diz-se injectiva, se a cada elemento diferente do primeiro conjunto corresponde a um elemento diferente do segundo conjunto, independentemente de o contradomínio coincidir ou não com o conjunto de chegada.

Exemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

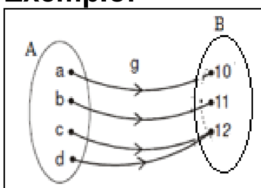
- O domínio da função é $Df = \{1, 2, 3\}$;
- O contradomínio é $D'f = \{2, 4, 6\}$;
- O conjunto de chegada é $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Nesta aplicação, cada elemento do domínio corresponde a um e um só elemento do contradomínio, esta aplicação é injectiva.</td>
</tr>
</table>

2. Sobrejectiva

Uma aplicação diz-se sobrejectiva se **o contradomínio da função coincidir com o conjunto de chegada**. Isto é, todos elementos do conjunto de chegada são imagens dos objectos do domínio.

Exemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

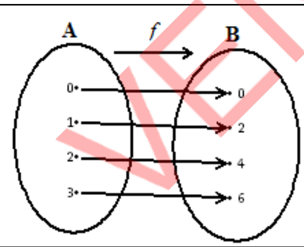
- O domínio da função é $Df = \{a, b, c, d\}$;
- O contradomínio é $D'f = \{10, 11, 12\}$;
- O conjunto de chegada é $B = \{10, 11, 12\}$;

Nesta aplicação, o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, logo é sobrejectiva</td>
</tr>
</table>

3. Bijectiva

Uma aplicação é bijectiva quando for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

- Os elementos distintos do conjunto A correspondem a imagens distintas do conjunto B. Logo, é uma **função ou aplicação injectiva;**
- O contradomínio coincide com o conjunto de chegada. Logo, é uma **função ou aplicação sobrejectiva**.

Por ter as duas classificações simultaneamente, diz-se que a aplicação é **bijectiva**.</td>
</tr>
</table>

3.2.5 Conceito de função linear

Chama-se função linear a toda função da forma $\boldsymbol{y = ax + b}$ com $a \neq 0$.

Exemplos:

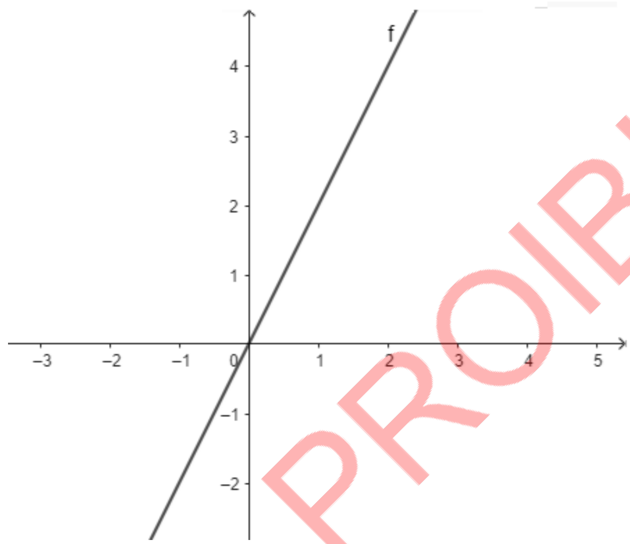
a)	$y = 2x$ com $a = 2$ e $b = 0$
b)	$y = x + 3$ com $a = 1$ e $b = 3$
c)	$y = -\frac{3}{2}x - 1$ com $a = -\frac{3}{2}$ e $b = -1$

3.2.5.1 Gráfico da função do tipo $y = ax$

Consideremos a função definida por $\boldsymbol{y = 2x}$, ou seja, $\boldsymbol{y}$ é dobro de $\boldsymbol{x}$. vamos organizar pares ordenados numa tabela obedecendo a esta lei "**$\boldsymbol{y}$ é dobro de $\boldsymbol{x}$**":

Variável independente (x)	-3	-2	-1	0	1	2	3
Variável independente (y)	-6	-4	-2	0	2	4	6

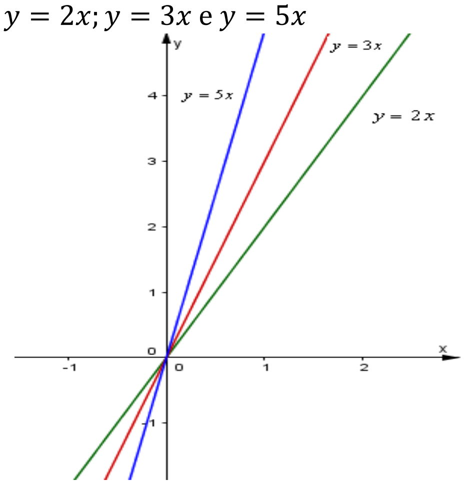
Marcando os pontos correspondentes aos pares ordenados da tabela acima, e unindo-os obtém-se o seguinte gráfico:



A função $\boldsymbol{y = 2x}$, tem as mesmas características das funções $\boldsymbol{y = 3x}$ e $\boldsymbol{y = 5x}$. As grandezas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são directamente proporcionais e o seu gráfico é uma recta que passa pela origem do S.C.O.

Vamos traçar no mesmo S.C.O os três gráficos das funções: $y = 2x; y = 3x$ e $y = 5x$

x	$y = 2x$	$y = 3x$	$y = 5x$
-3	-6	-9	-15
-2	-4	-6	-10
-1	-2	-3	-5
0	0	0	0
1	2	3	5
2	4	6	10
3	6	9	15



Os gráficos dessas funções são oblíquos e passam pela origem do S.C.O, isto é, pelas **coordenadas** (**0, 0**). Portanto, para toda função do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax}$ o gráfico é uma recta oblíqua que passa pela origem dos eixos (0, 0).

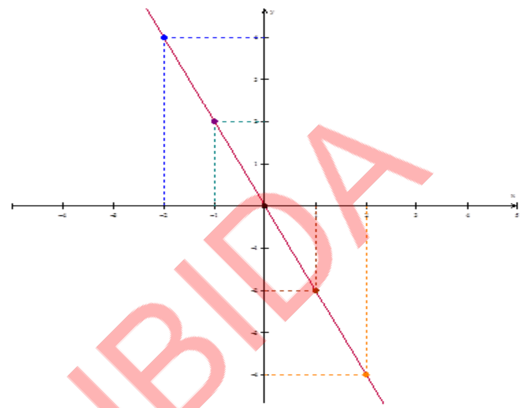
Nota:

Sempre que o **coeficiente de $\boldsymbol{x}$ for positivo** $(\boldsymbol{a > 0})$, a função será **crescente**, ou seja, se os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam, que é o caso dos gráficos a cima representados.

Por outro lado, sempre que o **coeficiente de $\boldsymbol{x}$ for negativo** ($\boldsymbol{a < 0}$), a função será **decrescente**, isto é, quanto maior for o valor de $\boldsymbol{x}$ menor será o valor de $\boldsymbol{y}$ e vice-versa.

Exemplo:
Considera a função $\boldsymbol{f(x) = -2x}$**.**

x	$f(x) = -2x$
- 2	$f(-2) = -2 \times (-2) = 4$
- 1	$f(-1) = -2 \times (-1) = 2$
0	$f(0) = -2 \times 0 = 0$
1	$f(1) = -2 \times 1 = -2$
2	$f(2) = -2 \times 2 = -4$



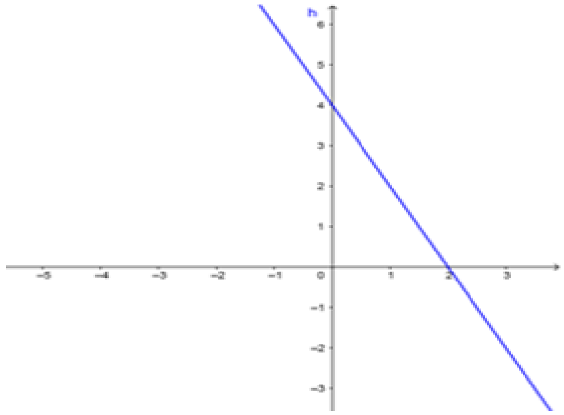
3.2.5.2 Gráfico da função do tipo $y = ax + b$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Considera a função $f(x) = -2x + 4$.
Para construir o gráfico desta função, podemos primeiro construir uma tabela que relaciona os elementos do domínio (x) e os do contradomínio (y ou $f(x)$).
Tabela da $f(x) = -2x + 4$.

x	$f(x) = -2x + 4$
- 2	$f(-2) = -2 \times (-2) + 4 = 4 + 4 = 8$
- 1	$f(-1) = -2 \times (-1) + 4 = 2 + 4 = 6$
0	$f(0) = -2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$
1	$f(1) = -2 \times 1 + 4 = -2 + 4 = 2$
2	$f(2) = -2 \times 2 + 4 = -4 + 4 = 0$

x	y
- 2	8
- 1	6
0	4
1	2
2	0

No S.C.O, marcamos os pares ordenados da tabela acima dada. Unindo os pontos definidos pelos pares da tabela acima, obtém-se o gráfico da função $f(x) = -2x + 4$.

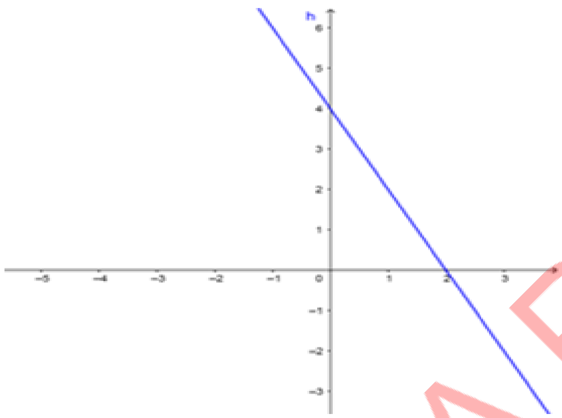


Podemos igualmente traçar o gráfico da mesma função $\boldsymbol{f(x) = -2x + 4}$, tendo dois pontos por onde o gráfico passa. Para facilitar vamos escolher os pares que têm uma das coordenadas nula, ou seja a ordenada na origem e o zero da função.

Para determinar a ordenada na origem fazemos $x = 0$ e calculamos $f(0) = -2 \times 0 + 4 = 4$, obtém-se $f(0) = y = 4$, este é a ordenada na origem.

O zero da função é o valor de $\boldsymbol{x}$ quando $y = 0$, ou seja $-2x + 4 = 0$. Resolvendo esta equação, obtém-se $\boldsymbol{x = 2}$, este é o zero da função.

Marcando os pontos encontrados $(0, 4)$ e $(2, 0)$ pode-se traçar a recta que passa por eles, obteremos o gráfico da função pretendida.



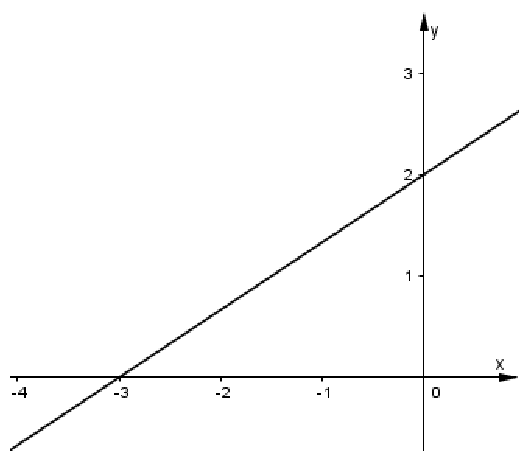
Nota:

- O ponto de intersecção entre o gráfico e o eixo $\boldsymbol{x}$, chama-se **zero da função**.
- O ponto de intersecção entre o gráfico e o eixo $\boldsymbol{y}$, chama-se **ordenada na origem**.
- Para toda função do tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$**,** o valor de $\boldsymbol{b}$ indica a ordenada na origem.

3.2.5.3 Determinação da expressão analítica da função $y = ax + b$ a partir do gráfico

Dado o gráfico a baixo, determina a expressão analítica correspondente.

Este gráfico, é de uma função linear pois, é uma recta, sendo assim, podemos dizer que ela é do tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$.



Para encontrar a sua expressão analítica, basta encontrar os valores dos coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Como já dissemos que o ponto da intersecção do gráfico com o eixo dos y indica a ordenada na origem, isto é: $\boldsymbol{b = 2.}$ Considerando ainda o ponto $(-3, 0)$, onde o gráfico intersecta o eixo dos $\boldsymbol{x}$ e substituindo na expressão $\boldsymbol{y = ax + b}$, obtém-se:

$0 = a(-3) + b$.

Como já sabemos que o valor de coeficiente $\boldsymbol{b}$ é 2, ou seja $b = 2$

$0 = a(-3) + 2$ isolando o coeficiente $\boldsymbol{a}$ teremos:

$a(-3) + 2 = 0 \Leftrightarrow -3a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$. O valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ é positivo, visto que o gráfico é crescente.

Voltando `a nossa expressão $y = ax + b$, agora é só substituir os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, obtém-se:

$y = \frac{2}{3}x + 2$ com $a = \frac{2}{3}$ e $b = 2$, assim, a expressão analítica do gráfico dado é: $\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$

No geral, para determinar a expressão analítica de um gráfico de uma função linear, segue-se os seguintes passos:

1º Passo: Identificar a ordenada na origem (coeficiente $\boldsymbol{b}$) a partir do gráfico,
2º Passo: Determinar o coeficiente $\boldsymbol{a}$, considerando um par ordenado por onde passa o gráfico, mas que não seja aquele que integra ordenada na origem da função,
3º Passo: substituir os valores de coeficiente $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ na expressão $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$.

Exercícios resolvidos

Seja dada a função $f(x) = x + 1$, de domínio $Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determina: O conjunto das imagens (valores da variável dependente $\boldsymbol{y}$)
Para determinar o conjunto imagem temos que fazer os seguintes cálculos:

- Para $x = 0 \to f(0) = 0 + 1 = 1$
- Para $x = 1 \to f(1) = 1 + 1 = 2$
- Para $x = 2 \to f(2) = 2 + 1 = 3$
- Para $x = 3 \to f(3) = 3 + 1 = 4$
- Para $x = 4 \to f(4) = 4 + 1 = 5$
- Para $x = 5 \to f(5) = 5 + 1 = 6$

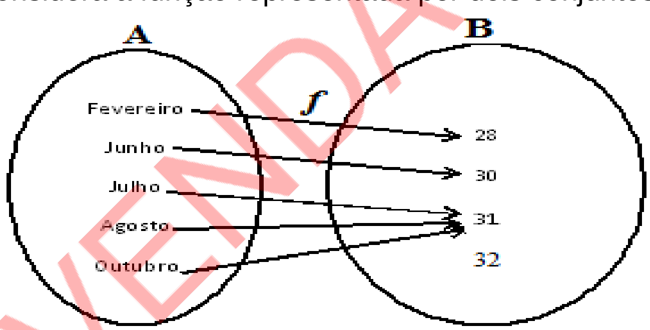
Organizando estes números numa tabela, obtém-se o seguinte:

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5	6

Assim, podemos afirmar que $Df = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $D'f = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exercícios de aplicação

1. Considera a função representada por dois conjuntos a seguir



a) Indica o domínio da função.
b) Indica o conjunto de chegada.
c) Indica o contradomínio da função.

2. Das funções a baixo, indica os valores do coeficiente $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
   a) $f(x) = 5x + \frac{1}{3}$ b) $g(x) = -3x - 2$ c) $h(x) = -\frac{2}{3}x + 5$

3. Considera as funções dadas por:

a) $y = -x + 3$ $b)\ y = 2x - 3$ $c)\ y = -3x$ $d)\ y = \frac{1}{2}x$

   i) Identifica as funções crescentes e as decrescentes. Justifique.
   ii) Esboça os gráficos das funções das alíneas c) e d).

4. Considera a função $y = -x + 3$, determina:
   a) A ordenada na origem;
   b) Zero da função;
   c) Faz a construção do gráfico.

4.1 Introdução de números reais

Como já vimos, os números racionais são todos aqueles que se podem representar na forma de fracção de termos inteiros $\frac{a}{b}$, onde b é um número inteiro diferente de zero e o conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$

Exemplos:

$-\frac{5}{2};\ \ -2;\ -\frac{5}{3};\ \ -1;\ \ 0;\ \ 1;\ \ \frac{5}{3};\ 2$

Existem outros números que não podem ser representados sob a forma de fracções de termos inteiros. Estes números são chamados ***irracionais***.

Exemplos:

$-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -0{,}245\ldots \sqrt{2}; \pi; e; \sqrt{5}; \ldots.$

Os **números irracionais** são todos os números que podem ser representados por dízimas infinitas não periódicas.

Exemplos:

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots$

b) $\boldsymbol{\pi = 3,141592654}$ ...(lê-se PI)

c) $\boldsymbol{e = 2,7182818828}$ ...(lê-se número de Neper)

O conjunto de números racionais com o conjunto de números irracionais formam um novo conjunto chamado ***conjunto dos números reais*** e representa-se por $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{números\ Irracionais\}$

lê-se "**reunião**"

Exemplo:

$$\mathbb{R} = \left\{\ldots; -\frac{100}{2}; -49,9; -3,(33); -\sqrt{62}; -10; -\sqrt{2}; -0,25; 0;\ +\frac{1}{2}; +1; +\sqrt{2}; \frac{\sqrt{16}}{2}; \pi \ldots\right\}.$$

conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e irracionais, o que significa que os conjuntos de números naturais, inteiros, racionais e irracionais estão contidos neste conjunto e, simbolicamente, escreve-se: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

O esquema ao lado traduz as relações entre o conjunto de números reais ($\mathbb{R}$) com outros conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

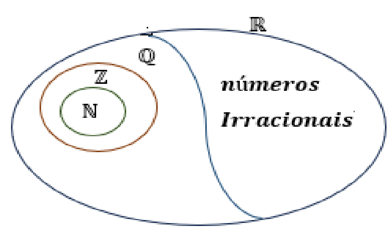
ou

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Lê-se "**está contido**"

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

lê-se "**contém**"



O conjunto $\mathbb{R}$ tem como subconjuntos:

Subconjuntos de $\mathbb{R}$	Exemplos:
$\mathbb{R}^- = \{\text{Números reais negativos}\}$	$\mathbb{R}^- = \left\{\ldots; -\frac{100}{2}; -3,(33); -\sqrt{2}; -1; \ldots\right\}$
$\mathbb{R}^+ = \{\text{Números reais positivos}\}$	$\mathbb{R}^+ = \left\{\ldots; +\frac{1}{2}; +1; +\sqrt{2}; \frac{\sqrt{16}}{2}; \pi \ldots\right\}$

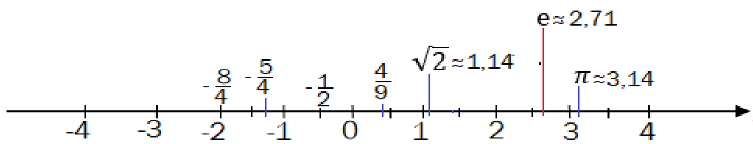
$\mathbb{R}_0^- = \{\text{Números reais não positivos}\}$	$\mathbb{R}_0^- = \{\dots; -3, (33); -\sqrt{2}; -0,25; 0\}$
$\mathbb{R}_0^+ = \{\text{Números reais não negativos}\}$	$\mathbb{R}_0^+ = \left\{0;\ +\frac{1}{2}; +1; +\sqrt{2}; \frac{\sqrt{16}}{2}; \pi \dots\right\}$

Assim:

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ $\qquad \mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ $\qquad \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\qquad \mathbb{R} = \mathbb{R}_0^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^-$

4.2 Representação de números reais na recta graduada

Tal como, a cada número racional podemos associar um só ponto sobre a recta numérica, também a cada número irracional corresponde a um só ponto na recta. Observe a seguir a representação dos números reais na recta graduada:



Repara que nesta recta numérica estão representados números inteiros, racionais e irracionais, por isso a recta graduada também é designado por **recta real** ou **eixo real** e é formada por infinitos pontos, onde cada um deles correspondente a um número racional ou a um número irracional.

Exercícios resolvidos

1. Identifica o tipo de dízima dos seguintes números reais e indica o período, se for o caso.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\sqrt{12}$ e) $\frac{2}{3}$

2. Do conjunto $A = \{-7;\ \sqrt{3};\ \frac{19}{12}; 0;\ \sqrt{5}; 4; \sqrt{49};\ \sqrt{87}\}$ Indica os elementos que são:

a) Irracionais b) Racionais c) Reais
d) Reais não positivos e) Reais negativos f) Reais não negativos

3. Usando cada um dos símbolos $\subset, \supset, \not\subset, \not\supset, \in$ ou $\notin$, completa as expressões de modo a obteres afirmações verdadeiras

a) $\mathbb{R}$__$\mathbb{Q}_0^-$ b) $\mathbb{Q}_0^+$__$\mathbb{R}_0^+$ c) $\mathbb{R}^-$__$\left\{-1; -\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $\mathbb{Z}_0^+$__$\mathbb{R}$
e) $+\sqrt{10}$__$\mathbb{R}^-$ f) $\mathbb{Q}_0^-$__$\mathbb{R}^+$ g) $-\frac{91}{4}$__$\mathbb{R}_0^+$ h) $-\sqrt{5}$__$\mathbb{R}^-$
i) π__$\mathbb{R}^-$ j) $\mathbb{N}$__$\mathbb{R}$ k) $|+5|$__ $\mathbb{R}_0^+$ l) -1000__$\mathbb{R}$

Resolução

1 a) $\frac{1}{5} = 0,2$ dízima finita b) $\sqrt{3} = 1,321$ ....dízima infinita não periódica

c) $\frac{5}{6} = 0,833 \dots$ dízima infinita periódica de período igual a 3

d) $\sqrt{12} = 3,4641 \dots$. dízima infinita não periódica

e) $\frac{2}{3} = 0,666 \dots$ dízima infinita periódica de período igual a 6

2 a) Irracionais: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{87}$

b) Racionais: -7; $\frac{19}{12}$; 0; 4; $\sqrt{49}$

c) Reais: -7; $\sqrt{3}$; $\frac{19}{12}$; 0; $\sqrt{5}$; 4; $\sqrt{49}$; $\sqrt{87}$

d) Reais não positivos: $-7; 0$

e) Reais negativos: -7

f) Reais não negativos: $\sqrt{3}$; $\frac{19}{12}$; 0; $\sqrt{5}$; 4; $\sqrt{49}$; $\sqrt{87}$

Observa a resposta c), nela estão os números inteiros, racionais e irracionais.

3 a) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}_0^-$ b) $\mathbb{Q}_0^+ \subset \mathbb{R}_0^+$ c) $\mathbb{R}^- \supset \left\{-1; -\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $\mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{R}$

e) $+\sqrt{10} \notin \mathbb{R}^-$ f) $\mathbb{Q}_0^- \not\subset \mathbb{R}^+$ g) $-\frac{91}{4} \notin \mathbb{R}_0^+$ h) $-\sqrt{5} \in \mathbb{R}^-$

i) $\pi \notin \mathbb{R}^-$ j) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ k) $+e \in \mathbb{R}_0^+$ l) $-1000 \in \mathbb{R}$

Exercícios de aplicação

1. Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas:

a) $\frac{3}{4}$ é um número racional

b) 0 é um número racional

c) $\frac{15}{3}$ é um número inteiro

d) $-10 = 11 - 21$

e) $\frac{1}{4}$ é um número inteiro

f) $\sqrt{13}$ é um número real

2. Encontra a representação decimal das seguintes fracções e radicais, e indica o conjunto numérico pertence cada um dos números abaixo mencionados:

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{30}{10}$ d) $-\frac{8}{11}$

e) $\frac{5}{8}$ f) $\frac{24}{12}$ g) $\sqrt{3}$ h) $\sqrt{8}$

3. Usando cada um dos símbolos $\in, \notin, \subset, \supset, \not\subset$, completa as expressões de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $\frac{3}{5}$ ____ $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ ____ $\mathbb{N}$ c) $-\frac{1}{3}$ ____ $\mathbb{R}$ d) 4 ____ $\mathbb{N}$

e) $\frac{1}{3}$ ____ $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Z}^+$ ____ $\mathbb{Q}$ g) $\frac{3}{4}$ ____ $\mathbb{R}$ h) -3 ____ $\mathbb{N}$

i) $-1{,}33$ ____ $\mathbb{Z}$ j) $\left\{\frac{10}{5}, 0\right\}$ ____ $\mathbb{Z}$ k) -3 ____ $\mathbb{Q}$ l) $\sqrt{4}$ ____ $\mathbb{Z}$

m) $\{0{,}1; 5\}$ ____ $\mathbb{N}$ n) $-3{,}16$ ____ $\mathbb{Q}$ o) $-4{,}8$ ____ $\mathbb{R}$ p) $-0{,}866\ldots$ ____ $\mathbb{Q}$

4. Assinala as afirmações verdadeiras com ***V*** e as falsas com ***F***

a) $2 \in \mathbb{R}^-$ b) $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}^-$ c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$

d) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

g) $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}^-$ h) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ i) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$

5. Dado o conjunto $B = \left\{-3;\ \sqrt{7}, \frac{3}{4},\ 0{,}33333\right\}$, identifica o subconjunto de $\mathbb{R}$ a que pertence cada elemento de B.

6. Representa na recta numérica os seguintes números: $\sqrt{3}$; $-4{,}75$; $0{,}25$; $\frac{3}{5}$; $3{,}666\ldots$; $\sqrt{7}$

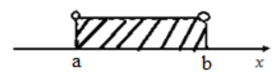
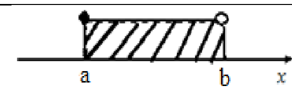
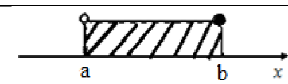
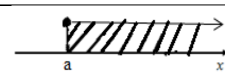
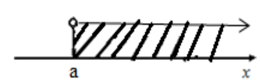
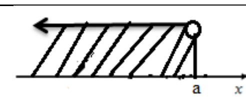
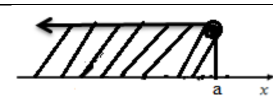
7. Ordena, os seguintes números reais: $\frac{8}{3}$; $\sqrt{7}$; $-2{,}7$; $1{,}5$; $-\sqrt{7}$; -3; 2; $\sqrt{3}$, $-\frac{11}{4}$, por ordem crescente.

5. Inequações lineares

5.1 Intervalos numéricos limitados e ilimitados

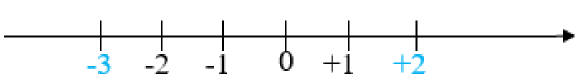
O conjunto dos números reais possui subconjuntos denominados **intervalos reais** ou **intervalos de números reais** (**[ ];] [; [[;]]**), nos quais os elementos podem ser representados por meio de desigualdades ($<; >; \leq; \geq$).

Consideremos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, dois números reais tais que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. A partir desta desigualdade podemos representar os seguintes subconjuntos de números reais de três maneiras:

Em Intervalo	Em compreensão	Geométrica (no eixo real)
$]a; b[$ – Limitado, aberto de extremos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.	$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que $\boldsymbol{a}$ e menores que $\boldsymbol{b}$	
$[a; b]$ -Limitado, fechado de extremos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que $\boldsymbol{a}$ e menores ou iguais que $\boldsymbol{b}$	
$[a; b[$ – Limitado, fechado em $\boldsymbol{a}$ e aberto em $\boldsymbol{b}$.	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que $\boldsymbol{a}$ e menores que $\boldsymbol{b}$	
$]a; b]$ -Limitado, aberto em $\boldsymbol{a}$ e fechado em $\boldsymbol{b}$.	$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que $\boldsymbol{a}$ e menores ou iguais que $\boldsymbol{b}$	
$[a; +\infty[$ - Ilimitado, fechado em $\boldsymbol{a}$.	$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que $\boldsymbol{a}$	
$]a; +\infty[$ - Ilimitado, aberto em $\boldsymbol{a}$.	$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que $\boldsymbol{a}$	
$]-\infty; a[$ - Ilimitado, aberto em $\boldsymbol{a}$.	$\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores que $\boldsymbol{a}$	
$]-\infty; a]$ - Ilimitado, fechado em $\boldsymbol{a}$.	$\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores ou iguais que $\boldsymbol{a}$	

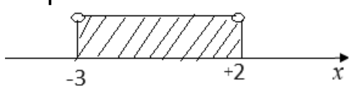
Exemplo:

Consideremos A, conjunto de todos os números compreendidos entre, -3 e $+2$. Ao representarmos na recta numérica:



Repara que são muitos números que pertencem a esta distância de -3 e $+2$, por exemplo, podemos encontrar $-2.5; -2; -\pi; -1.5; -0.25; 0; +1,2; +\frac{10}{8}; +1,99; \ldots$. Portanto são muitos números que dificilmente podemos contabiliza-los. Então, para representarmos todos os números usamos **intervalos numéricos**. Deste modo, os números compreendidos entre -3 e $+2$, representam-se de seguinte forma:

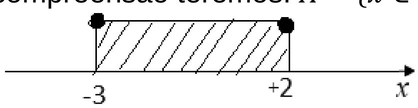
$A =]-3; +2[$- Lê-se intervalo aberto a esquerda e a direita de extremos -3 e $+2$. Definindo em compreensão teremos:$A = \{x \in \mathbb{R}: -3 < x < +2\}$. E no eixo real representa-se de seguinte forma:



Repare que as bolas não estão pintadas, isso significa que, o intervalo é aberto e os extremos $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{2}$ não pertencem ao conjunto.

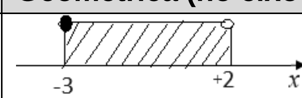
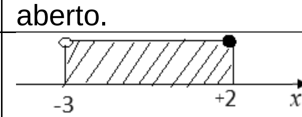
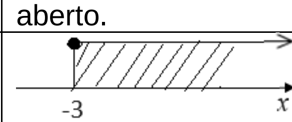
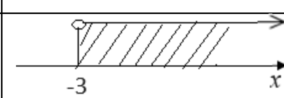
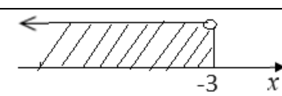
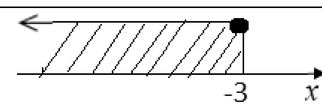
Se os extremos $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{2}$ fizessem parte do subconjunto, a representação seria:

$A = [-3; +2]$- lê-se intervalo fechado a esquerda e a direita com os extremos -3 e +2. Definindo em compreensão teremos: $A = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq +2\}$. E no eixo real representa-se de seguinte forma:



As bolas estão pintadas, isso significa que, o intervalo é fechado e os extremos $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{2}$ pertencem ao conjunto.

Exemplos de representação de outros subconjuntos compreendidos entre os extremos $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{2}$

Em Intervalo	Em compreensão	Geométrica (no eixo real)
$\boldsymbol{A = [-3; +2[}$ - Limitado, fechado em $\mathbf{-3}$ e aberto em $\mathbf{2}$.	$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x < +2\}}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que $\mathbf{-3}$ e menores que $\mathbf{+2}$	 O elemento $+\mathbf{2}$, não pertence ao conjunto, porque o intervalo está aberto.
$\boldsymbol{A =]-3; +2]}$ - Limitado, aberto em $\mathbf{-3}$ e fechado em $+\mathbf{2}$.	$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R}: -3 < x \leq +2\}}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que $\mathbf{-3}$ e menores ou iguais que $\mathbf{+2}$	 O elemento $\mathbf{-3}$, não pertence ao conjunto, porque o intervalo está aberto.
$A = [-3; +\infty[$ - Ilimitado, fechado em $\mathbf{-3}$.	$A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -3\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que $\mathbf{-3}$	
$A =]-3; +\infty[$ - Ilimitado, aberto em $\mathbf{-3}$.	$A = \{x \in \mathbb{R}: x > -3\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que $\mathbf{-3}$	
$A =]-\infty; -3[$ - Ilimitado, aberto em $\mathbf{-3}$	$A = \{x \in \mathbb{R}: x < -3\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores que $\mathbf{-3}$	
$A =]-\infty; -3]$ - Ilimitado, fechado em $\mathbf{-3}$.	$A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -3\}$ Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores ou iguais que $\mathbf{-3}$	

NOTA:

A representação de conjuntos numéricos por intervalos, geralmente, é usada para representar os subconjuntos dos números reais. Ela é capaz de mostrar em que ponto um conjunto começa e termina,

ou seja, o seu menor e maior elemento. Essa representação também pode indicar os números que não pertencem a esse conjunto.
As bolinhas nas extremidades não pintadas, indicam que os valores das extremidades não fazem parte do conjunto e as pintadas indicam que os valores das extremidades fazem parte do conjunto

5.1 Reunião e intersecção de intervalos numéricos

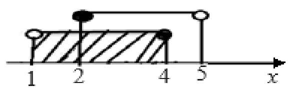
5.2.1 Reunião de intervalos numéricos

Sejam dados os conjuntos A e B, dá-se nome de **reunião dos dois conjuntos** ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos e, matematicamente escreve-se o seguinte: $\boldsymbol{A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}}$

Exemplos:

1. Considera os conjuntos $A =]1; 4]$ e $B = [2; 5[$. Determina $A \cup B$

Resolução



$]1; 4] \cup [2; 5[= \ ]1; 5[$

Solução

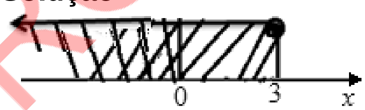
$\boldsymbol{A \cup B} =]1; 5[= \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 5\}$

2. Considera os conjuntos $C =]-\infty; 3]$ e $D =]-\infty; 0[$. Determina $C \cup D$

Resolução

$]-\infty; 3] \cup]-\infty; 0[= \ ]-\infty; 3]$

Solução



$\boldsymbol{C \cup D} =]-\infty; 3] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 3\}$

5.2.2 Intersecção de intervalos numéricos

Sejam dados os conjuntos A e B, dá-se o nome de **intersecção dos dois conjuntos** ao conjunto formado pelos elementos pertencem simultaneamente a ambos os conjuntos e, matematicamente escreve-se o seguinte: $\boldsymbol{A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}}$

Exemplos:

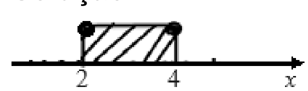
1. Determine

a) $]1; 4] \cap [2; 5[$

Resolução

$]1; 4] \cap [2; 5[= \ [2; 4]$

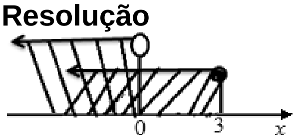
Solução



$]1; 4] \cap [2; 5[= \ [2; 4] = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 4\}$

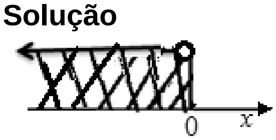
b) $]-\propto; 3] \cap]-\propto; 0[$

Resolução



$]-\infty; 3] \cap]-\infty; 0[= \ ]-\infty; 0[$

Solução



$]-\infty; 3] \cap]-\infty; 0[= \ ]-\infty; 0[= \{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$

5.3 Noção de inequação linear com uma variável

Dá-se nome de **inequação** a toda expressão matemática literal com uma ou mais variáveis (incógnitas) expressa por uma desigualdade.

As inequações lineares com uma variável, podem ser escritas numa das seguintes formas: $ax + b > 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$ e $ax + b \leq 0$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Exemplos:

a) $2x - 5 > 0$ b) $2 - 4x \geq 0$ c) $3x - \frac{1}{2} \leq 0$ d) $3{,}2x + \frac{5}{2} < 0$

e) $x - 3 > \frac{1}{3}(x - 2)$ f) $x - 3 \geq 2$ g) $3x + 1 \leq \frac{1}{2}x$ h) $4(x - 1) < 19$

5.3.1 Resolução de inequações lineares

Resolver uma inequação linear significa determinar o conjunto de todos os valores da incógnita que transforma a inequação numa desigualdade verdadeira. O conjunto dos valores encontrados designa-se o **conjunto solução** da inequação. A resolução de uma inequação resume-se através de aplicação de alguns princípios de equivalência.

Exemplos:

1. Resolve as seguintes inequações e representa a solução no eixo real e sob forma de intervalo.

a) $3x - 1 < 4$ b) $5 - 4x > 29$ c) $2x - 3 \leq 10x + 13$

Resolução

1.a) $3x - 1 < 4 \Leftrightarrow$ Como o **1** está a subtrair no primeiro membro, passa para o segundo membro a adicionar;

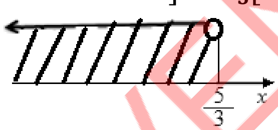
$\Leftrightarrow 3x < 4 + 1$

$\Leftrightarrow 3x < 5$ Como o **3** está a multiplicar no primeiro membro, passa para o segundo membro a dividir;

$\Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$ Repara que o sentido da desigualdade o não mudou, porque o factor é positivo.

$\boldsymbol{x < \frac{5}{3}}$ é a **solução da inequação** e pode ser representado sob forma de **intervalo**:

Solução: $\boldsymbol{x \in \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[}$ e geometricamente (no eixo real), é representada da seguinte forma:



Esta representação também é conhecida por **resolução geométrica**.

b) $5 - 4x > 29 \Leftrightarrow$ Como o **5** está a adicionar no primeiro membro, passa para o segundo membro a subtrair;

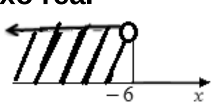
$\Leftrightarrow -4x > 29 - 5$

$\Leftrightarrow -4x > 24$ Como o $\boldsymbol{-4}$ está a multiplicar no primeiro membro, passa para o segundo membro a dividir;

$\Leftrightarrow x < \frac{24}{-4}$ Repara que o sentido da desigualdade mudou, porque o factor é negativo.

$\Leftrightarrow x < -6$

Representação da solução no eixo real

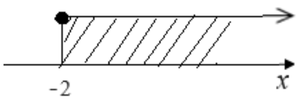


Sob forma de intervalo

Solução: $\boldsymbol{x \in]-\infty, -6[}$

c) $2x - 3 \leq 10x + 13 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 10x \leq 13 + 3$
$\Leftrightarrow -8x \leq 16$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{16}{-8}$
$\Leftrightarrow x \geq -2$

Colocar os termos com variáveis no primeiro membro e os termos independentes no segundo membro, observando as regras de mudanças das operações;
Repara que o sentido da desigualdade mudou, porque o factor é negativo.



solução: $x \in [-\mathbf{2}; +\infty[$

NOTA: Todos os princípios de equivalências aplicadas na resolução de equações lineares continuam a ser válidos para a resolução de inequações lineares.

5.3.2 Classificação de inequações lineares

Atendendo à existência ou não da solução, as inequações lineares a uma incógnita podem ser classificadas em **inequações impossíveis**, **possíveis e determinadas** ou **possíveis indeterminadas.**

Exemplos:

Resolve e classifica cada uma das seguintes inequações lineares.

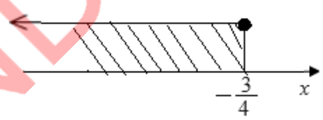
a) $2(3x - 4) > 6x + 1$ b) $5x - 2 < 5(x + 1) + 7$ c) $2x - 5x \geq 3 + x$

Resolução

a) $2(3x - 4) > 6x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x - 8 > 6x + 1$
$\Leftrightarrow 6x - 6x > 1 + 8$
$\Leftrightarrow 0x > 9$ A desigualdade obtida é falsa para qualquer valor de x, por isso diz-se que a inequação **é impossível**

b) $5x - 2 < 5(x + 1) + 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - 5x < 5 + 7 + 2$
$\Leftrightarrow 0x < 14$
$\Leftrightarrow 0 < 14$ Neste caso, a desigualdade obtida é verdadeira para todo o valor de x, por isso diz-se que a inequação **é possível e indeterminado**.

c) $2x - 5x \geq 3 + x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 5x - x \geq 3$
$\Leftrightarrow -4x \geq 3 * \ (-1)$
$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{3}{4}$



Solução: $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right]$

A desigualdade obtida é verdadeira e a solução da inequação é possível e determinada, logo, diz-se que a inequação **é possível e determinada.**

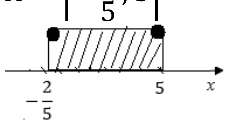
Exercícios resolvidos

1. Representa no eixo real os seguintes intervalos.

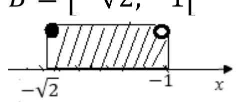
a) $A = \left[-\frac{2}{5}; 5\right]$ b) $B = [-\sqrt{2}; -1[$ c) $C =]-4; 0]$

Resolução

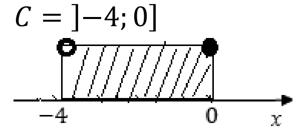
1a) $A = \left[-\frac{2}{5}; 5\right]$



b) $B = [-\sqrt{2}; -1[$



c) $C =]-4; 0]$



2. Indica dois números:
a) inteiros que pertencem ao intervalo $[1; 3[$
b) um racional e outro irracional do intervalo $]-\sqrt{5}; 0[$

Resolução

2. a) Os dois números inteiros que pertencem ao intervalo $[1; 3[$ são: $\mathbf{1}$ **e** $\mathbf{2}$

b) São vários números racionais e irracionais que pertencem a este intervalo $]-\sqrt{\mathbf{5}}; \mathbf{0}[$, dentre os quais podem ser $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ou $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ e $-\sqrt{\mathbf{3}}$ ou $-\sqrt{\mathbf{2}}$

3.Representa na forma de intervalos numéricos os seguintes conjuntos:
a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$ b) $B = \left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{2} \leq x < 0\right\}$

Resolução

3 a) A representação do conjunto A em extensão, significa que o conjunto A é formado pelos números reais maiores e iguais a $\mathbf{2}$, portanto: $\boldsymbol{A} = [\mathbf{2}; +\infty[$

b) A representação do conjunto B em extensão, significa que o conjunto B é formado pelos números reais maiores e iguais a $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ e menores que $\mathbf{0}$, portanto: $\boldsymbol{B} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{0}\right[$

4. Indica, em compreensão, o conjunto das soluções da inequação: $\frac{3(x-1)}{2} + \frac{x+2}{3} < \frac{1}{6}$.

Resolução

4. $\frac{3(x-1)}{2} + \frac{x+2}{3} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow$(desembaraçar de parênteses);

$\Leftrightarrow \underset{(3)}{\frac{3x-3}{2}} + \underset{(2)}{\frac{x+2}{3}} < \underset{(1)}{\frac{1}{6}}$ (desembaraçar de denominadores);

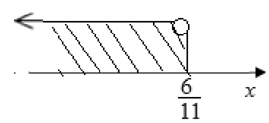
$\Leftrightarrow 3(3x-3) + 2(x+2) < 1$

$\Leftrightarrow 9x - 9 + 2x + 4 < 1$ (agrupar os termos com a incógnita num dos membros e os que não têm

$\Leftrightarrow 9x + 2x < 1 + 9 - 4$ (incógnita noutro membro, utilizando o princípio de adição);

$\Leftrightarrow 11x < 6$ (efectua os cálculos em cada membro);

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}$ esta é a solução da inequação, representado no eixo real fica



Em compreensão fica $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}\right\}$

Exercícios de aplicação

1. Considera em IR o conjunto $\left[-\frac{9}{2}; 1\right[$, indica:
a) Três números inteiros que pertencem a este conjunto.
b) Três números racionais não inteiros que pertencem a este conjunto.
c) Três números irracionais que pertencem a este conjunto.

2. Representa, no eixo real e na forma de intervalos numéricos, cada um dos seguintes subconjuntos de IR.
   a) $\left\{x \in IR: x > -\frac{3}{2}\right\}$
   b) $\{x \in IR: x \leq 3\}$
   c) $\left\{x \in IR: -\frac{2}{5} \leq x < 4\right\}$
   d) O conjunto dos números reais não inferiores a $-\frac{1}{2}$.

3. Tendo em consideração os seguintes conjuntos $A =]-\infty; 4]$ $B =]-\infty; 1]$ e $C = [0; 3]$ determina e representa a solução em forma de intervalo em cada alínea.

a) $A \cup B$	b) $A \cup C$	c) $B \cup C$	d) $A \cap B$
e) $A \cap C$	f) $B \cap C$	g) $A \cup C \cap B$	h) $A \cap B \cup C$

4. Resolve em IR as seguintes inequações:

a) $x - 4(x-1) < 19$

b) $3(2x-1) \leq 5x + 7$

c) $4(x+3) > 2(x-1)$

d) $3(x+2) > 2(2x+4)$

e) $2(3x-1) - 4(x+2) \leq 5x - 1$

f) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{5}{3} - x$

g) $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{x+2}{10} - 1 \leq \frac{1-x}{4}$

i) $\frac{1}{3}(x-2) - \frac{3}{5} < \frac{x}{2} - 1$

j) $\frac{x-1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} > 0$

5. Indica, em extensão, o conjunto das soluções naturais da inequação: $\frac{3(2x+3)}{2} < \frac{2x}{3} + 10$.

6. Qual é o menor número inteiro que não verifica a inequação $\frac{x-3}{4} - \frac{x+5}{5} \geq \frac{x+1}{2}$?

7. Indica o menor número inteiro que satisfaz a inequação: $\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2} - 1 > \frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3}$.

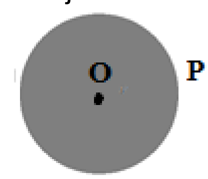
6. Circunferência e círculo

6. 1 Noção de circunferência e círculo

Já vimos que, uma **circunferência** de centro ***O*** e raio ***r*** é o conjunto de pontos do plano cuja distância ao centro é igual a ***r.***

Raio é qualquer segmento de recta que une qualquer ponto da circunferência com o centro.

Círculo é conjunto de **todos os pontos** que estão no **interior da circunferência**, incluindo a circunferência.



6.2 Corda de uma circunferência

Chama-se corda de uma circunferência ao **segmento que une dois pontos diferentes da circunferência**.

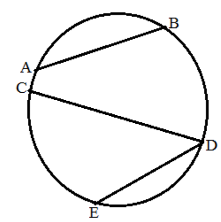
Exemplo: os segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$,$\overline{CD}$, $\overline{ED}.$

Numa circunferência podem-se traçar uma infinidade de cordas e de raios.

A corda que passa pelo centro da circunferência, chama-se **diâmetro**.

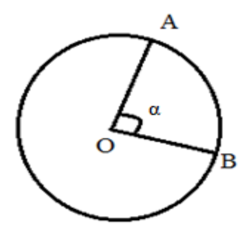
Exemplo:

O segmento $\overline{CD}$ é o diâmetro da circunferência.



6.3 Ângulos na circunferência

6.3.1. Ângulo ao centro e arcos correspondentes



Ângulo ao centro ou **ângulo central** é o ângulo cujo vértice está no centro da circunferência.

Exemplo:

Na figura ao lado, $\measuredangle AOB$ representa o ângulo ao centro ou ângulo central.

O arco (*AB*) formado entre os dois lados do ângulo, corresponde à **amplitude do ângulo central**, representada na figura por α, isto é, o **arco (AB) é igual à amplitude do ângulo ao centro**.

$\boxed{\widehat{AB} = \measuredangle AOB}$

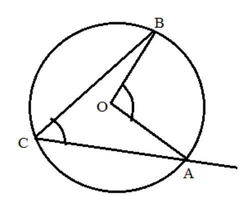
arco (*AB*) é designado por $\boldsymbol{\widehat{AB}}$

6.3.2 Ângulo inscrito na circunferência

Ângulo inscrito na circunferência é o ângulo cujo vértice está sobre um ponto da circunferência e cujos lados intersectam a circunferência em dois pontos.

Exemplo:

- O ângulo $B\hat{C}A$ – é o ângulo inscrito em que C representa o vértice do ângulo.
- O ângulo $B\hat{O}A$ – é o ângulo central, em que O representa o centro da circunferência – (vértice do ângulo).



6.3.3 Amplitude do ângulo inscrito

A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro que intersecta o mesmo arco.

$$\boxed{A\hat{C}B = \frac{1}{2} \,.\, A\widehat{O}\,B}$$

Nota:
Todo o ângulo inscrito sobre o diâmetro de uma circunferência tem a amplitude igual a 90°.

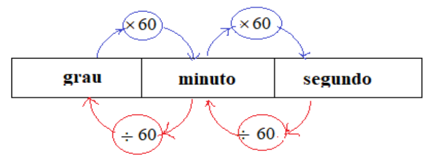
6.4 Amplitudes de ângulos e de arcos (Sistema Sexagesimal e Centesimal)

No sistema sexagesimal, a amplitude de um ângulo é dada por **"**Grau**"** que resulta da divisão de um ângulo recto em 90 partes iguais, por isso **um ângulo recto mede 90**$^{\circ}$. $\boxed{90^{\circ} = 100g}$

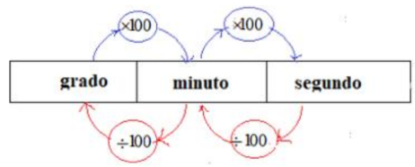
Cada parte corresponde a $\mathbf{1}$°.

Neste sistema, um minuto equivale a 60 minutos: $\boxed{\mathbf{1^{\circ} = 60'}}$

um minuto equivale a 60 segundos**:** $\boxed{\mathbf{1' = 60''}}$



No sistema centesimal, a unidade de medição de ângulos, é o **grado.** Esta unidade resulta da divisão do ângulo recto em 100 partes iguais, por isso um **ângulo recto mede** $\mathbf{100}\boldsymbol{g}$**.** $\boxed{\mathbf{90^{\circ} = 100g}}$
Cada uma das partes corresponde a $\mathbf{1g}$ **,** lê-se **1 grado**.
Neste sistema:
Cada **grado** equivale a **100 minutos**: $\boxed{\mathbf{1\boldsymbol{g} = 100'}}$

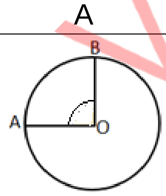
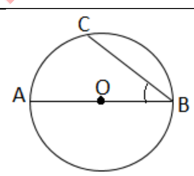
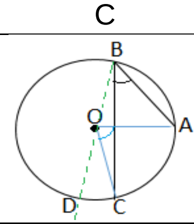
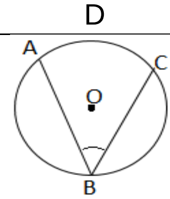
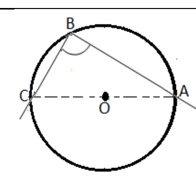


Cada **minuto** equivale a **100 segundos**: $\boxed{\mathbf{1' = 100''}}$

NOTA:
O minuto e **o segundo** são submúltiplos nos dois sistemas. O que difere é o valor da equivalência atribuído em cada sistema.

6.5 Relações entre ângulo inscrito e ângulo central

Observa os diferentes ângulos inscritos e o ângulo central:

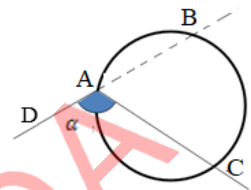
A	B	C	D	E
				
$\overset{\frown}{AB} = \measuredangle AOB$	$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$	$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}D}{2}$	$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$	$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$

A - trata-se ângulo central, **B**- ângulo inscrito cujo um dos lados passa pelo centro;
C- Ângulo inscrito que não contém o centro;
D- Ângulo inscrito cujo vértice do ângulo central está no interior do ângulo inscrito, e
E-Ângulo inscrito sobre o diâmetro.

Repara que a amplitude de qualquer ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro.

6.6 Ângulo ex-inscrito e exterior

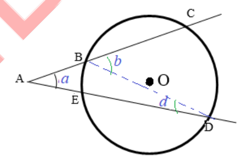
Ângulo ex-inscrito é o ângulo que tem o vértice sobre a circunferência que é intersectada por um dos seus lados e pelo prolongamento do outro.



Exemplo:
O $\sphericalangle DAC$ é um angulo ex-inscrito.
A medida de um ângulo **ex-inscrito** é dada pela relação:

$\boxed{D\hat{A}C = \frac{\widehat{CA}+\widehat{AB}}{2}}$ ou $\boxed{D\hat{A}C = 180^o - \frac{\widehat{BC}}{2}}$

Diz-se que um ângulo é **exterior** quando tem o vértice fora da circunferência.



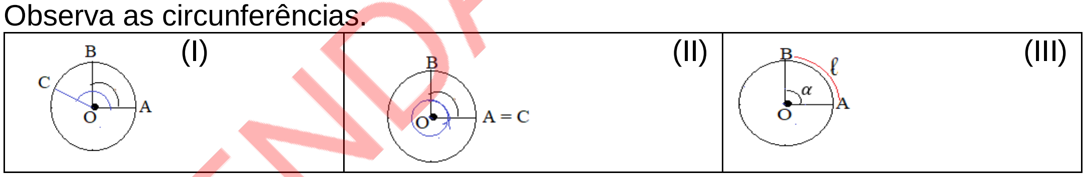
Exemplo:
O $\sphericalangle CAD$ é um angulo externo.

A medida de um angulo **exterior** é dada pela relação: $\boxed{C\hat{A}D = \frac{\widehat{CD}-\widehat{EB}}{2}}$

6.7 Cálculos na circunferência e círculo

6.7.1 Comprimento de um arco

Observa as circunferências.



A medida de um ângulo é proporcional à medida do seu arco correspondente. Quanto maior o ângulo, tanto maior será o seu arco correspondente (I).
E esta proporcionalidade pode-se exprimir como: $\frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}}$

Afastando o ponto **C**, ao longo da circunferência, o $\boldsymbol{\sphericalangle AOC}$**,** tornar-se-á um **ângulo giro**, ou seja, de $\mathbf{360}$°.O arco **AC** será igual ao comprimento da circunferência, ou seja, o perímetro $\boldsymbol{P}$.
Assim: $\frac{A\hat{O}B}{360^o} = \frac{\widehat{AB}}{P}$. (II)

Designando a medida do $\boldsymbol{\sphericalangle AOB}$ por $\boldsymbol{\alpha}$**,** e a medida do **arco AB** por ℓ , terá:

$\frac{A\hat{O}B}{360^o} = \frac{\widehat{AB}}{P} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{360^o} = \frac{\ell}{P}}$, onde $\boxed{\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times P}$, mas $P = 2\pi r$. Então:

$\boxed{\ell = \frac{\alpha}{360^o} \times 2\pi r}$ ou $\boxed{\ell = \frac{\alpha\pi r}{180^o}}$ Esta é a fórmula para determinar **o comprimento de um arco**.

6.7.2 Área de um sector circular

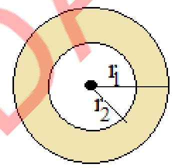
Observa as figuras ao lado.

O$\sphericalangle AOB$ representa sector circular. Sabe-se que a área do círculo é dada pela relação: $A = \pi r^2$

A área do sector circular é calculada na base da relação: $\boxed{A = \frac{\alpha}{360°} \times \pi r^2}$ **NOTA:** $\sphericalangle AOB = A_1 = \propto$

6.7.3 Área de uma coroa circular

Observa a figura ao lado, nela estão apresentados dois círculos de raios diferentes e com o mesmo centro. Dois círculos que têm o centro comum são **concêntricos**. A parte pintada na figura chama-se **coroa circular**. Pela disposição dos círculos nota-se que raio r_1 **é maior que** raio r_2, consequentemente $A_1 > A_2$. Assim:



A área da coroa circular é dada pela diferença das duas áreas de círculos correspondentes.

$$\boxed{A_{coroa} = \pi(r_1^2 - r_2^2)}$$

Exercícios resolvidos

1. Observa a figura ao lado e assinala **V** nas afirmações verdadeiras e **F** nas falsas.

a) O ângulo central tem o seu vértice no centro da circunferência.

b) O ângulo $\measuredangle BAC$ é inscrito

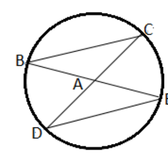
c) O ângulo central mede o dobro do arco correspondente.

d) O ângulo inscrito é caracterizado por ter o vértice no interior da circunferência.

e) O ângulo $\measuredangle BED$ é inscrito

f) O ângulo inscrito é igual ao arco correspondente.

g) Se um ângulo inscrito e um ângulo central estão ligados ou correspondem ao mesmo arco então estes são iguais.



Resolução

1 a) V

b) F porque $\measuredangle BAC$ é ângulo ao centro

c) F, pois a amplitude de ângulo ao centro é dada pela medida do **arco** correspondente a este ângulo

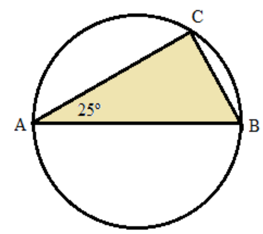
d)V e) V

f) F, pois a medida da amplitude de ângulo inscrito é dada pela metade da medida do **arco** correspondente a este ângulo.

g) F porque um ângulo inscrito e um ângulo central estão ligados ou correspondem ao mesmo arco, porém a amplitude deste ângulo inscrito será a metade do ângulo ao centro.

2. Identifica a alternativa que podemos afirmar que o valor do ângulo $A\hat{B}C$ no triângulo a seguir é:

A. 60º B.65º C. 70º D. 75º E.90º



Resolução:
Alternativa B.
Analisando a circunferência, o arco formado pelos pontos AB tem amplitude igual à meia circunferência, ou seja, 180º. Como o ângulo do vértice em C é inscrito, então ele corresponde à metade de 180º, logo é igual a 90º.
A soma dos ângulos internos do triângulo é sempre igual a 180º, então temos que:

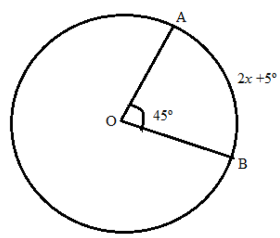
$25° + A\hat{B}C + 90° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 180° - 90 - 25°$

$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 90° - 25°$

$\Leftrightarrow A\hat{B}C = 65°$

3. Calcula o valor de x na circunferência a seguir.



Resolução
Sabendo que AÔB é o ângulo central e que ele corresponde ao valor do arco, então temos: $2x + 5° = 45° \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = 45° - 5° \Leftrightarrow 2x = 40° \Leftrightarrow x = \frac{40°}{2} \Leftrightarrow x = 20°$$

Resposta: O valor do x na circunferência dada é$20°$.

4. Reduze $30g$ ao sistema sexagesimal:

$90° - 100g$

$x - 30g$

$x = \frac{90° \times 30g}{100g} = 27°$

5. Reduze a$45°$o sistema centesimal:

$90° - 100g$

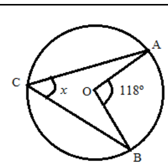
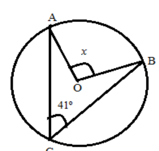
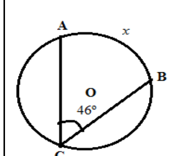
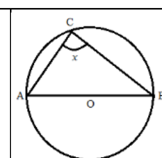
$45° - x$

$x = \frac{40° \times 100g}{90^0} = 200g$

Exercícios de aplicação

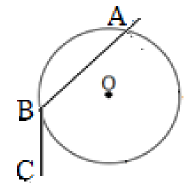
1. Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as afirmações falsas.
   a) Uma circunferência é uma região plana limitada por um círculo. ____
   b) Uma circunferência é um conjunto de pontos cuja distância até ao centro é sempre menor do que a constante r._____
   c) Uma circunferência possui apenas dois raios e a soma desses dois elementos é igual ao diâmetro. _____
   d) Uma circunferência de centro O e raio r é um conjunto de todos os pontos cuja distância até O é igual a r.____
   e) Círculo é a região do plano limitada por um diâmetro. ____

2. Nas circunferências abaixo, determina a medida do ângulo ou do arco *x*.

a)		b)		c)		d)	

3. Converta ao sistema centesimal os seguintes ângulos.
   a) $45°$ b) $72°$ c) $36°\,24'$ d) $54{,}3°$

4. Converta ao sistema sexagesimal os seguintes ângulos.
   a) $47g$ b) $64g$ c) $3g\,20'$ d) $49{,}5g$



5. Observa a figura ao lado e determine a amplitude do ângulo CBA, sabendo que o arco BA mede $290°$.

6. Calcula o comprimento do arco para $r = 3cm$ e $\alpha = 135°$.
7. Calcula a área de um sector circular correspondente a um ângulo ao centro de $\mathbf{18}°$ e cujo raio mede $\boldsymbol{60dm}$.

8. Uma praça de forma circular tem as seguintes medidas $\boldsymbol{80m}$ de diâmetro total e $\boldsymbol{40m}$ de diâmetro do relvado. Como mostra a figura. Determine a área da parte alcatroada. Expresse o resultado em hectares.

7. Monómios

7.1 Noção de monómio

Monómios são expressões algébricas definidas apenas pela multiplicação entre **coeficiente** (número) e **a parte literal** (parte da letra ou das letras).
Exemplos:
$2x;\ 4ab;\ 10x^2;\ 20xyz;\ 30abc;\ 2zy;\ b^3;\ 100ax^3$
a) No monómio $\boldsymbol{2x}$ o coeficiente é $\mathbf{2}$ e parte literal é $\boldsymbol{x}$;
b) No monómio $\boldsymbol{20xyz}$ o coeficiente é $\mathbf{20}$ e parte literal é $\boldsymbol{xyz}$.
c) No monómio $\boldsymbol{b}^3$ o coeficiente é $\mathbf{1}$ e parte literal é $\boldsymbol{b}^3$

7.2 Grau de um monómio

Chama-se **grau de um monómio** a soma dos expoentes das variáveis que nele figuram.
Exemplos:
a) O monómio $\boldsymbol{20xyz}$ é de grau $\mathbf{3}$, visto que: $\boldsymbol{x}$ tem expoente$\mathbf{1}$, $\boldsymbol{y}$ tem expoente $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{z}$ tem expoente $\mathbf{1}$, logo $\mathbf{1+1+1=3}$.
b) O monómio $\boldsymbol{2x^2yz^5}$ é de grau $\mathbf{8}$, visto que: $\boldsymbol{x^2}$ tem expoente $\mathbf{2}$, $\boldsymbol{y}$ tem expoente $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{z^5}$ tem expoente $\mathbf{5}$, logo $\mathbf{2+1+5=8}$.

7.3 Monómios semelhantes

São **monómio semelhantes** aqueles que tem a mesma parte literal, diferindo apenas no coeficiente.
Exemplos:
a) $2x\ e\ 4x$ **b)** $2ya\ e\ 6ya$ **c)** $7bc\ e\ 9cb$ **d)** $7x^2 e\ 8x^2$

7.4 Adição e subtracção de monómios
A adição e a subtracção de monómios devem ser efectuadas quando as partes literais são iguais, adicionando ou subtraindo os seus coeficientes.
Exemplos:
a) $2a+7a=(2+7)a=9a$ b) $7bc+3cb=(7+3)cb=10bc$
c) $5x-2x=(5-2)x=2x$ d) $-12xy-10xy=(-12-10)xy=-22xy$

7.5 Multiplicação entre monómios
O produto de dois ou mais monómios é outro monómio cujo o coeficiente é o produto dos coeficientes e a parte literal é o produto de todas variáveis dos monómios dados
Exemplos:
a) $2x\times 3x\ =(2\times 3)x\times x=\ 4x^{1+1}=\ 4x^2$
b) $4xy\cdot 6xy^2=(4\times 6)\times(x\times x)\times(y\times y^2)=24\times x^{1+1}\times y^{1+2}=\ 24x^2y^3$
c) $10a^2b\times 9a^2b^3=10\times 9\times a^2\times a^2\times\ b\times b^3=90\times a^{2+2}\times b^{1+3}=\ 90a^4b^4$

d) $5xyz \times 6x^2y^3z \; = \; 30x^3y^4z^2$

Ao multiplicar monómios com parte literal diferente, devemos, primeiro, multiplicar os coeficientes e de seguida agrupá-las, se as letras forem diferentes.

Exemplos:

a) $2x \times 3y = 6xy$ b) $4ab \times 5z = 20abz$ c) $20c \times 2ab = 40abc$

7.6 Divisão entre monómios

Na divisão de monómio, dividimos os coeficientes entre si, bem como as partes literais.

Exemplo:

a) $5x^3 \; \div 5x^2 = (5 \div 5)x^{3-2} = 1x^1 = x$

b) $10x^2y^2 \div 2x = (10 \div 2)x^{2-1} \times y^{2-0} = 5xy^2$

c) $30z \div 5z = \frac{30}{5} \times \frac{z}{z} = 6 \times \; 1 = 6$

d) $20b^3 \div 10b = \frac{20}{10} \times \; \frac{b^3}{b} = 2 \times b^{3-1} = \; 2b^2$

Exercícios de aplicação

1. Das expressões que se seguem, passa para o seu caderno aquelas que são monómios:

$3 - x$; $-x$; 7; $5x^2y$; $\frac{1-x}{8}$; 4; $b + y$

2. Determina o grau de cada monómio em relação à variável x.

a) $\boldsymbol{2a^2xy^4}$ b) $\boldsymbol{-5a\,t^2x^5y^4}$ c) $\boldsymbol{\frac{2}{5}ab^3x^2z^4}$ d) $\boldsymbol{-7ab^7y^3}$

3. Completa a tabela.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$\boldsymbol{-xy}$			
$\boldsymbol{\frac{4a^4x^3b}{3}}$			
	$\boldsymbol{-3}$	$\boldsymbol{x^2y^7}$	
	$\boldsymbol{12}$	-------------------------	
$\boldsymbol{-6\sqrt{6}tb^2}$		$\boldsymbol{tb^2}$	

4. Dos monómios que se seguem, indica os que são semelhantes.

$2x^3$; -8; $5x$; $2xy^2$; $3xy^4$; $-y^2x$; $\frac{2}{3}x^3$

5. Efectua

a) $3ab + 5ab + 7ab - 10ab$

b) $23a^2b - 12a^2b + 1{,}3a^2b$

c) $3x^2y + \frac{1}{3}\,x^2y - \frac{1}{2}\,x^2y$

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\,y - \left(\frac{3}{4}\,x^2 - 5 + \frac{7}{2}y\right)$

6. Calcula os seguintes produtos.

a) $(-3x) \times (4x^2)$ b) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right) \times (-2xy)$ c) $(3abx)^2 \times \left(\frac{1}{2}ax^2\right)$

d) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3$ e) $(-5a^3b^2) \times (-9a^3b^2)$

7. Efectua e simplifique as seguintes operações.

a) $\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right) \div \left(\frac{1}{3}ab^2\right)$ b) $(-20x^3y^3) \div (-100y)$ c) $(-5ab^2)^2 \div (5ab^2)$

d) $\left(-\frac{5}{12}a^3b^2\right) \div \left(\frac{1}{3}ab^2\right)$ e) $(45x^7y^3) \div (15x^6y)$ f) $\left(-\sqrt{5}\,x^3yz^4\right)^2 \div x^3z^8$

8. Qual é o monómio do produto de $3xy^2$ por $3x^2y$?

a) $-6xy^2$ b) $\frac{1}{3}x^3y^4$ c) $9y^2x^2$ d) $9y^3x^3$

8.1 Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Já definimos equação linear como sendo toda igualdade em que figura expressão literal com uma ou mais variáveis (incógnitas) e que toda equação linear pode ser reduzida à forma $\boxed{\boldsymbol{ax+b=c}}$; onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números racionais e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas será o conjunto de equações lineares que é satisfeito por mesmos valores das incógnitas.
Exemplo:
Considera a seguinte afirmação: **"A soma de um número com o dobro de outro é vinte e três e a sua diferença entre o quádruplo do primeiro número e o dobro do segundo é dois. Quais são esses números?"**

Traduzindo o enunciado em linguagem matemática, teremos:
1. A soma de um número com o dobro de outro é vinte e três. $\boldsymbol{x+2y=23}$
2. Diferença entre o quádruplo do primeiro número e o dobro do segundo é dois. $\boldsymbol{4x-2y=2}$.
Juntando as duas equações, teremos o seguinte: $\begin{cases} x+2y=23 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ que se chama **sistema de duas equações lineares a duas incógnitas.**
Ao determinar os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ deve-se ter em conta que estes devem satisfazer as duas equações ao mesmo tempo.

A solução de um sistema de duas equações a duas incógnitas é um par de números que satisfaz as duas equações simultaneamente.
Exemplo:
Verifica se o par $(\boldsymbol{5};\boldsymbol{9})$ satisfaz as duas equações do sistema: $\begin{cases} x+2y=23 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$
Para a equação $\boldsymbol{x+2y=23}$**, tem-se** $\boldsymbol{5+2\times 9=23 \Rightarrow 5+18=23}$
Para a equação $4\boldsymbol{x-2y=2}$**, tem-se** $\boldsymbol{4\times 5-2\times 9=2 \Rightarrow 20-18=2}$
Portanto, o par $(\boldsymbol{5};\boldsymbol{9})$ satisfaz as duas equações do sistema logo**,** o par $(\boldsymbol{5};\boldsymbol{9})$ **é solução** deste sistema de equações lineares a duas incógnitas.
Um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas pode ser reduzido a forma canónica $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$; onde $a; b;\ a'$ e b' são coeficientes das incógnitas e c **e** c' termos independentes
Exemplo:
Reduza à forma canónica o seguinte sistema: $\begin{cases} x-2y=y+1 \\ x-y=-x-3 \end{cases}$
Resolução
$\begin{cases} x-2y=y+1 \\ x-y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-y=1 \\ x-y+x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

8.2 Resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Existem vários métodos para resolver um sistema de equações, isto é, para determinar o par de números (caso exista) que transforma simultaneamente as duas equações em igualdades verdadeiras. Aqui vamos tratar apenas de quatro métodos que são: substituição, adição ordenada, misto e gráfico.

8.2.1 Método de substituição

Considerando o sistema acima $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

1º Resolvendo a primeira equação em ordem a "***x***", isto é, isolando o "***x***", teremos:

$$\begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

2º Substituindo na segunda equação o valor obtido de "$\boldsymbol{x}$" na primeira equação, teremos:

$$\begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ 4(23 - 2y) - 2y = 2 \end{cases}$$

Agora a equação obtida é uma equação só com uma incógnita o "***y***", resolvendo teremos:

$$\begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ 92 - 8y - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ -10y = 2 - 92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ -10y = -90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \boxed{23 - 2y} \\ y = \boxed{9} \end{cases}$$

3º Substituindo na primeira equação o valor que obtivemos para "***y***" na segunda, teremos:

$$\begin{cases} x = \boxed{23 - 2.9} \\ y = \boxed{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 - 18 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 - 18 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

O par $(\mathbf{5}; \mathbf{9})$ é a solução do sistema.

8.2.2 Adição ordenada (redução a coeficientes simétricos)

Considerando ainda o sistema $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

1º Reduzir a coeficientes simétricos de uma das variáveis. Para este caso o **y** já tem coeficientes simétricos: $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

2º Somam-se membro a membro os termos correspondentes:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \\ \hline 5x + 0y = 25 \end{array}$$

$$5x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{5} = 5$$

3º Repetindo o procedimento do 2º passo em relação a outra incógnita, teremos:

$$\begin{array}{l} (-4) \\ (1) \end{array} \begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -4x - 8y = -92 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \\ \hline 0x - 10y = -90 \end{array}$$

$$-10y = -90 \Leftrightarrow y = \frac{-90}{-10} = 9$$

O par $(\mathbf{5}; \mathbf{9})$ é a solução do sistema.

8.2.3 Método misto

O método misto consiste em resolver o sistema aplicando, simultaneamente, o método de adição ordenada e substituição.

1º Aplicando o método de adição ordenada, teremos:

$$\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

2º Somam-se membro a membro os termos correspondentes:

$$\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$
$$\overline{5x + 0y = 25}$$

$$5x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{5} = 5$$

3º Substituindo este valor numa das equações do sistema, teremos:

$$x + 2y = 23$$
$$5 + 2y = 23$$
$$2y = 23 - 5$$
$$2y = 18 \Leftrightarrow y = \frac{18}{2} = 9$$

O par $(\mathbf{5}; \mathbf{9})$ é a solução do sistema.

8.2.4 Método gráfico

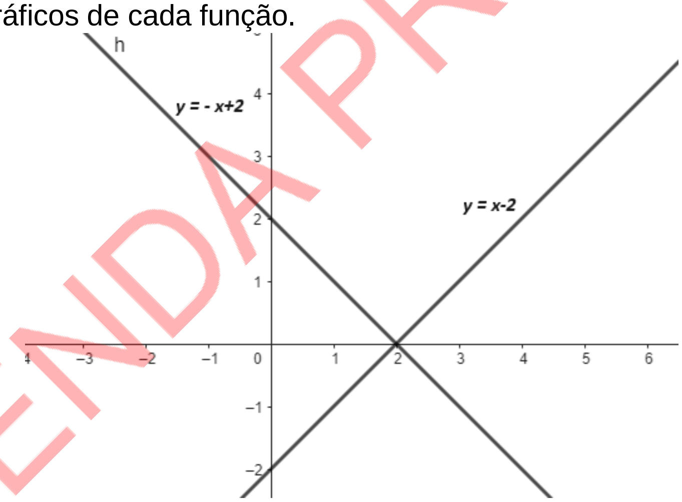
Dado o sistema, $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$, vamos resolver aplicando o método gráfico.

Para resolver graficamente o sistema, temos de:

1º Reduzir as equações à forma $y = ax + b$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

2º Construir os gráficos de cada função.



3º A intersecção das duas rectas fornece as coordenadas do ponto para as duas rectas. Sendo assim, $(\mathbf{2}; \mathbf{0})$ é a solução do sistema, isto é, $\boldsymbol{x = 2}$ e $\boldsymbol{y = 0}$.

8.3 Resolução de problemas conducentes aos sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas

Exemplo:

Na montra de uma confeitaria está escrito pague $110Mt$ e leve 3 bombons e 2 rebuçados ou pague $60Mt$ e leve 1 bombom e 3 rebuçados. Quanto custa cada bombom? E cada rebuçado?

Resolução

1º Passo: Devemos antes de mais nada ler, entender e extrair os dados e o que nos pede o problema.

Dados	Pedido
$\mathbf{3}$ Bombons e $\mathbf{2}$ rebuçados pague-se $\mathbf{110}\boldsymbol{Mt}$.	Preço de cada bombom?
$\mathbf{1}$ Bombom e 3 rebuçados paga-se $\mathbf{60}\boldsymbol{Mt}$.	E cada rebuçado?

2º Passo: Equacionar o problema

Seja "x" o custo do bombom e "y" o custo do rebuçado. As equações que descrevem o problema ficam:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110Mt \\ x + 3y = 60Mt \end{cases}$$

3º Passo: Resolver o sistema de equações recorrendo a qualquer um dos métodos abordados. Neste caso, vamos usar o método de adição ordenada, para determinar o valor numérico da variável y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ x + 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ [x + 3y = 60] \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ -3x - 9y = -180 \end{cases}$$

$$0 - 7y = -70 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{(-\mathbf{70})}{(-\mathbf{7})} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{10}$$

A seguir, **v**amos usar o método de substituição para determinar o valor numérico da variável x

$$x + 3y = 60 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \mathbf{3} \times \mathbf{10} = \mathbf{60}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \mathbf{30} = \mathbf{60}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{60} - \mathbf{30}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{30}$$

4º Passo: Extrair a solução, antecedida pela **v**erificação do resultado e dar resposta do problema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 110Mt \\ x + 3y = 60Mt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 30 + 2 \times 10 = 110 \\ 30 + 3 \times 10 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 + 20 = 110 \\ 30 + 30 = 60 \end{cases}$$

O par ordenado $(\mathbf{30}; \mathbf{10})$ é a solução do sistema**.**

Resposta: Cada bombom custa 30Mt e cada rebuçado custa 10Mt.

Exercícios de aplicação

1. Dadas as equações $y - 3x = 1$ e $y - x = -1$, verificae se o par $(-1; -2)$ é solução de ambas equações?

2. Verifica se o par $(1; -1)$ é solução dos sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

3. Indica os sistemas de equações equivalentes do exercício anterior.

4. Reduz à forma canónica os seguintes sistemas.

a) $\begin{cases} 2(x - y) + 5 = y \\ 18 - x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = \frac{x-y}{2} \\ -x - y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6 - \frac{x+2}{3} = y \\ 2(x - y) + 5 = y \end{cases}$

5. Resolve os sistemas seguintes, aplicando o método de substituição.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{10}=2 \\ x+y=16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=7-x \\ 3x-12=4y \end{cases}$

6.Resolve os sistemas seguintes, aplicando o método de adição ordenada.

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4 \\ 2x-y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{y}{2}+\frac{x}{4}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}=\frac{2}{3} \end{cases}$

7. Resolve os sistemas abaixo pelo método gráfico.

a) $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$

8. Resolve os seguintes sistemas, aplicando o método à tua escolha:

a) $\begin{cases} x-y=3x+1 \\ y=2x-5 \end{cases}$ b) $\begin{matrix} y=7-2x \\ x-y=2 \end{matrix}$ c) $\begin{cases} y=x \\ x+3y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+3y=11 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ f) $\begin{matrix} 4x+2y=16 \\ 5x-3y=9 \end{matrix}$ g) $\begin{matrix} 2x-3y=-16 \\ 5x+3y=2 \end{matrix}$ h) $\begin{matrix} x+y=11 \\ x-y=3 \end{matrix}$

9. Equaciona os seguintes problemas e resolva-o.

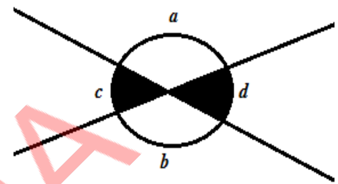
a) Determina dois números, sabendo que a diferença é 11e que a soma da terça parte do aditivo com a quarta parte do subtractivo é 13.

b) No fim de um dia, havia no caixa de uma loja $50Mt$ em moedas de $1Mt$ e de 50 centavos. O dobro das moedas de 50 centavos era igual ao quádruplo da quantidade de moedas de $1Mt$. Quantas moedas havia de cada valor?

9. Congruência de triângulos e teorema de Pitágoras

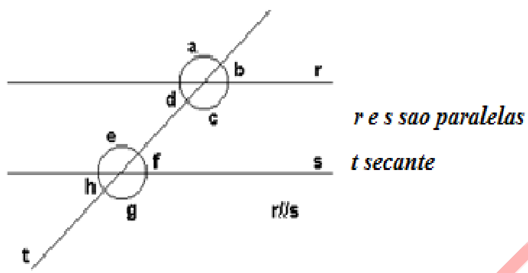
9.1 Revisão

9.1.1 Ângulos verticalmente opostos



Ângulos verticalmente opostos são aqueles cujos lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida". Ângulos de medidas $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, são congruentes, assim como os ângulos de medidas $\boldsymbol{c}$ e d também são congruentes.

9.1.2 Ângulos formados por rectas paralelas, intersectadas por uma secante



Ângulos correspondentes: $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{h}$, e $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{g}$.
Ângulos alternos internos: $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{f}$, e $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{e}$.
Ângulos alternos externos: $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{h}$, e $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{g}$.
Ângulos colaterais internos: $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{e}$, e $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{f}$.
Ângulos colaterais externos: $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{g}$, e $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{h}$.

Nota:

- Os ângulos correspondentes são congruentes (medidas iguais);
- Os ângulos alternos são congruentes (medidas iguais);
- Os ângulos colaterais são suplementares, isto é, somam 180º.

9.2 Congruência de triângulos

Muitas vezes dizemos, sem ter a certeza absoluta, que um objecto é igual a outro.

Exemplo:

A minha camisa é igual a do Amadeu.
Ao dar esta afirmação, estamos a querer dar a entender que esses objectos quando sobrepostos (um em cima do outro) parecem um único objecto, por serem exactamente iguais.

A esta forma de comparação de objectos, na linguagem matemática designa-se **congruência** (**igualdade**) de objectos.

Para comparar os triângulos usam -se critérios específicos que permitem fornecer dados concretos sobre as características comuns e diferentes entre triângulos.

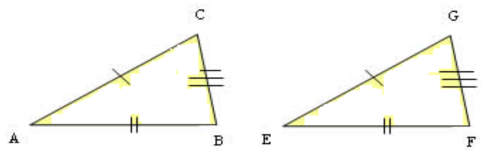
9.2.1 Critérios de congruência de triângulos

Existem três critérios específicos para determinar se dois triângulos são geometricamente iguais (congruentes), nomeadamente: Critério lado, lado e lado ($\ell.\ell.\ell.$), Critério lado, ângulo e lado ($\ell a \ell.$) e Critério ângulo, lado e ângulo ($a.\ell.a.$)

9.2.1.1 Critério lado, lado e lado ($\ell.\ell.\ell.$)

Dois triângulos são congruentes se tiverem os lados correspondentes congruentes um a um, isto é, se houver uma sobreposição efectiva dos seus três lados.

Exemplo:

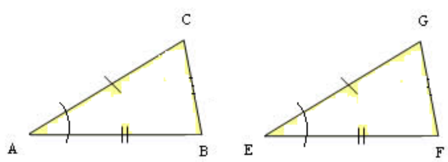


$\overline{AC} \cong \overline{EG}$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$
$\overline{CB} \cong \overline{FG}$
Assim, os dois triângulos têm os três lados congruentes, cada um a cada um. Então,
$\Delta ABC \cong \Delta \mathrm{EFG}$ pelo critério ($\ell.\ell.\ell.$)

9.2.1.2 Critério lado, ângulo e lado ($\ell a \ell.$)

Dois triângulos são congruentes se tiverem dois lados e o ângulo por eles formado, respectivamente congruentes.

Exemplo:

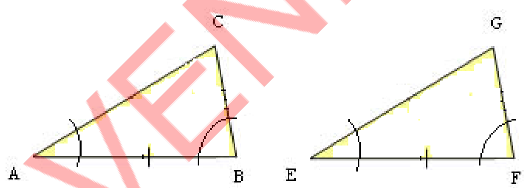


$\overline{AC} \cong \overline{EG}$
$\measuredangle\, CAB \cong \measuredangle\, GEF$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$
Assim, os dois triângulos têm os dois lados congruentes e o ângulo por eles formado também congruente. Então,
$\Delta ABC \cong \Delta \mathrm{EFG}$ pelo critério ($\ell.a.\ell.$)

9.2.1.3 Critério ângulo, lado e ângulo ($a.\ell.a.$)

Dois triângulos são congruentes se tiverem dois ângulos e o lado a eles adjacente respectivamente congruente.

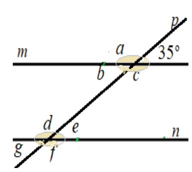
Exemplo:



$\measuredangle\, CAB \cong \measuredangle\, GEF$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$
$\measuredangle\, ABC \cong \measuredangle\, EFG$
Assim, os dois triângulos têm os dois ângulos congruentes e o lado adjacente a eles também congruente. Então,
$\Delta ABC \cong \Delta \mathrm{EFG}$ pelo critério ($a.\ell.a.$)

Exercícios resolvidos

1. Na figura ao lado, as rectas “*m*” e “**n**” são paralelas, cortadas por uma secante “p”. Determina a amplitude dos ângulos representadas pelas letras a, b, c, d, e, f e g.

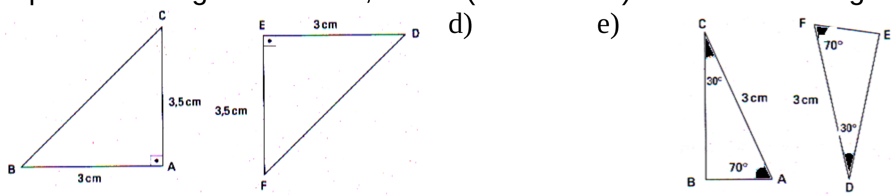


Resolução

$\hat{a} + 35° = 180°$ (ângulos suplementares)
$\hat{a} = 180° - 35° = 145°$
$\hat{a} = \hat{c} = \hat{d} = \hat{f} = 145°$ (ângulos opostos pelo vértice, alternos internos e alternos externos)

$\hat{b} = \hat{e} = \hat{g} = 35°$ (ângulos opostos pelo vértice, alternos internos e alternos externos)

2. Em cada par dos triângulos a baixo, indica (caso exista) o critério de congruência.



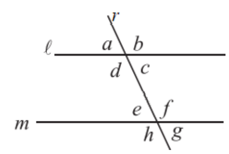
Resolução

a) No ΔABC temos o lado $\overline{AB} = 3cm,$ lado $\overline{AC} = 3{,}5\ cm$ e estes lados formam o ângulo $\hat{A} = 90°$. Verificando no ΔDEF encontramos igualmente $\overline{DE} = 3cm,$ lado $\overline{EF} = 3{,}5\ cm$ e estes lados igualmente formam ângulo $\hat{E} = 90°$. Assim, nota-se que em cada triângulo, temos um par de lados que são iguais aos do outro triângulo ($\overline{AB} = \overline{DE},$ e $\overline{AC} = \overline{EF}$) e um par de ângulos também iguais ($\hat{A} = \hat{E} = 90°$), assim, pelo critério lado, ângulo, lado, os dois triângulos são congruentes $\Delta ABC \cong \Delta EFD$.

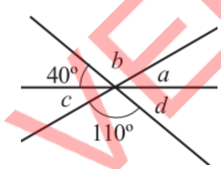
b) No ΔABC temos o lado $\overline{AC} = 3cm$ e dois ângulos adjacentes a esse lado $\hat{A} = 70°$ e $\hat{C} = 30°$. Já no triângulo ΔDEF $\overline{DF} = 3cm$ e dois ângulos adjacentes a esse lado $\hat{F} = 70°$ e $\hat{E} = 30°$. Nesse caso, conseguimos notar que os dois triângulos têm um lado com a mesma medida $\overline{AC} = \overline{DF} = 3cm$ e dois pares de ângulos adjacentes ao mesmo lado congruente ($\hat{A} = \hat{F} = 70°$ e $\hat{C} = \hat{E} = 30°$). Nessas condições, verifica-se que pelo critério ângulo, lado, ângulo os dois triângulos são congruentes.

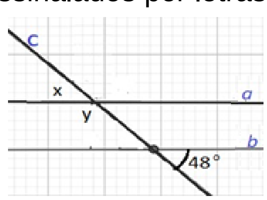
Exercícios de aplicação– Parte I

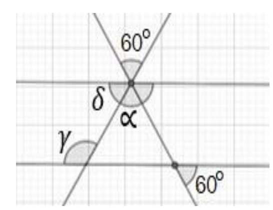
1. Indica todos os pares de ângulos que estão formados na figura ao lado.
   a) Ângulos correspondentes
   b) Ângulos alternos internos
   c) Ângulos alternos externos
   d) Ângulos verticalmente opostos



2. Calcula a amplitude dos ângulos assinalados por letras.

a)


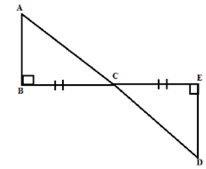
b)


c)


3. Assinala V para verdadeiro ou F para falso nas afirmações abaixo:
   a) Se dois triângulos têm três lados respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes. _______
   b) Se dois triângulos têm um lado e dois ângulos a ele adjacentes respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes________
   c) Se dois triângulos têm três ângulos respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes. _________
   d) Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes. _________

e) Se dois triângulos têm dois lados e um ângulo respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes. _______

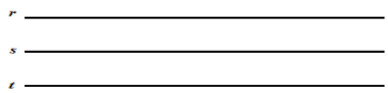
4. Na imagem a seguir, sabemos que $\overline{AB} = 15$, $\overline{DC} = 10$, $\overline{AC} = 3x - 2$ e $\overline{DE} = 4y + 3$. Calcule a medida do segmento x e y.



9.3 Paralelismo e proporcionalidade: Teorema de Tales

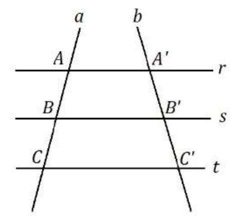
O teorema de Thales permite-nos relacionar os seguimentos de rectas definidas por rectas paralelas intersectadas por duas rectas transversais e definirem segmentos de rectas proporcionais.
Consideremos três rectas paralelas (rectas que prolongando nunca se cruzam) r, s e t:

Fig.1



Em seguida vamos cortar as rectas **r, s** e **t** por duas rectas **a** e **b** transversais, assim:

Fig.2

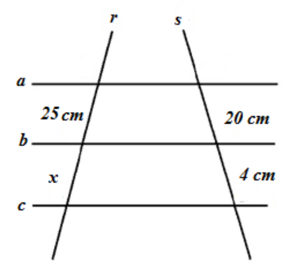


O teorema de Thales diz o seguinte:
A intersecção de um feixe de rectas paralelas por duas rectas transversais forma segmentos de medidas proporcionais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Exercícios de resolvidos

1. Consideremos a figura ao lado, vamos determinar a medida x:



Resolução

Olhando para a figura, de acordo com o teorema de Thales podemos encontrar os seguintes seguimentos proporcionais:

$$\frac{25\ cm}{20cm} = \frac{x}{4\ cm}$$

Resolvendo esta igualdade, teremos:

$x \times 20\ cm = 25\ cm \times 4\ cm$

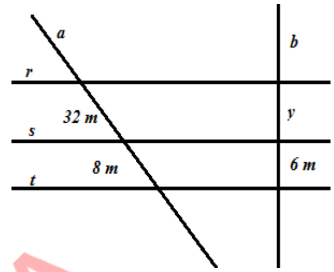
$$x = \frac{25cm \times 4\ cm}{20\ cm} = \frac{100\ cm^2}{20\ cm} = 5\ cm$$

Exercícios de aplicação - Parte II

1. Das afirmações a baixo, assinale com $\boldsymbol{X}$ aquela que define correctamente o teorema de Thales:
a) Dado um triângulo rectângulo, a soma do quadrado dos catetos é sempre igual ao quadrado da hipotenusa.
b) Um feixe de rectas paralelas determina sobre duas rectas transversais segmentos proporcionais.
c) Um feixe de rectas paralelas atravessadas por duas rectas transversais nem sempre determina segmentos proporcionais.

2. Sabendo que as rectas $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ são paralelas, determine o valor de $\boldsymbol{y}$.

3. Considera 2 terrenos (I e II) que estão entre duas ruas A e B. Sabendo que as medidas de cada terreno de frente a rua A são 24m e 15 m. Determina a medida do comprimento do terreno I em frente da rua B, sabendo que o comprimento do terreno II em frente a rua B é de 20 m.



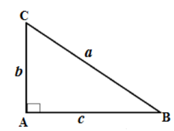
9.3 Teorema de Pitágoras

O **Teorema de Pitágoras** relaciona o comprimento dos lados do triângulo rectângulo. Essa figura geométrica é formada por um ângulo interno de 90°, chamado ângulo recto.
O enunciado desse teorema é:

9.3.1 A soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa.

Fórmula: $\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}}$

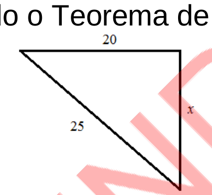
A **hipotenusa** é o maior lado de um triângulo rectângulo e o lado oposto ao ângulo recto. Os outros dois lados são os catetos. O ângulo formado por esses dois lados tem medida igual a 90º (ângulo recto).



Exercícios resolvidos

1. Aplicando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x em cada triângulo rectângulo.

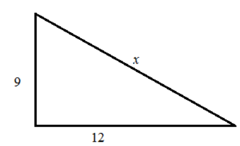
a)



Resolução

$a^2 = b^2 + c^2$
$25^2 = 20^2 + x^2$
$625 = 400 + x^2$
$x^2 = 625 - 400$
$x^2 = 225$
$x = \sqrt{225}$
$x = 15$

b)



Resolução

$a^2 = b^2 + c^2$
$x^2 = 12^2 + 9^2$
$x^2 = 144 + 81$
$x^2 = 225$
$x = \sqrt{225}$
$x = 15$

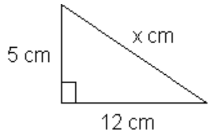
Exercícios de aplicação- Parte III

1. Sendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo, indica, justificando, aqueles que são rectângulos:

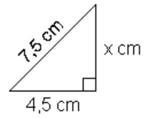
a) $a = 6;\ b = 7$ e $c = 13$
b) $a = 6;\ b = 10$ e $c = 8$
c) $a = 6;\ b = 12$ e $c = 13$
d) $a = 5;\ b = 12$ e $c = 13$
e) $a = 7;\ b = 8$ e $c = 10$
f) $a = 6;\ b = 8$ e $c = 10$
g) $a = 4;\ b = 12$ e $c = 14$

2. Calcula o valor de x em cada um dos triângulos rectângulos:

a)

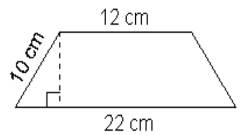


b)

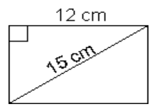


3. Calcula as áreas das seguintes figuras.

a)

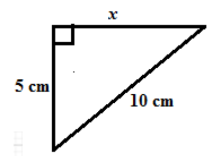


b)



4. Calcule a medida da hipotenusa para o triângulo rectângulo ABC, com ângulo recto em B, sendo que os catetos AB e BC, têm medidas de 6 cm e 8 cm, respectivamente.

5. Observe o triângulo ao lado. Calcule a medida do cateto AB do triângulo rectângulo ABC, com ângulo recto em B, sabendo que a hipotenusa AC tem medida igual a 10 cm, e o cateto BC mede 5 cm.



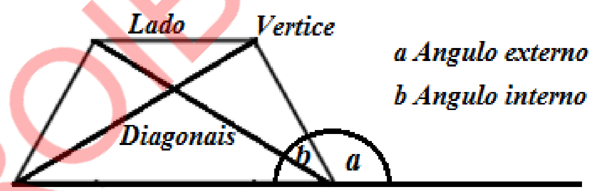
10. Quadriláteros

10.1 Noção de quadrilátero

Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados. Suas características e propriedades especificas dizem respeitos aos seus lados, ângulos e diagonais.

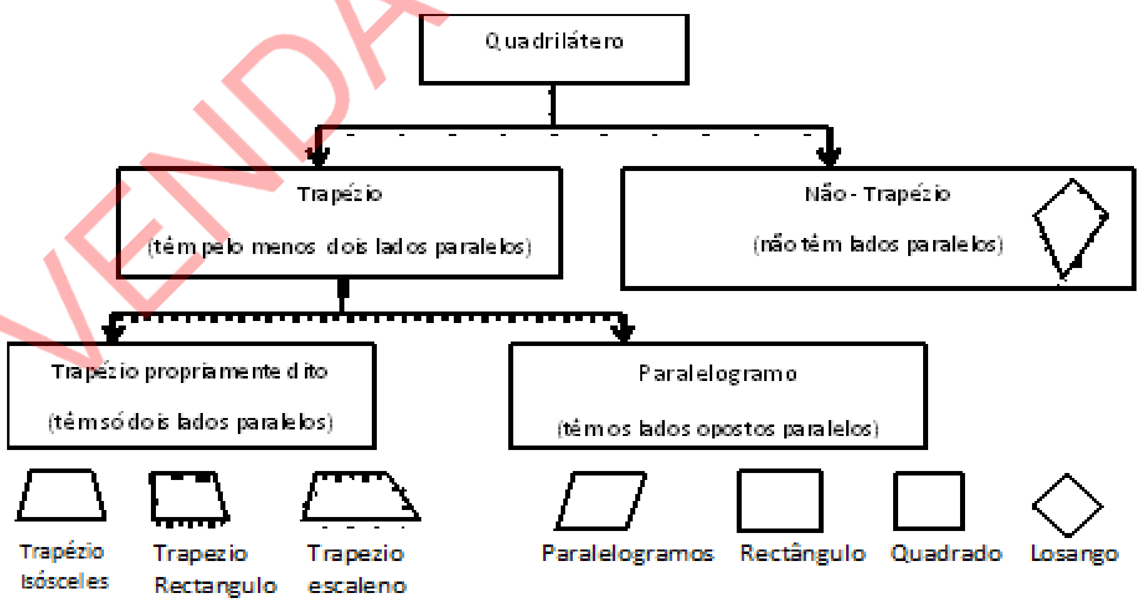
10.1.1 Elementos de um quadrilátero

1. **Lados**: São os segmentos de recta que contornam o quadrilátero;
2. **Vértices**: São os pontos de encontro entre dois lados;
3. **Ângulos internos**: São os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um quadrilátero;
4. **Ângulos externos**: são ângulos formados pelo prolongamento de um lado do quadrilátero. Um ângulo externo sempre é suplementar ao ângulo interno adjacente a ele;
5. **Diagonais**: Segmentos de recta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do quadrilátero. Dessa maneira, são os segmentos de recta que ligam dois vértices e que, ao mesmo tempo, não são lados.

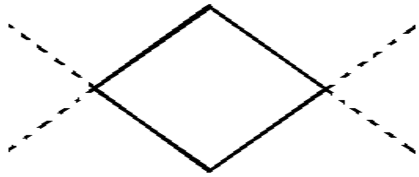
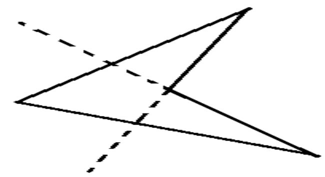


10.2 Classificação de quadriláteros

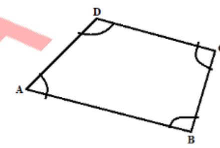
Os quadriláteros classificam-se em **trapézios** e **não trapézio**. Os trapézios subdividem-se em trapézios propriamente ditos e em **paralelogramos**.



Em qualquer trapézio pelo menos dois lados são paralelos e em qualquer paralelogramo os lados opostos são paralelos.
Se o prolongamento dos lados de um quadrilátero não o intersectar, então diz-se que o quadrilátero é **convexo**, caso contrário, designa-se por **concavo.**

Quadrilátero convexo	Quadrilátero côncavo
	

10.3 Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero



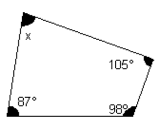
O Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero diz o seguinte: ***a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual à 360˚ (trezentos e sessenta graus)***

Consideremos o quadrilátero ao lado:

$$\sphericalangle \mathbf{A} + \sphericalangle \mathbf{B} + \sphericalangle \mathbf{C} + \sphericalangle \mathbf{D} = \mathbf{360^0}$$

Exemplo:

Determina a amplitude do ângulo x.



Resolução

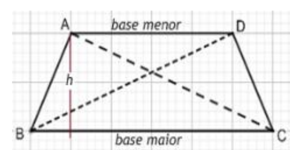
$x + 105° + 98° + 87° = 360°$

$x + 290° = 360°$

$x = 360° - 290°$

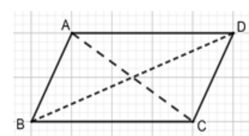
$x = 70°$

10.4 Conceito e propriedades de trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado



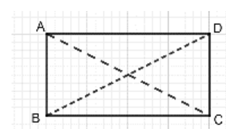
1. Trapézios

Os **trapézios** possuem apenas um par de lados paralelos chamados de **bases**. Os trapézios que possuem os outros dois lados que não são bases congruentes são chamados de **isósceles**.



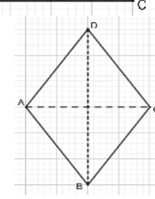
2. Paralelogramos

Os **paralelogramos** possuem lados opostos paralelos. As suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.



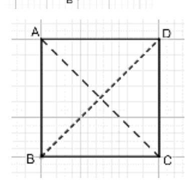
3. Rectângulo

Os **rectângulos** são **paralelogramos** cujos ângulos internos são retos (daí o nome rectângulo). *As suas **diagonais cruzam-se em seus pontos médios e são congruentes.***



4. Losango

Os losangos são **paralelogramos** que possuem todos os lados congruentes, isto é, são paralelogramos equiláteros. Sua propriedade específica é a seguinte: *As **diagonais de um losango são perpendiculares.***



5. Quadrado

Os quadrados são losangos e rectângulos simultaneamente e, por isso, possuem todos os ângulos rectos e todos os lados congruentes. Sua propriedade específica é a seguinte: ***As diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes.***

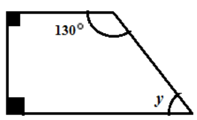
Exercícios resolvidos

1. Assinala com V na afirmação verdadeira e com F na afirmação falsa:
   a) O trapézio é um rectângulo. _____
   b) O quadrado é um paralelogramo. _____
   c) Trapézio escaleno é aquele que tem todos lados iguais. _____
   d) Trapézio isósceles é aquele que tem todos os lados iguais. _______
   e) Num quadrilátero a soma dos ângulos internos é igual a 360̊. _____

Resolução

a) F	**F,** pois o trapézio só possui um par de lados paralelos
b) V	**V,** pois o quadrado possui lados opostos paralelos
b) F	**F,** pois trapézio escaleno e aquele que possui todos lados diferentes
c) F	**F,** pois trapézio Isósceles possui dois lados postos que não são bases iguais
d) V	**V**, conforme o teorema sobre soma de ângulos internos de um quadrilátero

2. Dada a figura abaixo, determine o valor do ângulo y.



Resolução

$y + 90° + 90° + 130° = 360°$

$y + 310° = 360°$

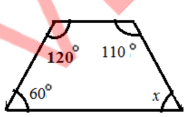
$y = 360° - 310°$

$y = 50°$

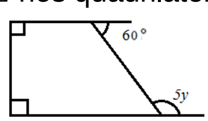
Exercícios de aplicação

1. Assinala com V a afirmação verdadeira e com F a afirmação falsa:
   a) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 180°. ____
   b) Em um paralelogramo, as diagonais são congruentes. _____
   c) Em um paralelogramo, lados opostos são paralelos e congruentes. ____
   d) Em um quadrado, as diagonais são perpendiculares e não congruentes. ____
   e) Em um quadrado, todos os lados são iguais e seus ângulos podem ser retos ou não. _____
2. Qual é o quadrilátero que tem lados paralelos dois a dois, não tem ângulos rectos e cujas diagonais são perpendiculares?
3. Qual é o quadrilátero que tem um par de lados paralelos e cujas diagonais não se cortam ao meio?
4. Calcula os valores de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ nos quadriláteros que se seguem:

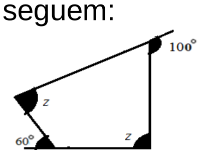
a)



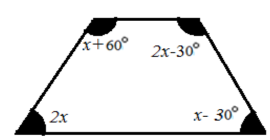
b)



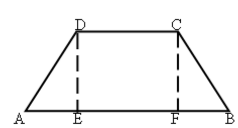
c)



d)



5. Dado o trapézio isósceles [ABCD], com AB=10cm e $\overline{DC} = \overline{DE} = 4cm$.
Determina:
a) A medida de $\overline{AD}$.
b) O perímetro do trapézio



UNIDADE TEMÁTICA XI ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS

11. Estatística

11.1 Objecto da Estatística

A **estatística** é ramo da Matemática que tem como objectivo obter, organizar e fazer análise numérica das informações.

11.2 População e amostra

População ou **universo estatístico** é uma colecção de seres com alguma característica comum. E**xemplos**:
a) Todos os alunos de uma determinada escola;
b) Número de alunos que jogam futebol de todas as turmas de uma determinada escola.

Amostra é conjunto finito da população que representa uma parte significativa desta.
Exemplo:
a) Uma parte alunos de uma determinada escola.
b) Número de alunos escolhidos para formar a equipa de futebol da escola.

11.3 Variáveis (caracteres) estatísticas

Variável estatístico ou Caracter estatístico é uma propriedade que permite caracterizar os indivíduos de uma população.
As variáveis estatísticas podem ser: **Qualitativas** (não mensuráveis) e **quantitativas** (mensuráveis).

11.3.1 Variável estatístico qualitativos ou nominais (não mensuráveis): Que não se podem medir.
Exemplos:
a) A cor dos olhos b) A Profissão c) cor dos cabelos, …

As variáveis estatísticas qualitativas podem ser definidas em modalidades.

Exemplo:
Na variável qualitativa "profissão", podem se considerar modalidades: professor, médico, eletricista, mecânico, etc.

11.3.2 Variável estatístico quantitativos ou numéricas (mensuráveis): Que se podem medir.

Exemplo:
a) Temperatura b) altura c) idade, …

As variáveis quantitativas podem ser discretas ou continuas.
1. Discretas quando não podem tomar todos valores de um determinado intervalo real.

Exemplo:
a) Número de filhos de uma mãe.

b) Número de golos marcados num jogo de futebol.
2. Continuas quando pode tomar quaisquer valores de um determinado intervalo real.
Exemplo:
a) Altura dos alunos de uma turma da 9ª classe;
b) As temperaturas registadas num determinado lugar durante um dia.

Resumindo: Variáveis $\begin{cases} \text{Qualitativa} \\ \text{Quantitativa} \begin{cases} \text{Discreta} \\ \text{continua} \end{cases} \end{cases}$

11.4 Recolha e organização de dados

Um estudo estatístico envolve a recolha, organização e análise dos dados. A análise e interpretação dos dados permite fazer previsões e tomar decisões.

11.5 Tabelas de frequência absoluta, relativa percentual e acumuladas

Para organizar dados e fazer a respectiva análise, usam-se tabelas (frequência absoluta, relativa percentual e acumuladas) e gráficas (barras, linhas e circulares).
Exemplo:
O número de golos obtidos numa jornada de futebol no moçambola 2023 foi o seguinte:

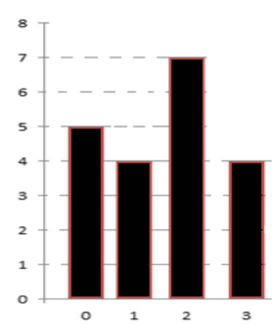
2	3	2	0	2	3	1	0	1	2
3	0	1	1	2	0	3	2	2	0

Vamos organizar esses dados numa tabela de frequências:

Nº de golos	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa (fr) $fr = \frac{f}{n}$	Frequência Absoluta acumulada (F)	Frequência relativa acumulada (Fr)
0	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$	5	$0{,}25$
1	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$	9	$0{,}45$
2	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\%$	16	$0{,}8$
3	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$	20	1,00
	n=20	$1{,}00 = 100\%$	----------	------------

11.6 Gráfico de barras (frequência absoluta)

O gráfico ao lado representa as frequências absolutas de número de golos obtidos numa jornada de futebol no moçambola 2023



Gráficos de barras

11.7 Medidas de tendência central: média, moda e mediana

11.7.1 Média

Sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$, $\boldsymbol{n}$ valores de uma variável quantitativas, chama-se **média** ao valor que se obtém pela fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

11.7.2 Moda

Chama-se **moda**, de um conjunto de $\boldsymbol{n}$ valores, $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ de uma variável estatística, ao valor que ocorre com maior frequência.

11.7.3 Mediana

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$, n dados estatísticos ordenados do menor para o maior e vice-versa, chama-se mediana ao valor que ocupa a posição central.

Exercícios resolvidos

Considerando o exemplo dado sobre número de golos obtidos numa jornada de futebol no Moçambola 2023:

2	3	2	0	2	3	1	0	1	2
3	0	1	1	2	0	3	2	2	0

Vamos calcular:

a) A média

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 0 + 2 + 3 + 1 + 0 + 1 + 2 + 4 + 0 + 1 + 1 + 2 + 0 + 3 + 2 + 2 + 0}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{31}{20} = 1{,}55 \cong 2$$

Logo em média marcou-se 2 golos.

b) Moda

Verificando os dados, podemos concluir que a moda é 2 pois é o valor que ocorre com maior frequência.

c) Mediana

Colocando de forma crescente os dados teremos:

0 0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3

Podemos notar que o valor central é formado por dois números (2 2) sendo assim temos que somar os dois números e dividir por 2, ou seja: $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Logo a mediana é 2.

Exercícios de aplicação

1. Em uma pesquisa realizada em uma escola, identificou-se os seguintes indicadores: idade, classe, sexo, local de estudo, classificação obtido na última prova de Matemática e Quantidade de livros que possui.
   a) Das variáveis acima, quais são as quantitativas e quais são as qualitativas?
   b) Das variáveis quantitativas, diga quais são discretas?

2. As notas do João em cinco testes de Matemática foram as seguintes: 15, 16, 13, 15, 11.
   a) Qual é a moda das notas?
   b) Calcule a média aritmética das notas.
   c) Qual deve ser a nota do sexto teste para que a média suba em 1 valor?

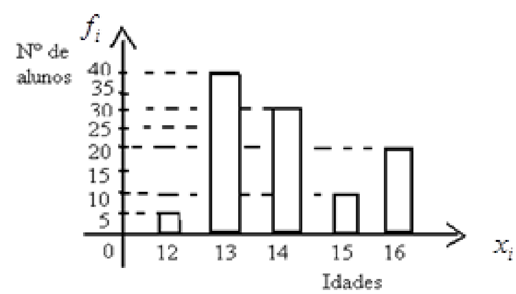
3. Na Cidade da Maxixe, fez-se um levantamento do número de pessoas de cada agregado familiar. Num dos bairros obteve-se os seguintes resultados

   5 2 4 4 3 5 1 5 5 6 3 3 4 4 5 6 6 4 2 3

   a) Construa uma tabela de frequências de acordo com os dados.
   b) Determine:
      i. A média das pessoas de cada agregado familiar.
      ii. A mediana.
      iii. A moda.

4. Determine para cada um dos conjuntos de números seguintes o valor de x, de modo que a média seja 7.
   a) 8 7 3 x 14
   b) 4 2 6 10 x 8 1

5. O gráfico mostra a distribuição das idades por anos, de alunos de uma certa escola.
   a) Determine a média aritmética das idades.
   b) Qual é a moda das idades?



SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Unidade Temática I: Números e operações (1)

1.a) V b) V c) F d) F e) V f) V g) V h) V

2.a) $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ b) $\{\ 2;\ 3\}$

3.a) $\{0; 1; 2; 3; 5\}$ b) $\{0; 1; 2; 3; 6; 8\}$ c) $\{0; 1; 2; 3; 5; 7; 9\}$
d) $\{0; 2\}$ e) $\{5\}$ f) $\emptyset$

Unidade Temática II: Números e operações (parte1) -Parte-I

1.a) V b) V c) V d) V e) F f) F 2.a) $|+12|$ b) 5 c) 12 d) 2016

3.a) $<$ b) $>$ c) $=$ d) $>$ e) $>$ f) $<$ g) $=$ h) $=$

4.a) $\{-5;\ -3;\ 0; 1;\ 2;\ 6\}$ b) $\{\ -8;\ -5; -4; 0; 2; 6; 10\}$

5.a) -4 b) -7 c) -13 d) 0 e) -40 f) -26 g) 80 h) 5

6.a) -2 b) 5 c) 135 d) -5 e) 3 f) -33

Parte-II

1.a) $\frac{11}{10}$ b) $-\frac{4}{15}$ c) $-\frac{14}{15}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $0{,}75 \text{ ou } \frac{3}{4}$ f) $3{,}1 ou \frac{31}{10}$

2.a) $\frac{13}{10}$ b) $-\frac{23}{30}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{12}$ e) -1 f) 1

3.a) 2 b) 8 c) 0 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{11}$ f) $\frac{19}{12}$

Parte-III

1.b) 2.d) 3.a)

4.a) $\frac{46}{9}$ b) -11 c) 32 d) $-\frac{193}{4}$ e) 48 f) 1 g) $\frac{629}{25}$ h) 11 i) $-\frac{335}{343}$

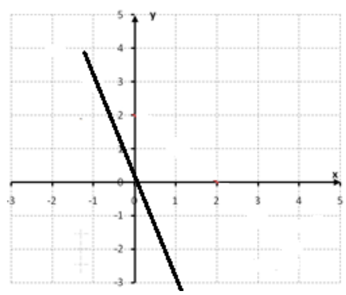
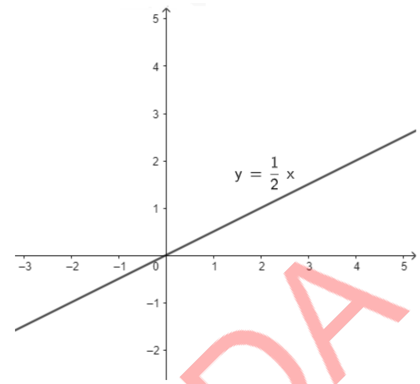
5.a) 1 b) -12 c) 1 d) 1 e) 1 f) 16

5.a) 2 b) 5 c) 4 d) $0{,}2$ e) $\frac{5}{7}$

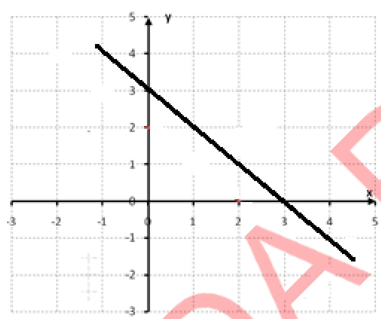
Unidade temática III: Funções

1.a) $\{28; 30; 31; 32\ \}$ c) $\{28; 30; 31\ \}$

2.a) $a = 5\ e\ b = \frac{1}{3}$ b) $a = -3\ e\ b = -2$ c) $a = -\frac{2}{3}\ e\ b = 5$

3.I	a) e c) decrescente porque $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$	b) e d) crescente porque $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
II	Esboço de gráfico $(y = -3x)$ 	

4.a) $y = 3$ b) $x = 3$ c) Gráfico da função $y = x + 3$

4.c)	Gráfico da função $y = -x + 3$ 

Unidade temática IV: Números e operações (2) - Introdução dos números reais

1. a) V b) V c) V d) V e) F f) V

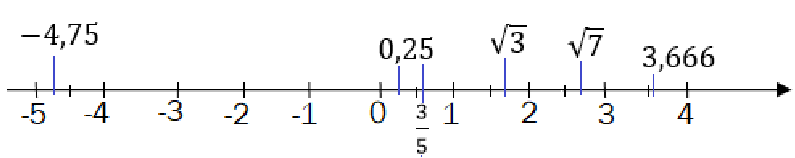
2-a) $0{,}25 \in \mathbb{Q}$ b) $-0{,}6 \in \mathbb{Q}$ c) $-3 \in \mathbb{Z}$ d) $-0{,}7272727273 \ldots \in$ irracional
e) $0{,}625 \in \mathbb{Q}$ f) $2 \in \mathbb{Z}\ ou \mathbb{N}$ g) $1{,}7321 \ldots \in$ irracional
h) $2{,}8284 \ldots \in$ irracional

3-a) $\notin$ b) $\supset$ c) $\in$ d) $\in$ e) $\notin$ f) $\subset$ g) $\in$ h) $\notin$
i) $\notin$ j) $\subset$ k) $\in$ l) $\in$ m) $\subset$ n) $\in$ o) $\in$ p) $\in$

4-a) F b) V c) V d) F e) V f) V g) F h) V i) V

5. $-3 \in \mathbb{R}^-$ $\sqrt{7} \in \mathbb{R}^+$ $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}^+$ $0{,}33333 \in \mathbb{R}^+$

6.

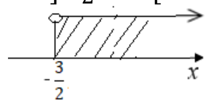


7. $-3; -\frac{11}{4}; -2{,}7; -\sqrt{7}; 1{,}5\sqrt{3}\,; \sqrt{7}; \frac{8}{3}$

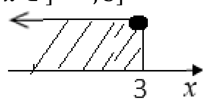
Unidade temática V: Álgebra (1) - Intervalos numéricos e inequações lineares com uma variável

1. a) $\{-3;\ -2;\ -1\}$ b) $\left\{-\frac{9}{2};\ -\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$ c) $\{-\sqrt{7}; -\sqrt{5}; -\sqrt{3}\}$

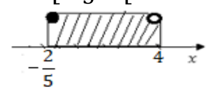
2.a) $x \in \left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[$



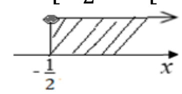
b) $x \in]-\infty; 3]$



c) $x \in \left[-\frac{2}{5}; 4\right[$



d) $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$



3.a) $]-\infty; 4]$ b) $]-\infty; 4]$ c) $]-\infty; 3]$ d) $]-\infty; 1]$
e) $[0; 3]$ f) $[0; 1]$ g) $]-\infty; 1]$ h) $]-\infty; 3]$

4.a) $x > -5$ b) $x \leq 10$ c) $x > -7$ d) $x < -2$ e) $x \geq -3$
f) $x < \frac{4}{9}$ g) $x > \frac{7}{6}$ h) $x \leq 3$ i) $x > -\frac{8}{5}$ j) $x > -5$

5. $\{0; 1; 2\}$ 6. -4 7. 2

Unidade Temática VI: Geometria (1)

1. a) F b) F c) F d) V e) F
2. *a) x* = 59º b) *x* = 82º c) *x*=92º d) *x* = 90º

3.a) 50g b) 80g c) 40g 44′ d) 60,3g
4.a) $\mathbf{42,3°}$ b) $\mathbf{57,6°}$ c) $\mathbf{2,88°}$ d) $\mathbf{44,55°}$

5. A amplitude do $\sphericalangle C\hat{B}A = 145^o$
6. O comprimento do arco é de $7{,}065cm$.
7. A área de um sector circular é igual $565{,}2dm^2$.
8. A área da parte alcatroada é $15072m^2$que corresponde a $1{,}5072\ ha$.

Unidade temática VII: Álgebra (2)

1. $-x$; 7; $5x^2y$; 4.
2.a) **1** b) **5** c) **2** d) **0**

3.	Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
	$\mathbf{-xy}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{xy}$	**2**
	$\mathbf{\frac{4a^4x^3b}{3}}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\mathbf{a^4x^3b}$	**8**
	$\mathbf{-3x^2y^7}$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{x^2y^7}$	**9**
	12	**12**	------------------------	---------------
	$\mathbf{-6\sqrt{6}tb^2}$	$\mathbf{-6\sqrt{6}}$	$\mathbf{tb^2}$	**3**

4. $2x^3\ e\ \frac{2}{3}x^3$; $2xy^2$ e $-y^2x$;.

5 a) $5ab$ b) $12{,}3a^2b$ c) $\frac{17}{6}x^2y$ d) $-x^2 - 2y + 5$

6. a) $-12x^3$ b) $-x^3y^2$ c) $\frac{9}{2}a^3b^2x^4$ d) $-\frac{8}{27}x^6y^3$ e) $45a^6b^4$

7. a) $-a$ b) $\frac{1}{5}x^3y^2$ c) $5ab^2$ d) $-\frac{5}{4}a^2$ e) $3xy^2$ f) $5x^3y^2$

8. d) $9y^3x^3$

Unidade temática VIII: Álgebra (2)

1. O par $(-1; -2)$ é solução de ambas equações.

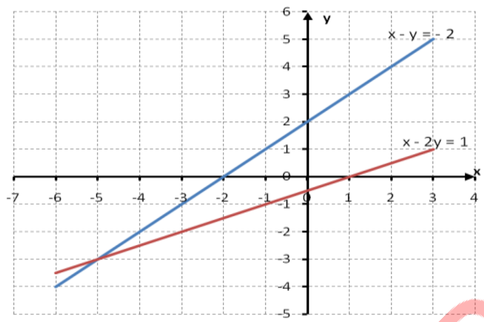
2-a) Não é solução b) É solução c) É solução

3. Os sistemas das alíneas b) e c) são equivalentes.

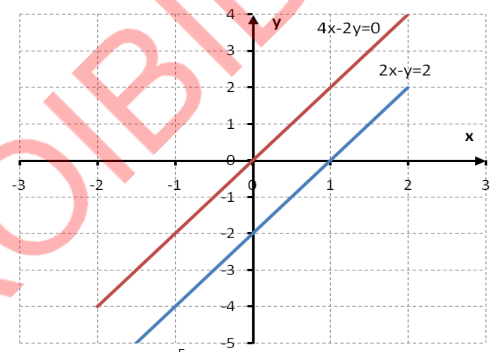
4. a) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + y = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x - 3y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 9y = 16 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

5.a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \frac{16}{3} \\ y = 1 \end{cases}$ 6. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

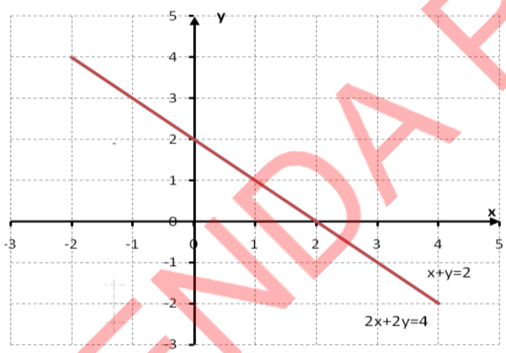
7.a)



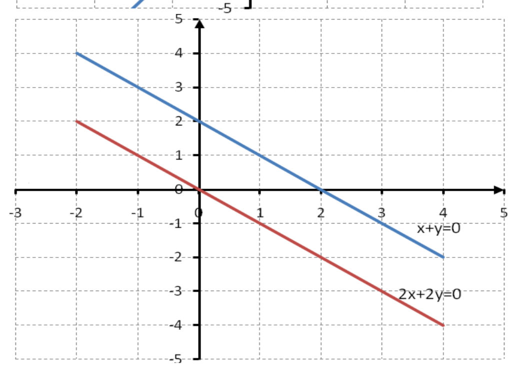
b)



c)



d)



8. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \frac{20}{7} \\ y = \frac{19}{7} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

9. a) Os números são 27 e 16.
   b) Havia na caixa 10 moedas de $1Mt$ e 40 moedas de 50 centavos.

Unidade Temática IX: Geometria (parte 2) - Parte-I

1.a) a e e; b e f; c e g; d e h b) d e f; c e e c) a e b; b e h d) a e c; b e d; e e g; f e h

2. a) $a = c = 30^\circ, b = 110^\circ$ b) $x = 48^\circ$ e $y = 132^\circ$ c) $\alpha = 60^\circ$; $\delta = 60^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$

3. a) V b) V c) F d) F e) F 4. $x = 4$ e $y = 3$

Parte-II

1. b) 2. $y = 24$ 3. são $32\ m$

Parte-III

1. b); d) e f) 2.a) $x = 13cm$ e b) $x = 6cm$

3.a)

Nº de agregado familiar x_i	Frequência absoluta$(\boldsymbol{f})$	Frequência relativa (f_{r-})	Frequência relativa $(f_{r-}\%)$	Frequência Absoluta acumulada (F-%)	Frequência relativa acumulada$(\boldsymbol{Fr})$
1	1	0,05	5	0,05	5
2	2	0,1	10	0,15	15
3	4	0,2	20	0,35	35
4	5	0,25	25	0,60	60
5	5	0,25	25	0,85	85
6	3	0,15	15	15	100
	$n = 20$	1	100	100	

3. a) $A = 85\sqrt{3}cm^2$ b) $A = 108cm^2$ 4. $h = 10cm$ 5. $\overline{AB} = 5\sqrt{3}cm$

Unidade Temática X: Geometria (parte 2)

1. a) F b) F c) V d) F e) F 2. Losango

3. trapézio 4.a) $x = 70^\circ$ b) $y = 24^\circ$ c) $z = 80^\circ$ d) $x = 60^\circ$

5. a) $\overline{AD} = 5cm$ b) O perímetro do trapézio é de $24cm$.

Unidade temática XI: Organização e tratamento de dados

1. a) Quantitativas: Idade, classificação obtida na última prova de Matemática, quantidade de livros.
Qualitativas: classe, sexo, local de estudo.
b) Discretas: Idade e quantidade de livros.

2.a) $M_o = 15$ valores b) $\bar{x} = 14\, Valores$. c) A nota do 6º teste deve ser 20 valores.

b) i. $\bar{X} = 4\, pessoas$ ii. Me=4 iii. Mo=4 e 5

4. a) $x = 19$ b) $x = 23$ 5.a) $\bar{x} = 14$ b) $M_o = 13$ anos

BIBLIOGRAFIA

- Amaral, a. J., & Nhalungo, C. (2004). *As maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores. Langa, H., & Chuquela, N. J. (2010). *Matemática.* Maputo: Plural editora.
- Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.
- Amaral, A., & Nhalungo, C. (n.d.). *As Maravilhas da Matemática.* Maputo: Plural Editores.
- Azevedo, J. M., Calejo, M. M., & Moreira, O. M. (1990). *Matemática 7º Ano de Escolaridade.* Lisboa:Lisboa Editora.
- Chuquela, N. J., & Langa, N. (2008). *Matemática.* Maputo: Plural Editores.
- Draisma, J., & Sovertkov, P. (1994). *Eu gosto de Matemática.* Maputo: Editora escolar. Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A maravilha dos números.* Maputo: Texto Editores.
- Guibundana, D., & Sapatinha, J. C. (2009). *Saber Matemática.* Maputo: Logman Moçambique Lda.
- Ieezi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., & Almeida, N. (2016). *Matemática Ciência eAplicações.* São Paulo: Saraiva.
- Martins Zeferino (2017), *Matemática 8 ª Classe*, Maputo: Textos Editores, Lda.
- Martins Zeferino (2017), *Matemática 9ª Classe*, Maputo: Textos Editores, Lda.
- Sapantinha, J. C., & Guibundana, D. H. (2010). *saber Matemática.* Maputo: Longman Mocambique.
- Smole, K. S., & Diniz, M. I. (2016). *Matemática- Compreender o Mundo.* São Paulo: Saraiva.
- Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números Matemática 7ªClasse.* Maputo:Textos Editores, Lda.
- Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números.* Maputo: Texto Editores.
- Zavala, C. A., & Issufo, D. S. (2004). *A Maravilha dos Números Matemática 7ªClasse.* Maputo:Textos Editores, Lda.